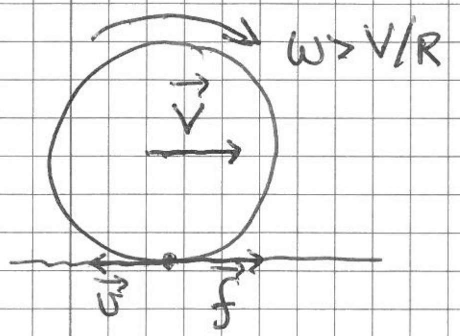
Sluring

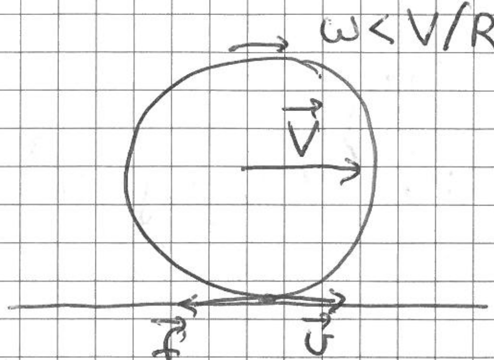
Hvis $\omega \neq V/R$, har vi en <u>relativ hastighet</u>

$$v = V - \omega R \neq 0$$

mellom legeme og underlag i kontaktpunktet.

Legemet roterer <u>og</u> glir; det <u>slurer</u>.





I begge tilfeller er $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$,

med $f = \mu_k N$ (kinetisk friksjon).

Kinetisk energi ved ren rulling

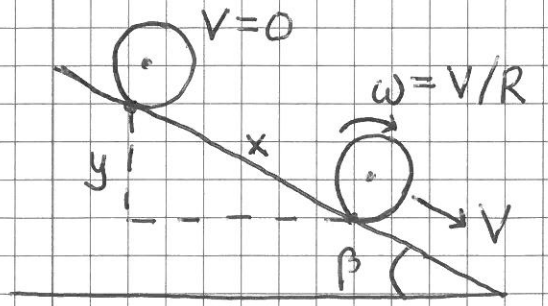
$$K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

$$I_0 = c \cdot M R^2 \quad (\text{ring } c = 1 \,;\ \text{kule } c = \tfrac{2}{5} \,;\ \ldots)$$

$$\omega = V/R$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} c M R^2 \frac{V^2}{R^2} = \underline{\underline{(1+c)\frac{1}{2} M V^2}}$$

Eks: Kappløp på skråplanet [YF 10.3; LL 6.8]



M = masse, R = radius,
$I_0 = cMR^2$ = treghetsmom. mhp CM
Anta ren rulling ($\omega = V/R$).
Bestem V, $\dot{V}$, friksjonen f, og minste μ_s som gir ren rulling!

Exp: $\dot{V}$ (kule) > $\dot{V}$ (skive) > $\dot{V}$ (kuleskall) > $\dot{V}$ (hul sylinder)

Løsning:

Kontaktpunkt i ro $\Rightarrow$ statisk friksjon, $f \le \mu_s N$,

$W_f = 0$, og mek. energi E er bevart

$$\Rightarrow \quad Mgy = (1+c)\tfrac{1}{2}MV^2 \quad ; \quad y = x \sin\beta$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{V = \sqrt{\frac{2gx\sin\beta}{1+c}}}}$$

Som forklarer exp. kvalitativt, siden

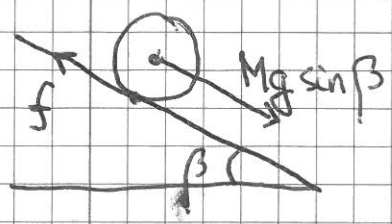
$$c(\text{kule}) = \tfrac{2}{5} < c(\text{skive}) = \tfrac{1}{2} < c(\text{kuleskall}) = \tfrac{2}{3} < c\binom{\text{hul}}{\text{sylinder}} = 1$$

Akselerasjonen:

$$\dot{V} = \sqrt{\frac{2g\sin\beta}{1+c}}\,\frac{d}{dt}\sqrt{x} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^{-1/2}\frac{dx}{dt} = \frac{V}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \dot{V} = \frac{V}{\sqrt{x}} \cdot \frac{V}{2\sqrt{x}} = \frac{V^2}{2x} = \underline{\underline{g\,\frac{\sin\beta}{1+c}}}$$

Redusert med faktoren $(1+c)^{-1}$ pga friksjon $\vec{f}$ rettet oppover skråplanet. (Med $f=0$ blir $A = g\sin\beta$.)



$$N2: \quad Mg\sin\beta - f = M\dot{V} = \frac{Mg\sin\beta}{1+c}$$

$$\Rightarrow f = \left(1 - \frac{1}{1+c}\right) Mg\sin\beta = \underline{\underline{\frac{c}{1+c} Mg\sin\beta}}$$

$$f_{max} = \mu_s N = \mu_s Mg\cos\beta$$

$\Rightarrow$ ren rulling bare hvis $f_{max} \geq f$

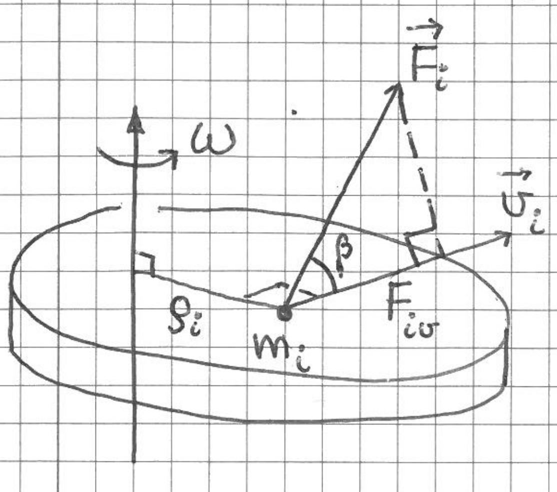
$$\Rightarrow \mu_s Mg\cos\beta \geq \frac{c}{1+c} Mg\sin\beta \quad \Rightarrow \underline{\underline{\mu_s \geq \frac{c}{1+c}\tan\beta}}$$

Hul sylinder $(c=1)$: $\mu_s \geq \frac{1}{2}\tan\beta$ etc.

Rotasjonsdynamikk

Akse med fast orientering

- På sett og vis endimensjonalt problem
- Dekker det meste vi skal ta for oss
- Hvis aksen flytter seg, er det rotasjonsdelen av legemets totale bevegelse som beskrives



$$v_i = \rho_i \omega$$

F_{iv} = komponent av $\vec{F}_i$ langs $\vec{v}_i$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{F}_i \cdot \vec{v}_i}_{\text{effekt tilført } m_i} = F_{iv} v_i = \underbrace{F_{iv}\rho_i}_{\text{“kraft ganget med arm”}} \omega$$

La oss regne ut $P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$ = tilført ("rotasjons"-) effekt på to måter, ved

(a) å bruke N2, $\vec{F}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$, og $v_i = \rho_i \omega$

(b) å bruke (kun) $v_i = \rho_i \omega$

$$\text{(a)} \quad P = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i \overset{\text{se s.17}}{=} \frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$= \frac{d}{dt} \underbrace{\left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\}}_{= I = \text{konstant for stivt legeme}} \cdot \frac{1}{2} \omega^2 = I \omega \frac{d\omega}{dt}$$

$$\text{(b)} \quad P = \sum_i F_{i\varphi} v_i = \left\{ \sum_i F_{i\varphi} \rho_i \right\} \omega = \tau \omega$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tau = I \dot{\omega}}$$

N2 for rotasjonsbevegelsen om akse med fast orientering

Her er $\tau = \sum_i F_{i\varphi} \rho_i$ = ytre dreiemoment på legemet, mhp rotasjonsaksen, og

$I = \sum_i m_i \rho_i^2$ = legemets treghetsmoment mhp den samme rotasjonsaksen

Rotasjon og arbeid [YF 10.4 ; LL 6.4]

Vi har nå $\boxed{P = \tau\,\omega} = \tau \dfrac{d\varphi}{dt}$ = tilført effekt

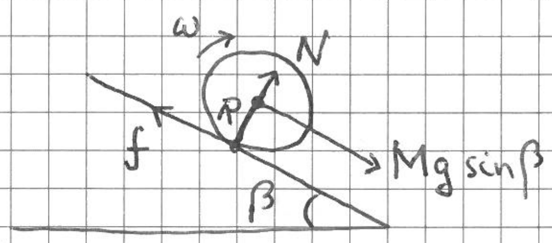
når dreiemomentet $\tau = \sum_i F_{i\varphi}\,\rho_i$ virker, og legemet roterer en vinkel $d\varphi$ i løpet av tida dt.

Fra før: $P = \dfrac{dW}{dt}$ = tilført arbeid pr tidsenhet

Dermed: $\boxed{dW = \tau\, d\varphi}$

Sammenlign med translasjon: $P = \vec{F}\cdot\vec{v}$, $dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$

Eks 1: Rulling på skråplan



$\omega = V/R$

$\dot{\omega} = \dot{V}/R$

N2, rot. om akse gjennom CM:

$\tau = f\cdot R$ = dreiemoment mhp akse gjennom CM

$$\Rightarrow \quad f\cdot R = I_0\,\dot{\omega} = c\,MR^2\cdot\frac{\dot{V}}{R} = cMR\dot{V} \quad \Rightarrow \quad f = cM\dot{V}$$

N2, translasjon:

$$Mg\sin\beta - f = M\dot{V}$$

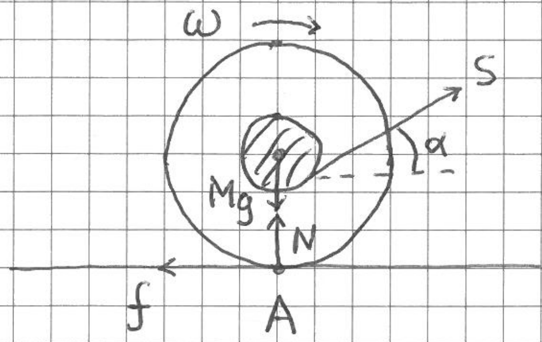
$$\Rightarrow \quad Mg\sin\beta = M\dot{V} + f = (1+c)\,M\dot{V}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\dot{V} = g\cdot\frac{\sin\beta}{1+c}}}$$

(som s. 39)

Eks 2: snelle

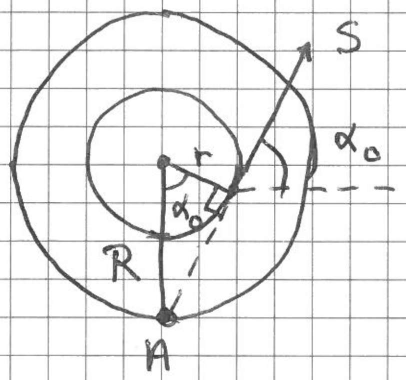
Kun S har arm mhp akse gjennom kontaktpkt. A:



Liten α $\Rightarrow$ $\dot{\omega}$ som i figuren

Stor α $\Rightarrow$ $\dot{\omega}$ andre veien

Statisk likevekt hvis forlengelsen av $\vec{S}$ går gjennom A (da er $\tau_A = 0$):



$\Rightarrow \cos \alpha_0 = r/R$

$$N = Mg - S \sin \alpha_0 \,, \qquad f \leq \mu_s N$$

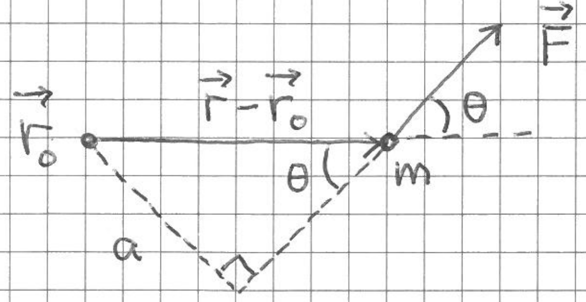
$\Rightarrow$ snella i ro inntil $\quad S \cos \alpha_0 = \mu_s (Mg - S \sin \alpha_0)$

$$S = \mu_s Mg / (\cos \alpha_0 + \mu_s \sin \alpha_0)$$

$$\left(\sin \alpha_0 = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_0} = \sqrt{1 - r^2/R^2}\right)$$

Rotasjonsdynamikk, generelt

Dreiemoment [YF 10.1 ; LL 5.5, 6.4]



$a = |\vec{r}-\vec{r}_0| \cdot \sin\theta$

$$\boxed{\vec{\tau} = (\vec{r}-\vec{r}_0) \times \vec{F}}$$

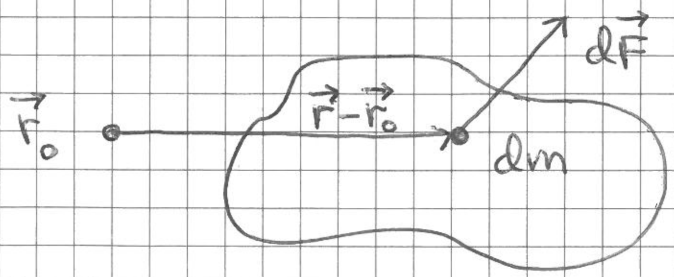
$\vec{F}$'s dreiemoment på m, relativt <u>valgt ref. punkt</u> $\vec{r}_0$

Retning: $\vec{\tau} \perp \vec{F}$ og $\vec{\tau} \perp \vec{r}-\vec{r}_0$

Abs.verdi: $|\vec{\tau}| = |\vec{r}-\vec{r}_0| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\theta$

$= a \cdot F$ (arm · kraft, som s. 41)

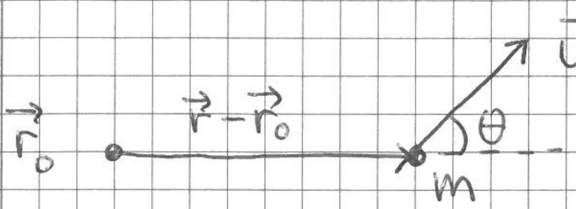
For partikkelsystem (f.eks. stivt legeme):



$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int (\vec{r}-\vec{r}_0) \times d\vec{F}$$

= totalt dreiemoment på legemet, relativt $\vec{r}_0$

Dreieimpuls [YF 10.5 ; LL 6.6]



$$\vec{p} = m\vec{v}$$

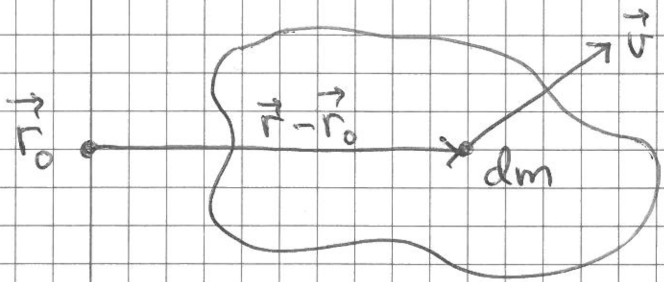
$$\boxed{\vec{L} = (\vec{r}-\vec{r}_0) \times \vec{p}}$$

m's dreieimpuls, relativt $\vec{r}_0$

Retning: $\vec{L} \perp \vec{p}$, $\vec{L} \perp \vec{r}-\vec{r}_0$

Abs.verdi: $|\vec{L}| = |\vec{r}-\vec{r}_0| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin\theta = a \cdot p$ ("arm·impuls")

For partikkelsystem:



$$d\vec{p} = \vec{v}\,dm$$

$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int (\vec{r}-\vec{r}_0) \times \vec{v}\,dm$$

= legemets totale dreieimpuls, relativt $\vec{r}_0$

N2 for rotasjon [YF 10.5; LL 6.6]

Anta fast $\vec{r}_0$, evt. $\dot{\vec{r}}_0 \parallel \vec{v}$, slik at $\dot{\vec{r}}_0 \times \vec{v} = 0$.

Regner ut $d\vec{L}/dt$:

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}\left\{ m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} \right\} = \underbrace{m(\vec{v} - \dot{\vec{r}}_0) \times \vec{v}}_{=0} + m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{a}$$

$$\overset{N2}{=} (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

For partikkelsystem:

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}\int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}\, dm = \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{a}\, dm$$

$$\overset{N2}{=} \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{F} = \int d\vec{\tau} = \vec{\tau}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}} \quad \text{N2, rotasjon}$$

$\vec{\tau}$ = netto ytre dreiemoment på legemet

$\vec{L}$ = legemets totale dreieimpuls

(Felles ref.punkt $\vec{r}_0$ i $\vec{\tau}$ og $\vec{L}$!)

Bevaringslover (oppsummert)

- For isolert system (dvs ingen ytre krefter) er total energi E, impuls $\vec{p}$ og dreieimpuls $\vec{L}$ bevart
- For konservativt system er mekanisk energi $E = K + U$ bevart
- Hvis netto ytre kraft på system er null, er total impuls $\vec{p}$ bevart
- Hvis netto ytre dreiemoment på system er null, er total dreieimpuls $\vec{L}$ bevart

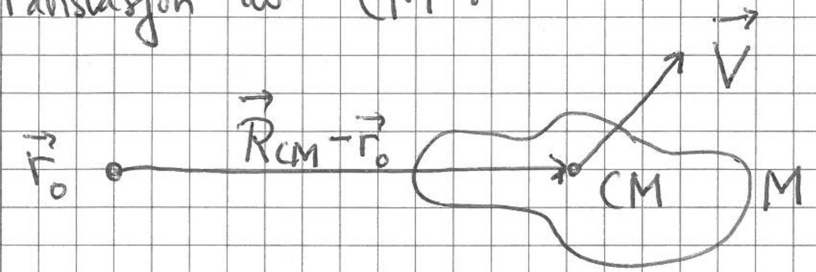
$\vec{L}$ for stivt legeme [YF 10.5; LL 6.6]

Analogt K for stivt legeme (s. 33):

Total $\vec{L}$ = Banedreieimpuls pga translasjon av CM

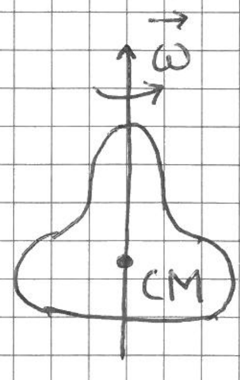
+ Spinn pga rotasjon om akse gjennom CM

Translasjon av CM:



$\vec{L}_b = M(\vec{R}_{CM}-\vec{r}_0)\times\vec{V}$ = banedreieimpuls relativt $\vec{r}_0$

Rotasjon om akse gjennom CM:
(Antar refleksjonssymmetri om rotasjonsaksen)



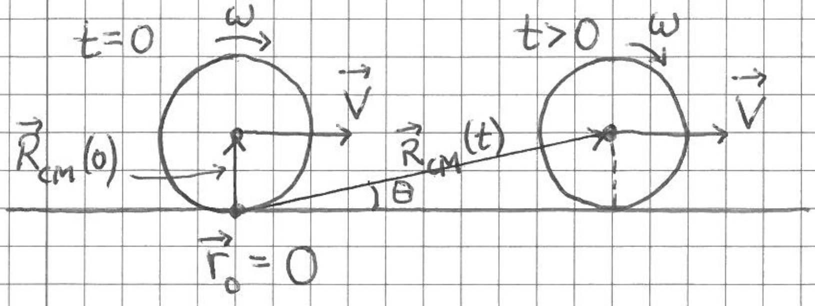
$\vec{L}_s = I_0\vec{\omega}$ = spinn ("indre dreieimpuls"); uavhengig av $\vec{r}_0$

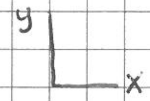
Total dreieimpuls for stivt legeme:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = M(\vec{R}_{CM}-\vec{r}_0)\times\vec{V} + I_0\vec{\omega}}$$

(Se eget notat for bevis.)

Eks: Hva er $\vec{L}$ for $\overbrace{\text{rullende}}^{\text{(rent)}}$ ring?





$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$

$I_0 = MR^2$

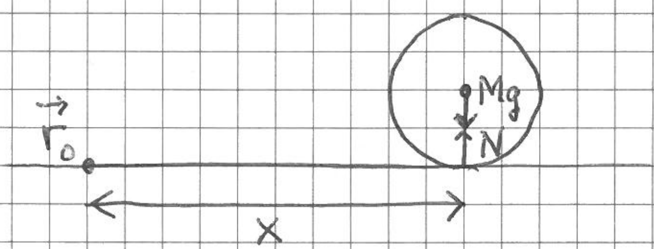
$$\vec{L}_b(0) = M\vec{R}_{CM}(0) \times \vec{V} = MRV\,(-\hat{z})$$

$$\vec{L}_b(t) = M\,\vec{R}_{CM}(t) \times \vec{V} = MR_{CM}(t)\,V \sin\theta \cdot (-\hat{z}) = MRV\,(-\hat{z})$$

$$\vec{L}_s(0) = \vec{L}_s(t) = I_0\vec{\omega} = I_0\,\omega\,(-\hat{z}) = MR^2\omega\,(-\hat{z})$$

Ren rulling: $\omega = V/R$

$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{L} = -2MRV\,\hat{z}}}$, bevart, så $\vec{\tau} = 0$:



Mg (ned) og N (opp) har lik arm x, og N = Mg

$$\Rightarrow \vec{\tau} = x\hat{x} \times N\hat{y} + x\hat{x} \times Mg(-\hat{y}) = \underline{\underline{0}}$$