

MEKANIKK

[YF 1-10; LL 1-6]

(1)

Størrelser og enheter

[YF 1]

Eks: Masse ;

↑
størrelse

$m = 79.2$

↑
symbol

↑
tallverdi

dekadisk forstøvelse
(k=kilo= 10^3)

↑
SI-enhet

$[m] = \text{kg}$: "SI-enheten til masse er kilogram"

Grunnleggende størrelser i mekanikk:

lengde $[l] = \text{m}$

tid $[t] = \text{s}$

masse $[m] = \text{kg}$

Termisk fysikk:

temperatur $[T] = \text{K}$

stoffmengde $[n] = \text{mol}$

(Elmag: strømstyrke $[I] = \text{A}$)

Sammensatte størrelser: hastighet $[v] = \text{m/s}$

akselerasjon $[a] = \text{m/s}^2$

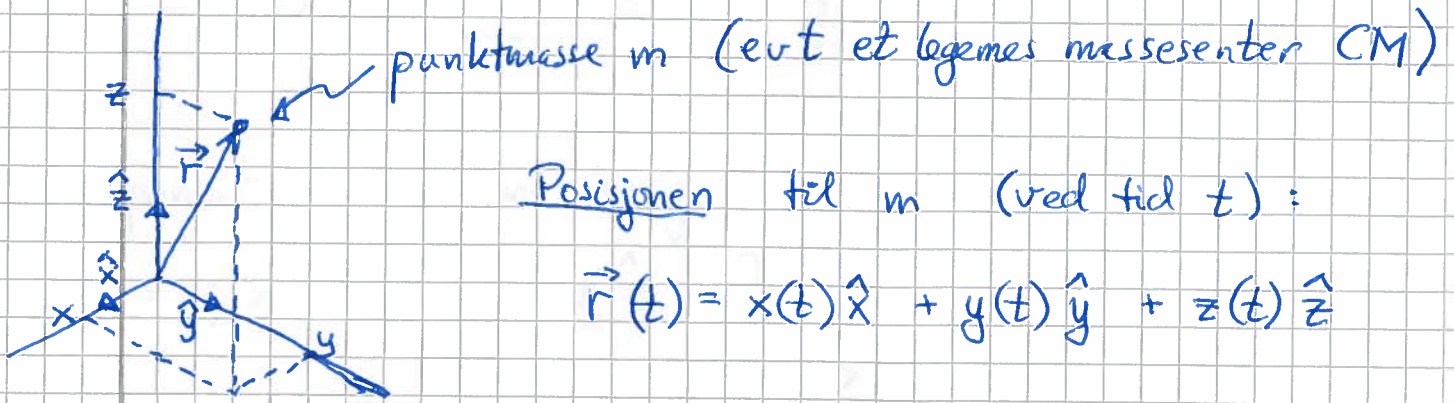
Avledete enheter for mange størrelser:

kraft $[F] = \text{kg m/s}^2 = \text{N}$

arbeid $[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$

effekt $[P] = \text{J/s} = \text{W}$

Kinematikk ("om bevegelse") [YF 2,3; LL1] (2)



punktmasse m (evt et legemes massesenter CM)

Posisjonen til m (ved tid t):

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$

Enhetsvektorer (kartesiske): \hat{x} , \hat{y} , \hat{z}

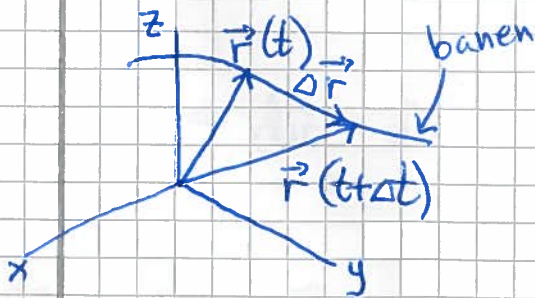
$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \quad (\text{dvs dimensjonsløse})$$

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$$

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \dots = 0$$

\vec{r} som funksjon av t beskriver bevegelsen til m :



Forflytning i løpet av Δt :

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

Hastighet $\stackrel{\text{(def)}}{=} \text{Forflytning pr tidsenhet}$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$\Rightarrow \vec{v} \parallel \Delta \vec{r}$, tangent til banen ($\Delta t > 0$ er skaler)

Akkselerasjon $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Hastighetsendring pr tidsenhet:}$ (3)

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

Komponentvise sammenhenger:

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_x = \dot{x} \text{ etc}$$

Tilsvarende: $a_x = \ddot{x} = \dot{v}_x$ etc

Integrasjon gir \vec{r} fra \vec{v} og \vec{v} fra \vec{a} :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt \Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t) dt}$$

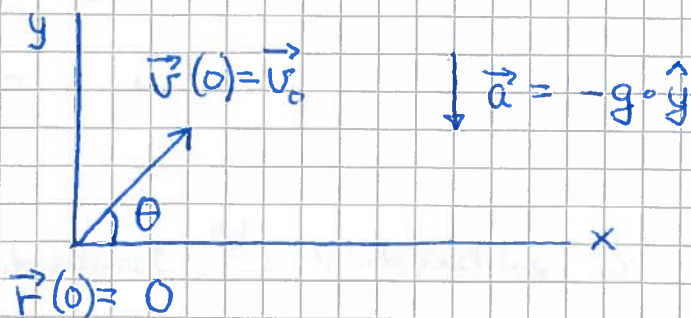
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a} dt \Rightarrow \dots \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t) dt$$

Enklere hvis $\vec{a} = \text{konstant}$:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t ; \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

(når vi har initialbetingelsene $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ og $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$)

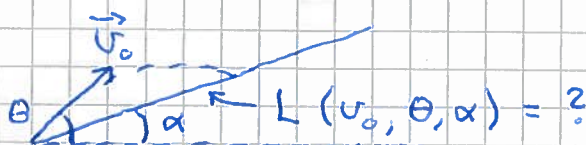
Eks: Skrått kast



$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 = \hat{x} \left(v_0 t \cos \theta \right) + \hat{y} \left(v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 \right)$$

\Rightarrow banen $y(x)$ er parabel (eliminer t !)

Øving 1: • Kast i motbakke

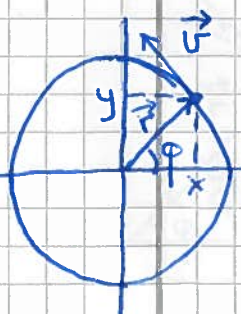


(Prosjektide!) P

• Med kjent $a(v)$ kan $v(t)$ bestemmes slik:

$$dt = dv/a \Rightarrow t = \int_{v_0}^v dv/a(v)$$

Sirkelberegelse [YF 3.4; LL 1.7, 1.8]



Polarkoordinater (r, φ) :

r = avstand fra origo (her konstant)

φ = vinkel mellom x -akten og \vec{r} ($\varphi > 0$ mot klokka)

Fra figur:

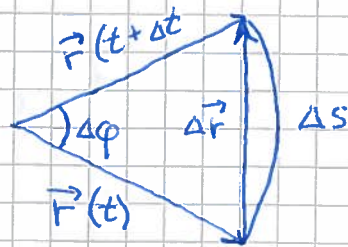
$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \tan \varphi = y/x, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{r} = \hat{x} r \cos \varphi + \hat{y} r \sin \varphi$$

Vinkel $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Buelengde} / \text{radius}$

$$\Delta\varphi = \Delta s / r$$

$$[\varphi] = 1$$



(5)

Vinkelhastighet $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Vinkelendring pr tidsenhet}$

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad [\omega] = \text{s}^{-1}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta r = \Delta s = r \Delta\varphi \Rightarrow \underline{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \Delta\varphi}{\Delta t} = \underline{r\omega}$$

$$\text{Retning: } \underline{v} \parallel \Delta\vec{r}, \quad \Delta\vec{r} \perp \vec{r} \Rightarrow \boxed{\underline{v} \perp \vec{r}}$$

Akselerasjon ved sirkelbevegelse:

Anta først ω konstant (uniform sirkelbevegelse) og $\varphi(0) = 0$

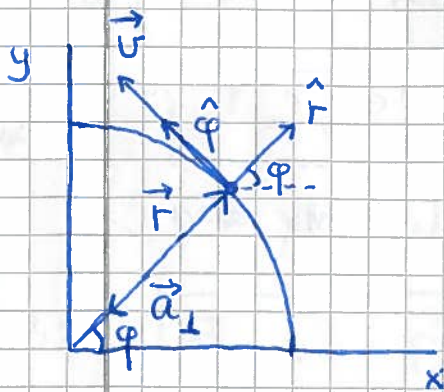
$$\Rightarrow \varphi(t) = \omega t \Rightarrow \vec{r}(t) = \hat{x} r \cos \omega t + \hat{y} r \sin \omega t$$

$$\text{Dermed: } \vec{v}(t) = -\hat{x} \omega r \sin \omega t + \hat{y} \omega r \cos \omega t$$

$$\vec{a}_{\perp}(t) = -\hat{x} \omega^2 r \cos \omega t - \hat{y} \omega^2 r \sin \omega t = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

Sentripetalakselerasjon:

$$\boxed{\vec{a}_{\perp} = -\omega^2 \vec{r}}$$



$$\vec{r} = r \hat{r}, \quad \vec{v} = v \hat{\varphi}$$

$$\vec{a}_{\perp} = -\omega^2 r \hat{r} = -\frac{v^2}{r} \hat{r}$$

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi$$

$$\hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$$

Hvis også v , og dermed ω , endrer seg, har vi baneakselerasjon:

$$a_{||} = \dot{v} = r \dot{\omega}$$

$$\Rightarrow \text{Total akselerasjon: } \vec{a} = \vec{a}_{\perp} + \vec{a}_{||} = -\omega^2 r \hat{r} + r \dot{\omega} \hat{\phi}$$

$$\text{Vinkelakselerasjon: } \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\phi}, \quad [\alpha] = s^{-2}$$

$$\text{Periode = tid pr omløp: } T, \quad [T] = s$$

$$\text{Frekvens = antall omløp pr tidsenhet: } f, \quad [f] = \text{Hz} = s^{-1}$$

Dermed:

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \quad T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Newtons lover [YF 4,5 ; LL 2,3]

3 empiriske lover:

N1:
$$\vec{F} = 0 \iff \vec{v} = \text{konst.}$$

Hvis netto ytre kraft \vec{F} på et legeme er null, forblir det i ro eller i retlinjet bevegelse med konst. hastighet \vec{v}

N2:
$$\vec{F} = m\vec{a}$$
 Legemets akselerasjon er prop. med netto ytre kraft, $\vec{a} = \vec{F}/m$; $m = \text{legemets masse}$

N3:
$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$
 Hvis A virker på B med \vec{F}_{AB} , virker B på A med $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$.

Krefter er vekkelvirksomheter mellom legemer.

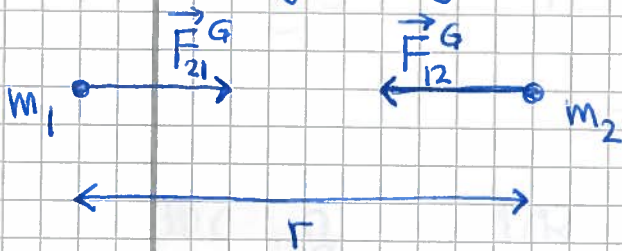
SI-enhet: $[F] = \text{kgm/s}^2 = \text{N}$ (newton) (7)

Fundamentale naturkrefter relevante i TFY4106: [YFS.5; LL 2.1]

- Gravitasjon: Svake tiltrekning mellom masser
- Elektromagnetisk: Tiltrekning og frastøtning mellom ladninger.

[Desuten svake og sterke kjernekrefter, med svært kort rekkevidde, hvor ca 10^{-18} m og 10^{-15} m. Relevant for hvor radioaktivitet og stabilitet av atomkjerner.]

Newton's gravitasjonslov:

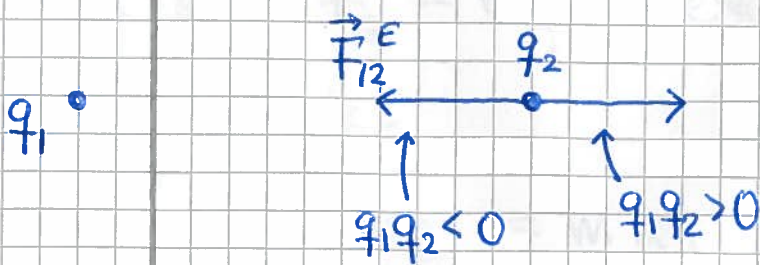


$$F_{21}^G = F_{12}^G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

(gravitasjonskonstanten)

Coulombs lov:



$$F_{12}^E = F_{21}^E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

(ϵ_0 = vakuumpermittiviteten)

Mellom to elektroner er $F_E \gg F_G$ ($m_e \sim 10^{-30}$ kg, $q = e \sim 10^{-19}$ C):

$$\frac{F_E}{F_G} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G m_e^2} \approx 10^{43} !$$

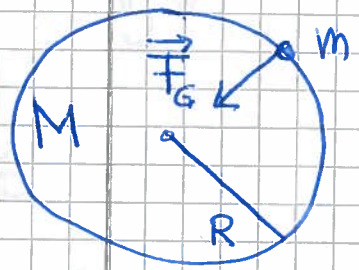
Mellom to himmellegemer: Ujevne g_1 og g_2 , men $F_G \gg F_E$

Mellom dagligdagse objekter: $F_E \gg F_G$ (selv om $g \approx 0$)

Fra jorda på dagligdagse objekter: Tyngden F_G

\Rightarrow Både F_E og F_G styrer hverdagen vår!

Tyngde [VF 4.4; LL 2.5]



Tiltrekkende kraft på m fra M (=jorda):

$$F_G = GM/R^2 \approx m \cdot \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(6.37 \cdot 10^6)^2}$$

$$= m \cdot g$$

der $g = GM/R^2 \approx 9.81 \text{ m/s}^2 =$ tyngdens akselerasjon

Hvis fritt fall:

Da er $F_G = mg$ eneste kraft som virker på m .

N2 gir da:

$$mg = ma, \text{ ders } \underline{\underline{a = g = 9.81 \text{ m/s}^2}}$$

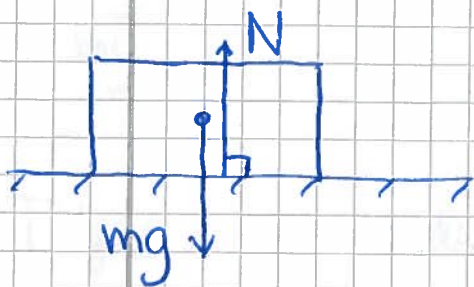
Kontaktkrefter

[YF 4.1 ; LL 3]

⑨

= elektrostatiske krefter ("coulombkrefter")
mellom to legemer i nærkontakt

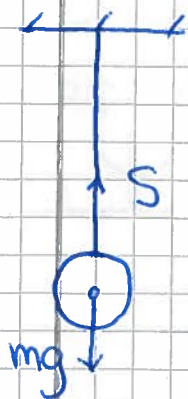
Normalkraft:



N = netto frastøtende kraft fra
underlaget på klossen (\perp grenseflaten)

Hvis kloss i ro: $N = mg$ (N1)

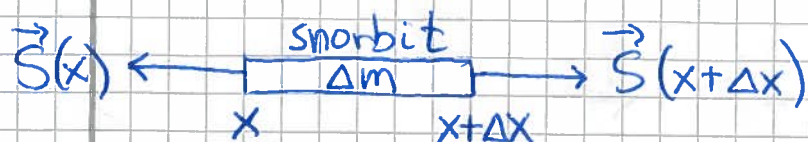
Snorkraft:



S = netto tiltrekkende kraft fra
snor på kula

Hvis kule i ro: $S = mg$ (N1)

Lette (\approx masseløse) snorer har (ofte) konstant snordrag:

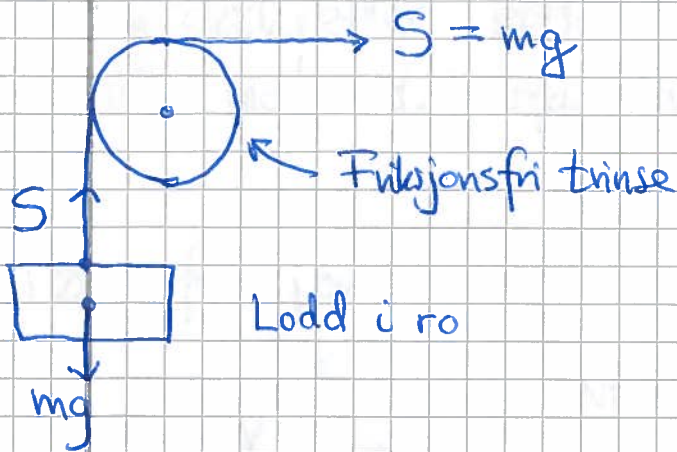


$$N2: \vec{S}(x+\Delta x) + \vec{S}(x) = \Delta m \cdot \vec{a}$$

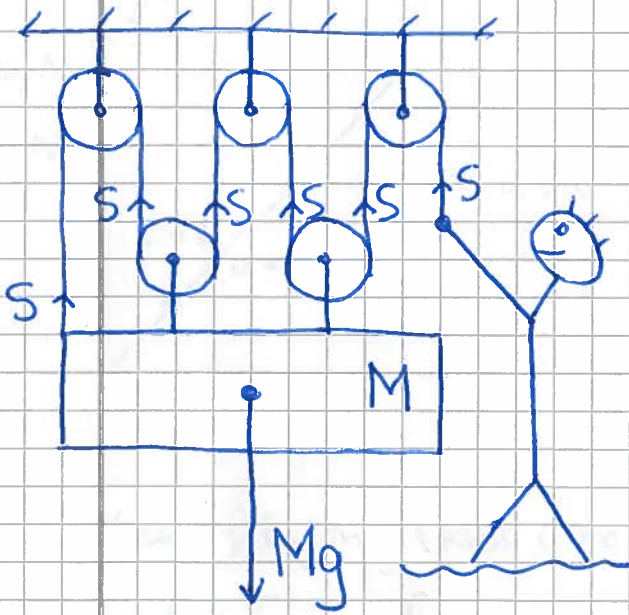
\Rightarrow Hvis $\Delta m \approx 0$ (evt $\vec{a} = 0$), er $\vec{S}(x+\Delta x) = -\vec{S}(x)$

Trinser kan endre retningen på \vec{S} :

(10)



Taljer kan redusere nødvendig løftekraft:



Hvis kasse i ro: $Mg = 5S$

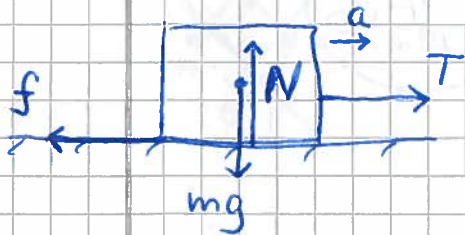
$$\Rightarrow \underline{S = Mg/5}$$

Friksjonskrefter [YF 5.3; LL 3.1]

(11)

= kontaktkrefter rettet mot relativ bevegelse, evt. mot rel. beveg. som vil oppstå uten friksjon.

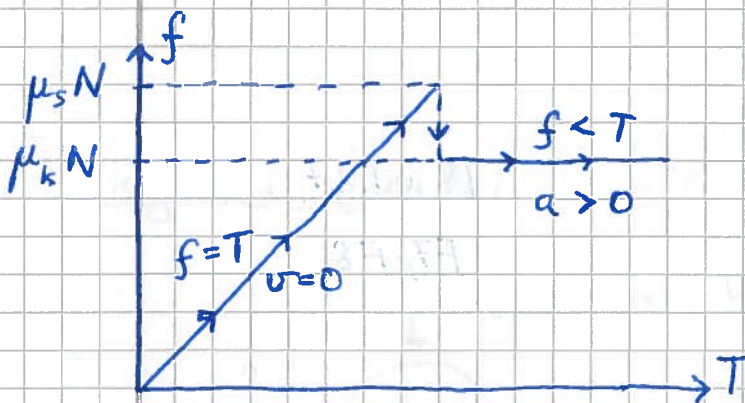
Tørr friksjon:



$N \perp$ vertikalt $\Rightarrow N = mg$

f = friksjonskraft fra underlag på kloss. (tangentielt til kontaktflaten)

Forsøk med økende trekk-kraft T ($N2 \Rightarrow f = T - ma$) gir:



- Statisk friksjon (kloss i ro, $v = 0$):

$$f = T, \quad f_{\max} = \mu_s N, \quad \text{dus } f \leq \mu_s N$$

μ_s = statisk friksjonskoeffisient

- Kinetisk friksjon (relativ bevegelse mellom kloss og underlag i kontaktflaten, $v > 0$):

$$f = \mu_k N$$

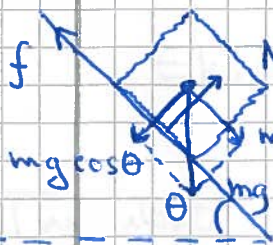
- Ujevnheter i kontaktflaten gir "best grep" i statisk tilfelle $\Rightarrow \mu_s > \mu_k$ (som regel)

Eks, tallverdier:

Tre mot tre: $\mu_s \approx 0.5$, $\mu_k \approx 0.3$

Stål mot is: $\mu_s \approx 0.03$, $\mu_k \approx 0.015$

Våt svamp mot laminat:



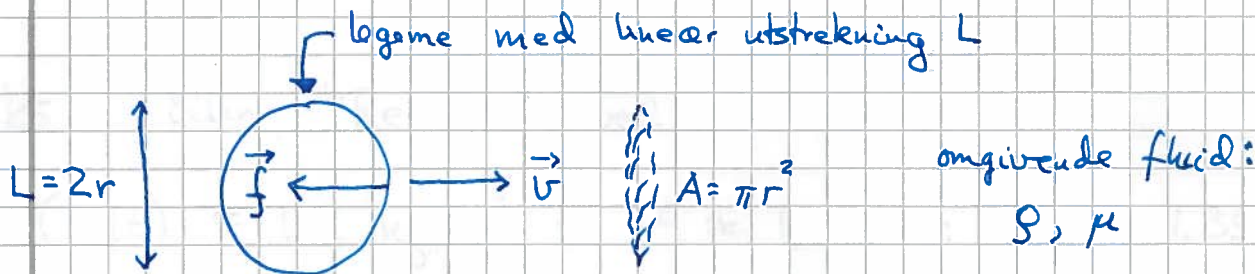
$N = mg \cos \theta$ ($N \perp$ skråplanet)

$N \parallel$ skråplanet: $f = mg \sin \theta$

$\Rightarrow f_{max} = mg \sin \theta_{max} = \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta_{max}$

$\Rightarrow \mu_s = \tan \theta_{max} \approx 19$

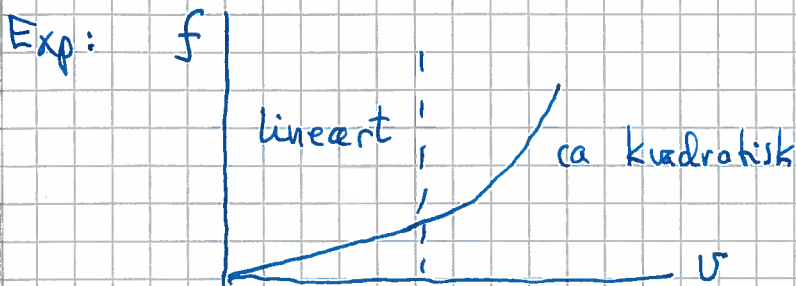
Friksjon i fluider [YFS.3 ; LL 8]



ρ = masse tetthet (kg/m^3)

μ = dynamisk viskositet ($kg/m \cdot s$) (pga friksjon mellom fluiddelagene)

Reynoldstallet (dim. løst): $Re = \rho v L / \mu$



Laminær (pen, "lagdelt") strømning av fluidet omkring (det symmetriske) legemet når $Re \leq 10$, dvs når v er "liten nok":

$$\vec{f} = -k \vec{v} \quad (= -k v \hat{v})$$

Eks: Kule, radius r : $k = 6\pi \mu r$ (Stokes' lov)

Turbulent (uordnet, med "virvler") strømning når $Re > 10$:

$$\vec{f} = -D v^2 \hat{v} ; \quad D = \frac{1}{2} \rho A C_d$$

C_d = drag-koeffisienten (≈ 0.5 for kule)

Eks: Bilen "Revolve" ved 60 km/h.

$$\rho (\text{luft}) \approx 1.2 \text{ kg/m}^3 ; \quad A \approx 1.1 \text{ m}^2 ; \quad C_d \approx 1.35$$

$$\Rightarrow f \approx \frac{1}{2} \cdot 1.2 \cdot 1.1 \cdot 1.35 \cdot \left(\frac{60}{3.6}\right)^2 \text{ N} \approx \underline{248 \text{ N}}$$

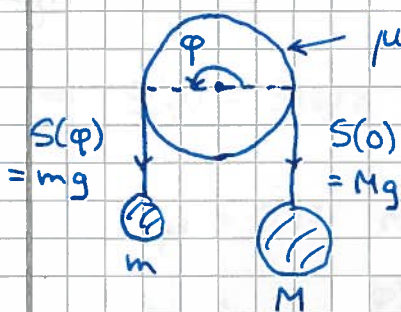
Problemløsning med Newtons lover [YFS; LL3]

(14)

- Finn alle ytre krefter \vec{F}_i på legemet
- Fritt-legeme-diagram: Erstatt omgivelsene med krefter på legemet ($m\vec{g}$, \vec{S} , \vec{N} , \vec{f} ...)
- Velg koord. system. Dekomponer.
- Bruk N2, $\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i / m$, evt. N1, $\sum_i \vec{F}_i = 0$

Eks: Snorfiksjon (vanskelig...)

(jf "Med livet som innsats", youtube, nrk)



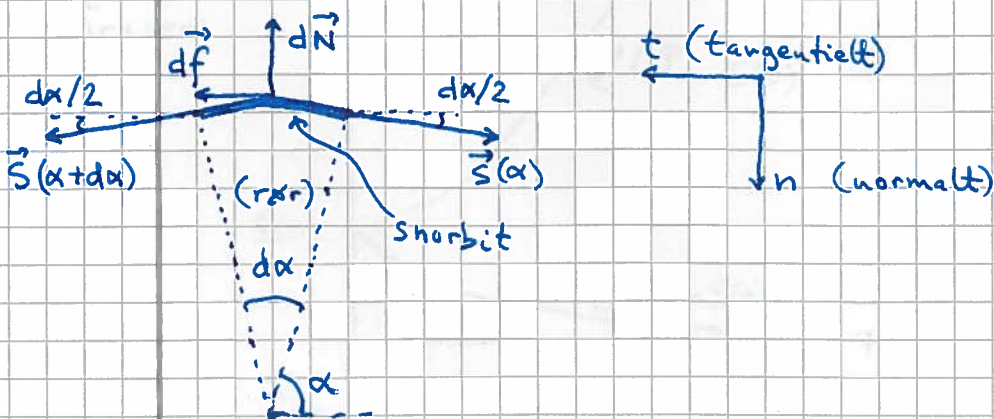
μ = statisk friksjonskoeff. mellom snor og rør

φ = kontaktvinkel

Her: $\varphi = \pi + 2\pi n$; $n = 0, 1, 2, \dots$

Bestem minste m som holder M oppe!

Siden snordraget \vec{S} ikke er konstant, bruker vi N1 på en liten snorbit som går over vinkelen $d\alpha$:



Krefter på snorbiter: $df_{max} = \mu dN$ gir minste m

$$\underbrace{\vec{S}(x+dx) + \vec{S}(x)}_{\text{fra resten av snora}} + \underbrace{d\vec{N} + d\vec{f}}_{\substack{\text{normalkraft og} \\ \text{friksjon fra røret}}} \stackrel{N!}{=} 0$$

Dekomponerer (med $df = \mu dN$)

$$(t) [S(x+dx) - S(x)] \cos \frac{d\alpha}{2} + \mu dN = 0$$

$$(n) [S(x+dx) + S(x)] \sin \frac{d\alpha}{2} - dN = 0$$

$$d\alpha \ll 1 \Rightarrow \cos \frac{d\alpha}{2} \approx 1, \quad \sin \frac{d\alpha}{2} \approx d\alpha/2$$

$$\text{og: } S(x+dx) - S(x) = dS, \quad S(x+dx) + S(x) = 2S$$

Dermed:

$$(t) dS = -\mu dN \quad (n) S d\alpha = dN$$

$$(t)/(n) \Rightarrow dS/S = -\mu d\alpha$$

$$\text{Integrasjon fra } \alpha=0 \text{ til } \alpha=\varphi \Rightarrow \ln \frac{S(\varphi)}{S(0)} = -\mu\varphi$$

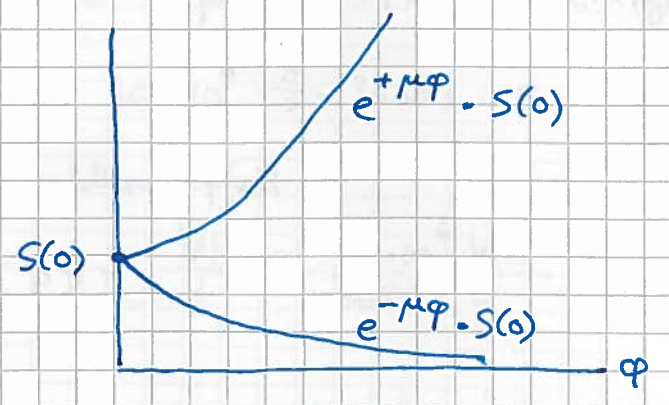
$$\Rightarrow \underline{S(\varphi) = S(0)e^{-\mu\varphi}}$$

$$\text{Eks, t\&u: } \mu = 0.17, \quad M = 500g, \quad \varphi = 7\pi$$

$$\Rightarrow \frac{m}{M} = \frac{S(\varphi)}{S(0)} = e^{-0.17 \cdot 7\pi} = 0.024 \Rightarrow m = 12g$$

$$\text{Minste m for \& heise M opp: } m/M = e^{+0.17 \cdot 7\pi} \Rightarrow m = 21kg$$

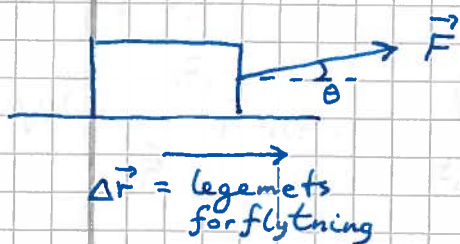
Grafer:



Arbeid og energi [YF 6,7 ; LL 4]

(16)

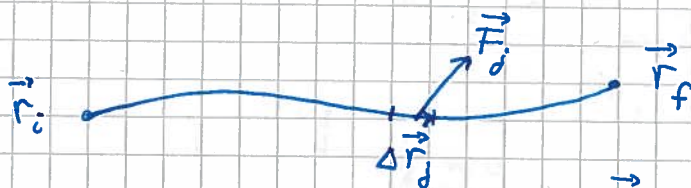
Arbeid [YF 6.1-6.3 ; LL 4.1]



arbeid $\stackrel{\text{def}}{=} \text{kraft} \times \text{forflytning}$
 $\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta$
 $= \text{arb. utført av ytre kraft } \vec{F}$

Enhet: $[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$ (joule)

Generelt:



$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \stackrel{\Delta \vec{r}_j \rightarrow 0}{=} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$= \text{arb. utf. av } \vec{F} \text{ ved forflytn. fra } \vec{r}_i \text{ til } \vec{r}_f$

Effekt [YF 6.4 ; LL 4.1]

$\stackrel{\text{def}}{=} \text{arbeid (evt. energi) pr. tidsenhet}$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad [P] = \text{J/s} = \text{W (watt)}$$

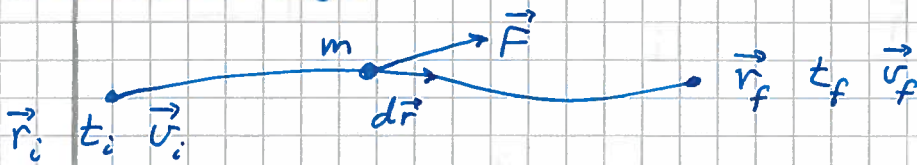
Eks: Årsforbruk på 30 MWh el.energi

er $30 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 3600 \text{ s} = \underline{\underline{108 \text{ GJ}}}$

og midlere effekt er

$$\langle P \rangle = \frac{W}{t} = \frac{30 \cdot 10^6 \text{ Wh}}{365 \cdot 24 \text{ h}} \approx \underline{\underline{3.4 \text{ kW}}}$$

Kinetisk energi [YF 6.2; LL 4.2]



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$d(v^2) = d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = d\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{v} = 2\vec{v} \cdot d\vec{v} \Rightarrow \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} d(v^2)$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \int_{v_i}^{v_f} d(v^2) = \underline{\underline{\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2}}$$

Kinetisk energi: $K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2$

$$\Rightarrow \boxed{W = K_f - K_i = \Delta K}$$

(Netto) Arbejd W udført på legemet tilsvarende endringen ΔK i legemets kin. energi.

Konservativt system [YF 7.3; LL 4.4]

I et kons. system virker kun kons. kræfter.

Da tages ikke mek. energi til andre energiformer (varme etc)

Antag $\vec{r}_f = \vec{r}_i$ (lukket kurve) og $K_f = K_i$, dvs $\Delta K = W = 0$

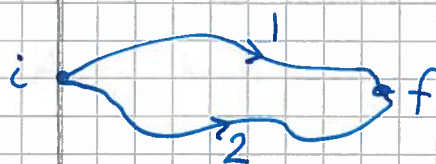


$$\Rightarrow \boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0}$$

Da er \vec{F} en konservativ kraft!

Hvis \vec{F} er kons., er W uavh. av veien :

(18)


$$W_j = \left[\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right]_j \quad j=1,2$$

$$0 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \underbrace{\left[\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right]_1}_{= W_1} + \underbrace{\left[\int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} \right]_2}_{= -W_2} = W_1 - W_2$$

$$\Rightarrow \underline{W_1 = W_2} \quad (\text{qed})$$

Potensiell energi [YF 7.1-7.4; LL 4.3-4.4]

Anta kons. \vec{F} . Da er

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

(pr def) den potensielle energien i pos. \vec{r} , der vi har valgt $U(\vec{r}_0) = 0$.

NB: Valget av \vec{r}_0 har ingen fysisk betydning.

Kun forskjeller i pot. energi har fysisk betydning.

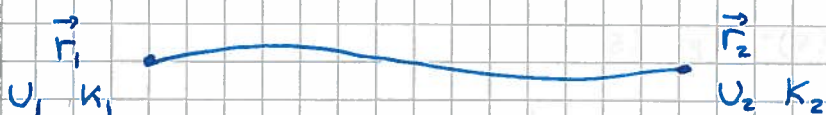
Med kons. \vec{F} gjelder (se Matematikk 2)

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \nabla \times \vec{F} = 0$$

$$U = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\Leftrightarrow) \quad \vec{F} = - \nabla U$$

Bevarelse av mekanisk energi [YF 7.1-7.3; LL 4.5]

Anta kons. system.



$$U_1 - U_2 = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \left(- \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W = K_2 - K_1$$

$$\Rightarrow \boxed{K_1 + U_1 = K_2 + U_2}$$

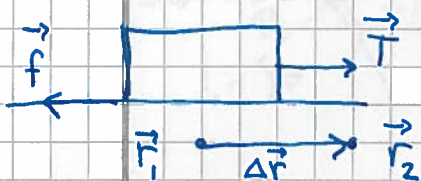
Dvs:

I et kons. system er total mekanisk energi
 $E = K + U$
 bevart.

Kons. krefter: Tyngdekraft. Coulombkraft.

Friksjonskrefter er ikke konservative.

Friksjonsarbeid [YF 7.3; LL 4.5]



$$W_f = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \quad \text{fordi } \vec{f} \text{ alltid er rettet mot } d\vec{r}$$

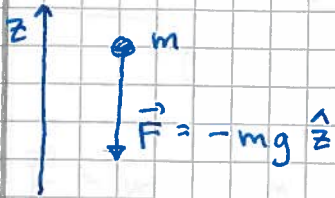
⇒ Mek. energi tapes/omdannes til varme, lyd etc.

Hvis $\vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ alltid, er $\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$

der \vec{f} kan ikke være konservativ.

Eks 1: Fritt fall i tyngdefeltet.

(20)



Slippes fra $z=0$ med $v(0)=0$

og valget $U(0)=0$.

Finn $U(z)$ og $v(z)$ (uten luftmotstand)

Løsn 1: $U(z) = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_0^z (-mg\hat{z}) \cdot (\hat{z} dz) = \underline{\underline{mgz}}$

Bevart E $\Rightarrow U(z) + K(z) = U(0) + K(0) = 0$

$\Rightarrow mgz + \frac{1}{2}mv(z)^2 = 0$

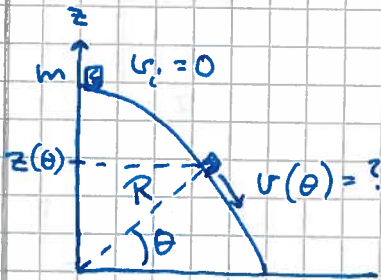
$\Rightarrow \underline{\underline{v(z) = \sqrt{-2gz}}}$ ($z < 0$)

Eks 2: Hva blir terminalhastigheten v_t i Eks 1 hvis bordtennisball?

Løsn 2: $f = Dv^2$ med $D = \frac{1}{2}\rho A C_d = \frac{1}{2} \cdot 1.3 \cdot \pi \cdot (0.020)^2 \cdot 0.5 \text{ kg/m}$
 $\approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}$

$N1 \Rightarrow Dv_t^2 = mg \Rightarrow v_t = \sqrt{mg/D} = \sqrt{0.0027 \cdot 9.8 / 4 \cdot 10^{-4}} \approx \underline{\underline{8 \text{ m/s}}}$

Eks 3: På glatt kuppel (tak)



Velg (f.eks) $U(0)=0 \Rightarrow E = U(R) = mgR$

$\Rightarrow \frac{1}{2}mv(\theta)^2 + mg \underbrace{z(\theta)}_{=R\sin\theta} = mgR$

$\Rightarrow \underline{\underline{v(\theta) = \sqrt{2gR(1-\sin\theta)}}$

• Øv 3: Hvor måler m kontakten med underlaget? ($N=0$)

• Hvordan ta hensyn til friksjon?

• Hva med objekter som ruller?

} Numerikk påkrevd...

Impuls [YF 8 ; LLS]

(21)

(= bevegelsesmengde = driv = ... = (linear) momentum) eng.
↓

N2: $\vec{F} = m \vec{a} = m d\vec{v}/dt = d(m\vec{v})/dt$ nær $m = \text{konst.}$

impuls $\stackrel{\text{def}}{=} \text{masse} \times \text{hastighet}$

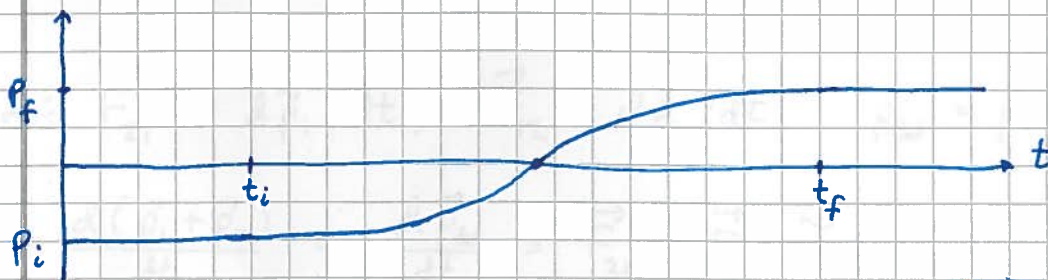
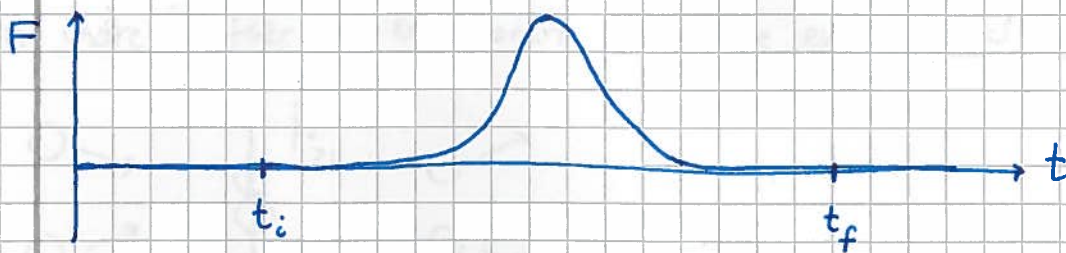
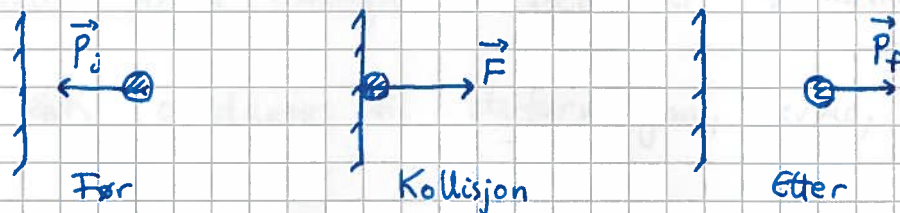
$$\vec{p} = m \vec{v}, \quad [p] = \text{kg m/s}$$

Dermed blir N2: $\vec{F} = d\vec{p}/dt$

⇒ Prinsippet om impulsbevarelse:

Hvis $\sum \vec{F}_{\text{ytre}} = 0$, er systemets totale impuls bevart

Eks: Ball mot vegg



$$d\vec{p} = \vec{F}(t) dt \Rightarrow \vec{p}(t) = \vec{p}_i + \int_{t_i}^t \vec{F}(t) dt$$

Total impulsendingring:

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt$$

Eks: F/G for bordtennisball.

Løsn: Anta $v_i \sim -10 \text{ m/s}$, $v_f \sim +40 \text{ m/s}$, $\Delta t \sim 2 \text{ ms}$ og $F(t) \approx \text{konstant}$

$$\Rightarrow F/G = m(\Delta v / \Delta t) / mg \approx (50 \text{ m/s} / 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}) / 10 \text{ m/s}^2 = \underline{\underline{2500}}$$

$\Rightarrow F \gg G$ i kortvarige kollisjoner \Rightarrow OK å negligere ytre krefter som f.eks. G i løpet av kollisjonen!

Kollisjoner [YF 8.3, 8.4 ; LL S.3]

Elastisk kollisjon: Mek. energi bevart ($\Delta E = \Delta K = 0$)

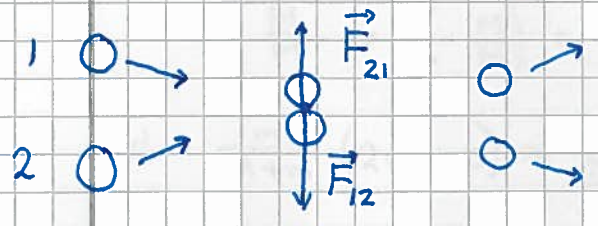
Uelastisk " " : " " " ikke bevart ($\Delta K < 0$)

[Kortvarige kollisjoner ved gitt posisjon $\Rightarrow \Delta U \approx 0 \Rightarrow \Delta E \approx \Delta K$]

Fullstendig uelastisk kollisjon: Legemene henger sammen etter koll. med felles hastighet. Dette gir maksimal $|\Delta K|$.

[Tapt ΔK omdannes til deformasjon, varme, lyd]

Men indre krefter i kollisjonen vil ikke endre total impuls:



$$N2: \vec{F}_{21} = d\vec{p}_1 / dt, \quad \vec{F}_{12} = d\vec{p}_2 / dt, \quad \vec{p}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

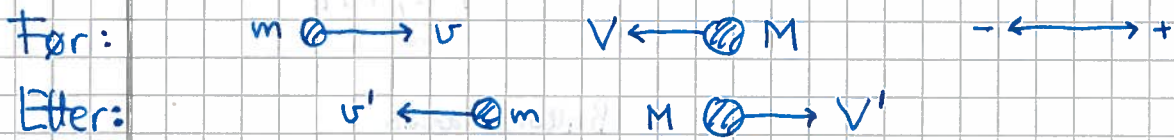
$$\Rightarrow \frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} \stackrel{N3}{=} \vec{F}_{21} - \vec{F}_{21} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{p}_{tot} = \text{konst.}}}$$

Sentralt støt

[YF 8.2-8.4; LL 5.3]

(23)



Impulsbevarelse $\Rightarrow mv + MV = mv' + MV'$

a) Fullstendig uelastisk kollisjon: $v' = V' = \frac{mv + MV}{m + M}$

b) (Delvis) Uelastisk: 1 ligning, 2 ukjente \Rightarrow Ubestemt

c) Elastisk: $\Delta K = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2$
 $\Rightarrow m(v+v')(v-v') = M(V'+V)(V'-V)$ ①

$\Delta p = 0 \Rightarrow m(v-v') = M(V'-V)$ ②

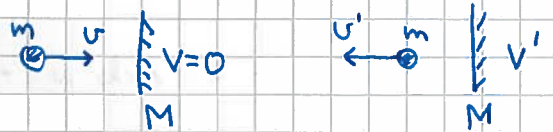
①/② $\Rightarrow v+v' = V'+V$ ③

$M \cdot ③ - ② \Rightarrow \dots \Rightarrow$
 $v' = \frac{M}{m+M} \left(2V + v \frac{m-M}{M} \right)$
 $V' = \frac{m}{M+m} \left(2v + V \frac{M-m}{m} \right)$

Eks: Ball (m) mot vegg ($M \gg m$), elastisk kollisjon

$$v' = \frac{M}{m+M} \left(0 + v \frac{m-M}{M} \right)$$

$$\approx \frac{M}{M} \cdot v \cdot \left(-\frac{M}{M} \right) = -v$$



$$V' = \frac{m}{M+m} (2v + 0) \approx \frac{m}{M} \cdot 2v \quad (\approx 0)$$

Impulsbevarelse?

$$p = mv, P = MV = 0, p' = mv' = -mv, P' = MV' \approx M \frac{m}{M} 2v = 2mv \quad \text{OK!!}$$

Energi bevarelse?

$$K_m = \frac{1}{2}mv^2, K_M = \frac{1}{2}MV^2 = 0, K_m' = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}mv^2, K_M' = \frac{1}{2}MV'^2 = \frac{M}{2} \left(\frac{2mv}{M} \right)^2$$
$$= \frac{1}{2}mv^2 \cdot \frac{4m}{M} \approx 0$$

OK!!

Rakettprinsipp

[YF 8.6; LL 5.4]

(24)



Målt i et referansesystem i ro er: v = rakettenes hastighet ($v > 0$)
 v_e = eksosens " " "

Målt relativt raketten er eksosens hastighet u ($u < 0$) ($u = \text{konst.}$)

$$\Rightarrow v_e = u + v$$

Rakettenes masseendring pr tidsenhet: $dm/dt = \dot{m} < 0$

Anta først $F_{\text{ytre}} = 0$, slik at $dp/dt = 0$. [Til slutt: $F_{\text{ytre}} = -mg$]

Rakett ved tid t : $m(t) \rightarrow v(t)$ $p(t) = m(t)v(t)$

Samme system ved tid $t+dt$:

$$v_e(t+dt) \leftarrow \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} m(t+dt) \\ \vdots \end{array} \rightarrow v(t+dt) = v(t) + dv$$
$$dm_e = -dm > 0$$

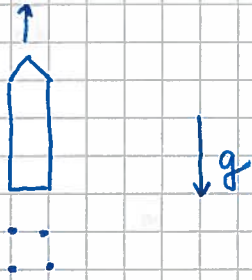
$$p(t+dt) = m(t+dt) \cdot v(t+dt) + dm_e \cdot v_e(t+dt)$$
$$= [m(t) + dm] \cdot [v(t) + dv] - dm \cdot [u + v(t) + dv]$$
$$= m(t)v(t) + m(t)dv - u dm$$
$$= p(t) + m(t)dv - u dm$$

$$\text{Isolert system} \Rightarrow p(t+dt) = p(t) \Rightarrow m dv - u dm = 0$$

$$\Rightarrow m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} = u \dot{m}, \text{ som "ligner på } N^2$$

$$\text{dvs } m \cdot a = F_{\text{skjv}}, \text{ med skjvraft } F_{\text{skjv}} = u \dot{m} > 0$$

Ved f.eks. oppskyting i tyngdefeltet kommer $F_{ytte} = -mg$ i tillegg: (25)



\Rightarrow N2 for ("rest"-) raketten:

$$F = ma$$

med total kraft

$$F = F_{ytte} + F_{skyr} = -mg + u \dot{m}$$

$$\text{Ør. 4: } m \frac{dv}{dt} = -mg + u \frac{dm}{dt} \quad / \cdot dt/m$$

$$\Rightarrow \int dv = - \int g dt + u \int \frac{dm}{m} \quad \text{osv.}$$

Så langt: Punktmasser, evt. ren translasjon av stive legemer.

I neste omgang: Partikkelsystemer. Stive legemer, rotasjon.

Men først: Litt om numerisk løsning av N2; Eulermetoden.

Anta krefter og beregelse i 1D, langs x-aksen.

$$\text{N2: } F = m \frac{dv}{dt} \approx m \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \Delta v = (F/m) \Delta t \quad ; \quad \Delta x = v \Delta t$$

$$\text{Startbetingelser: } x_0 = x(0), \quad v_0 = v(0)$$

$$\text{Notasjon: } x_j = x(t_j) = x(j \cdot \Delta t), \quad v_j = v(t_j) = v(j \cdot \Delta t) \quad ; \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 + v_0 \Delta t \quad ; \quad v_1 = v_0 + \frac{F_0}{m} \Delta t$$

$$x_2 = x_1 + v_1 \Delta t \quad ; \quad v_2 = v_1 + \frac{F_1}{m} \Delta t$$

$$\vdots$$
$$x_{j+1} = x_j + v_j \Delta t \quad ; \quad v_{j+1} = v_j + \frac{F_j}{m} \Delta t$$

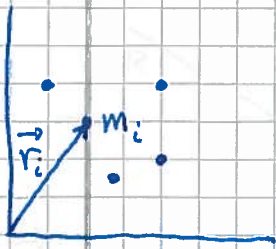
\Rightarrow M2 typiske løses med en for-løkke eller while-løkke

i Matlab og Python.

Massecenter [YF 8.5 + oppg 8.115/116; LL 5.6, 5.8, 6.1]

(26)

(= tyngdepunkt når g er like stor i hele systemet)



Massecenter (CM) for N punktmasser

m_1, m_2, \dots, m_N i pos. $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \quad ; \quad M = \sum_i m_i = \text{total masse}$$

Hvis kontinuerlig massefordeling: $m_i \rightarrow \Delta m_i \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} dm$

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm \quad ; \quad M = \int dm$$

Masseelementet $dm = \rho dV$ (3D); σdA (2D); λdl (1D)

der $\rho, \sigma, \lambda =$ masse pr hhv volum-, flate-, lengdeenhet

$dV, dA, dl =$ hhv volum-, flate-, lengdeelement

Har ofte uniform massefordeling; da er $\frac{dm}{M} = \frac{dV}{V}$ osv

Eks 1: Potensiell energi i tyngdefeltet



Velg $U(0) = 0$

$$\Rightarrow U = \int dU = \int gy dm = g \int y dm = \underline{\underline{gMY_{CM}}}$$

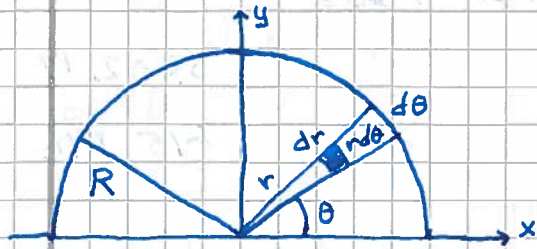
Med andre ord: Total pot. energi U som om hele massen

$M = \int dm$ var samlet i høyden $Y_{CM} = (\int y dm) / M$,

f.eks. i \vec{R}_{CM} .

Eks 2: Tynn skive, halvsirkel

(27)



$X_{CM} = 0$ pga symmetri

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{A} \int y dA \quad \left(\frac{dm}{M} = \frac{dA}{A} \right)$$

$$dA = dr \cdot r d\theta, \quad A = \frac{1}{2} \pi R^2, \quad y = r \sin \theta,$$

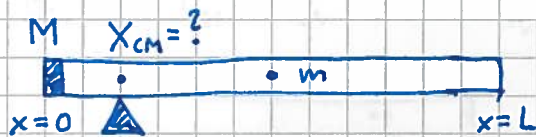
$$0 < r < R, \quad 0 < \theta < \pi$$

$$\Rightarrow Y_{CM} = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi r \sin \theta dr r d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{3} R^3 \cdot 2 = \frac{4R}{3\pi} \approx \underline{\underline{0.42R}}$$

[Vis selv at $Y_{CM} = \frac{2R}{\pi}$ for "bølge" (1D) og $Y_{CM} = \frac{3R}{8}$ for halvkule (3D)]

Eks 3: Rør m/lodd i enden



$$m = 165g, \quad M = 305g$$

Røret (m) effektivt som m på midten

$$\Rightarrow X_{CM} = \frac{M \cdot 0 + m \cdot L/2}{M+m} = \frac{165}{940} L \approx \underline{\underline{0.18L}}$$

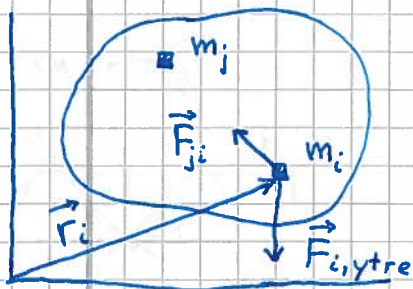
Evt:

$$X_{CM} = \frac{L}{M+m} \left\{ M \cdot 0 + \underbrace{\int_0^L x \cdot \frac{dm}{L}}_{= mL/2} \right\} = \underline{\underline{\frac{mL}{2(M+m)}}}$$

Tyngdepunktbevegelsen [YF 8.5 ; LL 5.8]

(28)

Forsøk (kast) med plastrør og lodd antyder at CM beveger seg som om hele M var samlet i CM. Vi beviser dette:



$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i ; \quad M = \sum_i m_i$$

N2 for m_i :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{\text{total indre kraft p\u00e5 } m_i}$$

total ytre kraft p\u00e5 m_i

total indre kraft p\u00e5 m_i

Legg sammen N2 for alle $i = 1, 2, \dots, N$:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \sum_i m_i \vec{r}_i \right\} = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ M \vec{R}_{CM} \right\} = M \ddot{\vec{R}}_{CM}$$

$$\sum_i \vec{F}_{i,ytre} = \vec{F}_{ytre} = \text{total ytre kraft p\u00e5 hele systemet}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} + \dots + \vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N} = 0 \quad \text{pga N3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{ytre} = M \ddot{\vec{R}}_{CM}}$$

Men dette er jo N2 for en punktmasse M i posisjon \vec{R}_{CM} , utsatt for en total ytre kraft \vec{F}_{ytre} . (qed)

I tillegg til tyngdepunktbevegelsen:

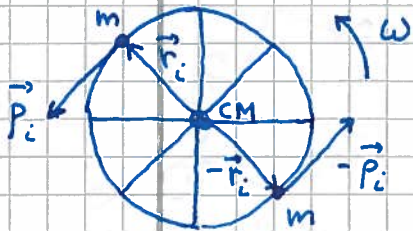
- Rotasjon om CM
 - Vibrasjon om CM
- } neste ca 3 uker

Rotasjon

[YF 9,10; LL 6 (5)]

Et par innledende betraktninger:

- Ren rotasjon



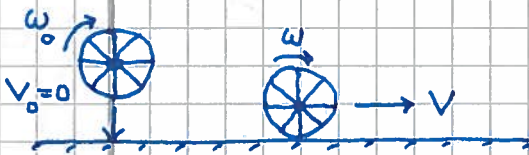
$$CM \text{ i ro} \Rightarrow K_{\text{trans}} = \frac{1}{2} M \dot{R}_{CM}^2 = 0$$

men $K_{\text{rot}} \neq 0$!

$$\text{Impuls? } \vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = 0$$

men vi har dreieimpuls !

- Rulling = translasjon + rotasjon

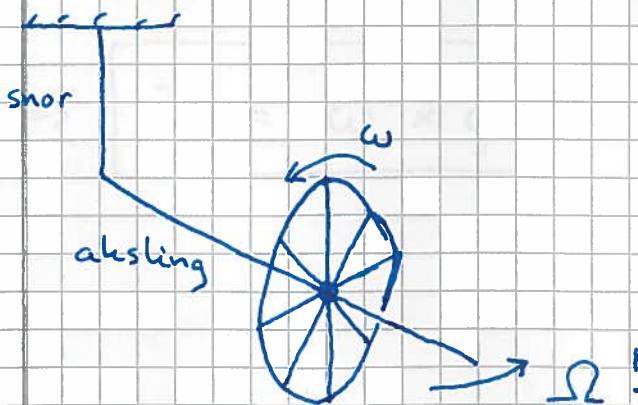


Hvilke krefter?

Hvor angriper kreftene?

Friksjonens rolle?

- Komplex dynamikk



Gyroskop
(Preesjon)

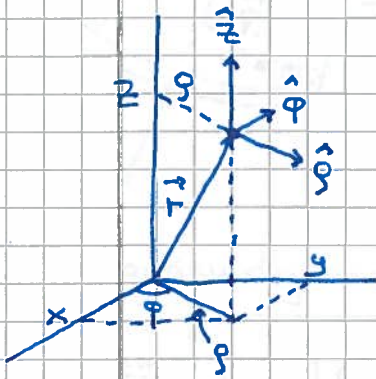
Vi ser at sirkelbevegelse (igjen!) står i sentrum!

Sirkelberegelse [YF 9.1-9.3; LL 1.8]

(30)

Antar rotasjon om z-aksen

⇒ Bruk sylinderkoordinater = polaroord. $(\rho, \varphi) + z$



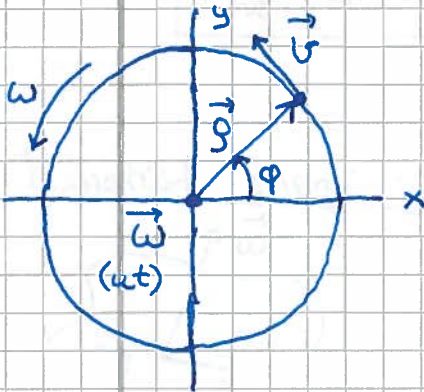
$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\varphi = y/x$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

Vinkelhastigheten $\vec{\omega}$ peker langs rotasjonsaksen:



$$\vec{\omega} = \omega\hat{z} = \omega\hat{\omega}$$

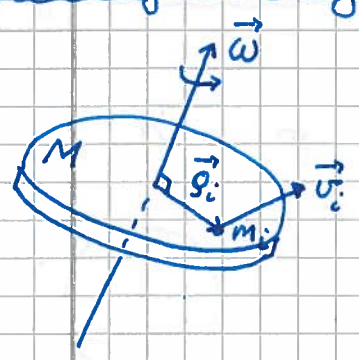
$$\vec{\rho} = \rho\hat{\rho}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\hat{\varphi} = \rho\omega\hat{\varphi}$$

Vi ser at $\hat{\varphi} = \hat{z} \times \hat{\rho}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}}$$

Rotasjonsenergi. Treghtetsmoment [YF 9.4; LL 6.4, 6.3]



$$K_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$I \stackrel{def}{=} \sum_i m_i r_i^2 =$ legemets treghtetsmoment
mhp den valgte akse

Hvis kontinuerlig massefordeling: $m_i \rightarrow \Delta m_i \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} dm$

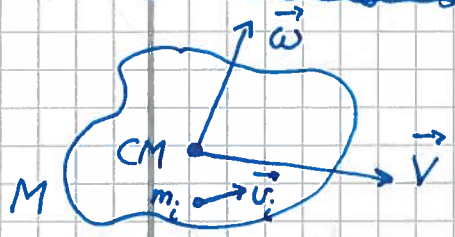
$$\Rightarrow I = \int r^2 dm$$

der $r =$ avstand fra akse til dm

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Rotasjonsenergi

Kinetisk energi for sturt legeme [YF 10.3; LL 6.6]



Fra def. $K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ finner en (etter litt regning, se notat på websiden):

$$K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

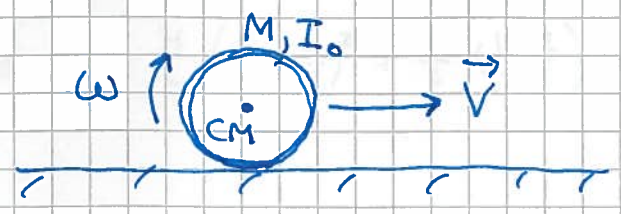
$M =$ total masse

$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM} =$ hastighet til CM

$I_0 =$ treghtetsmoment mhp rot. akse gjennom CM


$\vec{\omega} =$ vinkelhastighet om u

Eks: Rullende hjul



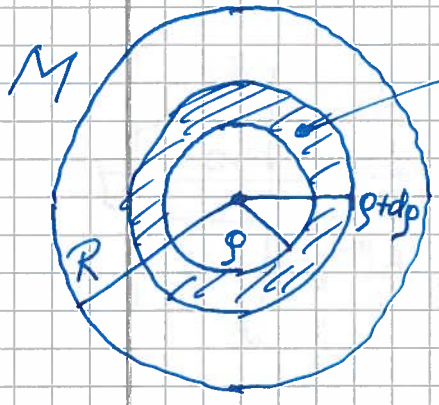
Tregghetsmoment; de viktigste eksemplene [YF 9.6; LL 6.3]

Eks 1: Ring og hul sylinder

M  $I_0 = \int \rho^2 dm = R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$ [Må huskes/kunnes!]



Eks 2: Skive og kompakt sylinder

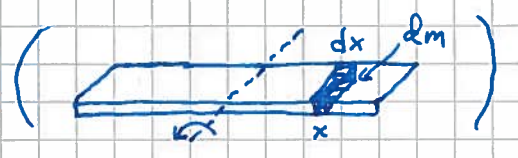
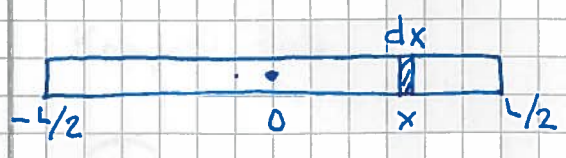
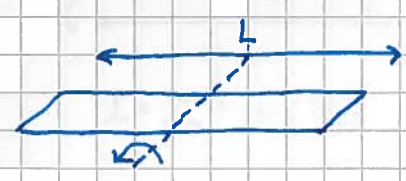
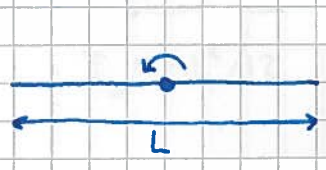
M 

$$dI_0 = \rho^2 dm = \rho^2 M dA/A$$

$$= \rho^2 M \frac{2\pi \rho d\rho}{\pi R^2} = \frac{2M}{R^2} \rho^3 d\rho$$

$$\Rightarrow I_0 = \int dI_0 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho = \underline{\underline{\frac{1}{2} MR^2}}$$
 [Oppgis]

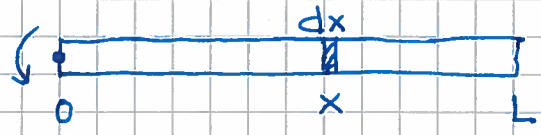
Eks 3: Tynn stang og tynn plate, akse gjennom CM (se fig)



$$\rho = x, \quad dm = M dx/L, \quad dI_0 = x^2 M dx/L$$

$$\Rightarrow I_0 = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{M}{L} \left(\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^3 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^3 \right) = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}}$$
 [Oppgis]

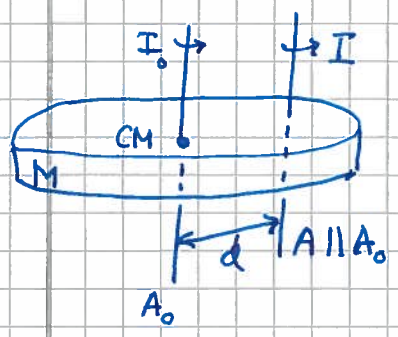
Eks 4: Tynn stang, akse gjennom stangas ende



$$I = \int_0^L x^2 M dx / L = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}$$

Eks 5: Kuleskall $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$
Eks 6: Kompakt kule $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$ } [Oppgiss]

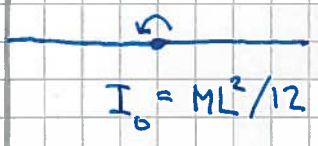
Steiners sats (parallelakse teoremet) [YF 9.5; LL 6.3]



$$I = I_0 + Md^2$$

(Bevis: Se notat)

Eks 1: Tynn stang

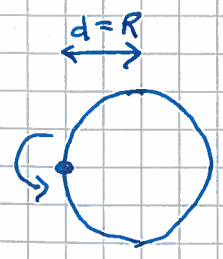


$$I = I_0 + M \cdot (L/2)^2 = \frac{1}{3} ML^2 \text{ (som over!)}$$

Eks 2: Kompakt kule



$$I_0 = \frac{2}{5} MR^2$$

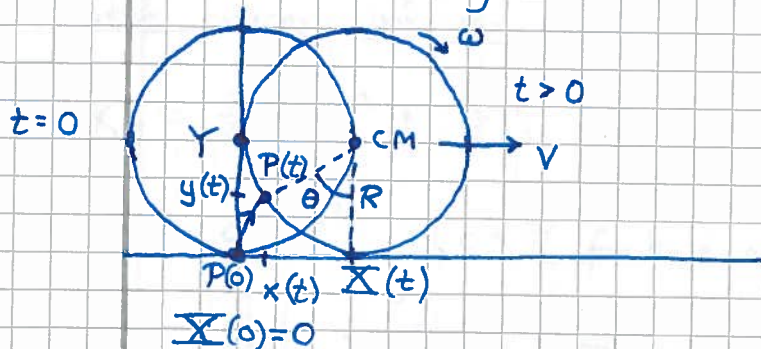


$$I = I_0 + MR^2 = \frac{7}{5} MR^2$$

Ren rulling

[YF 10.3; LL 6.7]

(34)



$$P(t) = (x(t), y(t))$$

= banen til punkt på periferien;

$$P(0) = (0, 0)$$

Vi ser at: $X = R \cdot \theta$, $Y = R$, $x = X - R \sin \theta = R\theta - R \sin \theta$,
 $y = Y - R \cos \theta = R - R \cos \theta$

CM: $\vec{R}_{CM} = X \hat{x} + Y \hat{y} = R\theta \hat{x} + R \hat{y}$

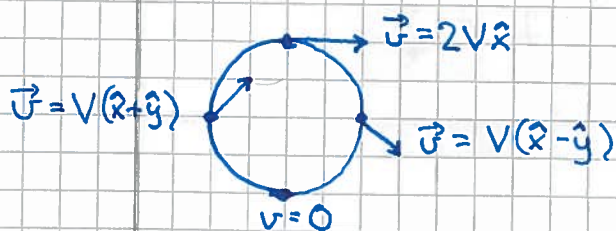
$$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM} = R \dot{\theta} \hat{x} = R\omega \hat{x} = V \hat{x}$$

$$\vec{A} = \dot{\vec{V}} = R \ddot{\theta} \hat{x} = R\dot{\omega} \hat{x} = R\alpha \hat{x} = A \hat{x}$$

Rullobetingelsene:

$$V = R\omega, \quad A = R\alpha$$

P: $\vec{v} = \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} = (R\dot{\theta} - R\dot{\theta} \cos \theta) \hat{x} + R\dot{\theta} \sin \theta \hat{y}$
 $= \underline{V(1 - \cos \theta) \hat{x} + V \sin \theta \hat{y}}$



Merk: $v = 0$ når $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$, dvs
 når P er i kontakt med underlaget

$$\Rightarrow \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$$

\Rightarrow Null effekttap ved ren rulling!

(selv om statisk friksjon $\vec{f} \neq 0$)

Banen er en sykloide:



Kinetiske energi ved ren rulling

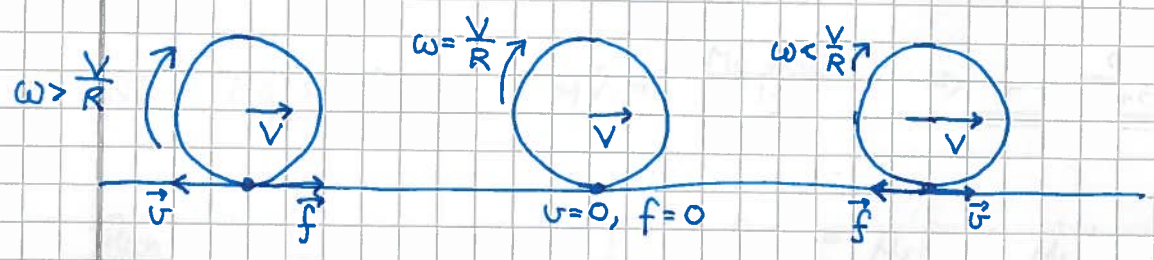
$$K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

$$I_0 = c M R^2 \quad (c = \frac{2}{5} \text{ for kule osv}) \quad ; \quad \omega = \frac{V}{R}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{K = (1+c) \frac{1}{2} M V^2}}$$

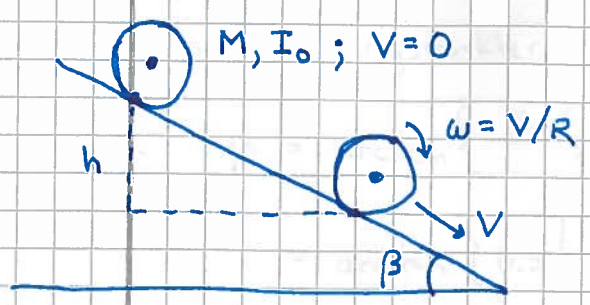
Sluring [LL 6.7]

Hvis $\omega \neq V/R$, er det en relativ hastighet $v = V - \omega R$ mellom legeme og underlag i kontaktpunktet:



Vi har kinetisk friksjon, $f = \mu_k N$, og taper mek. energi, pr tidsenhet:
 $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$

Eks: Rulling på skrånplanet [YF 10.3; LL 6.8]



Bestem V, \dot{V}, f , samt minste μ_s som gir ren rulling.
 $I_0 = c M R^2$

Forsøk gir: $V_{\text{kule}} > V_{\text{skive}} > V_{\text{kuleskall}} > V_{\text{hul sylinder}}$

Løsning: Mek. energi bevart

36

$$\Rightarrow Mgh = (1+c) \frac{1}{2} MV^2 \quad \text{med } h = x \sin \beta$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{V(x) = \sqrt{\frac{2gx \sin \beta}{1+c}}}}, \quad \text{i tråd med forsøk!}$$

$$\underline{\underline{\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dV}{dx} = V \cdot \sqrt{\frac{2g \sin \beta}{1+c}} \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{g \sin \beta}{1+c}}}$$

Friksjonskraften \vec{f} , retning oppover skråplanet, reduserer \dot{V} med en faktor $(1+c)^{-1}$. [Hvis $f=0$, er $\dot{V} = g \sin \beta$]



$$N2: Mg \sin \beta - f = M\dot{V} = \frac{Mg \sin \beta}{1+c} \Rightarrow \underline{\underline{f = \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta}}$$

Ren rulling bare hvis $f \leq f_{\max} = \mu_s N = \mu_s Mg \cos \beta$

$$\Rightarrow \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta \leq \mu_s Mg \cos \beta$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mu_s \geq \frac{c}{1+c} \tan \beta}}$$

Eks: Kuleskall, $c = 2/3$, og $\mu_s = 0.2$ gir ren rulling for helningsvinkler opp til

$$\beta = \arctan \left\{ \frac{\mu_s (1+c)}{c} \right\} = \arctan \left\{ \frac{0.2 \cdot 5/3}{2/3} \right\}$$

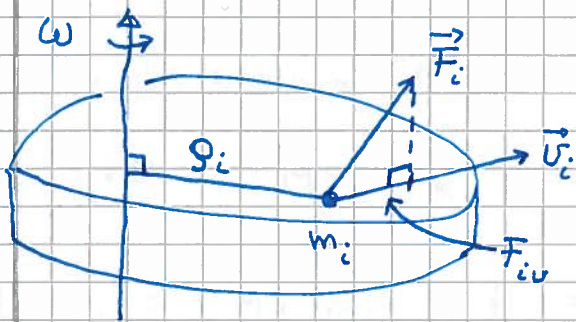
$$= \arctan \{0.5\} \approx \underline{\underline{27^\circ}}$$

Rotasjonsdynamikk

(37)

Akse med fast orientering [YF 10.1-10.3; LL 6.2]

- Essensielt et endimensjonalt problem
- Dekker det meste vi skal ta for oss (ikke alt)
- Beskriver rotasjonsdelen av legemets totale bevegelse



$$v_i = \rho_i \omega$$
$$F_{i,v} = \text{komponent av } \vec{F}_i \text{ langs } \vec{v}_i$$
$$\rightarrow \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = F_{i,v} \cdot v_i$$

$$\text{Tilført effekt: } \mathcal{P} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$(a) \text{ Med N2: } \mathcal{P} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \rho_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \frac{d\omega^2}{dt} = \frac{1}{2} I \cdot 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dt} = \underline{I \omega \frac{d\omega}{dt}}$$

$$(b) \text{ "Direkte": } \mathcal{P} = \sum_i F_{i,v} \cdot v_i = \left(\sum_i F_{i,v} \rho_i \right) \omega = \underline{\tau \omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = I \dot{\omega}} \quad \text{N2, rot. om akse med fast orientering}$$

Her er $\tau = \sum_i F_{i,v} \rho_i =$ ytre dreiemoment på legemet, mhp rotasjonsaksen

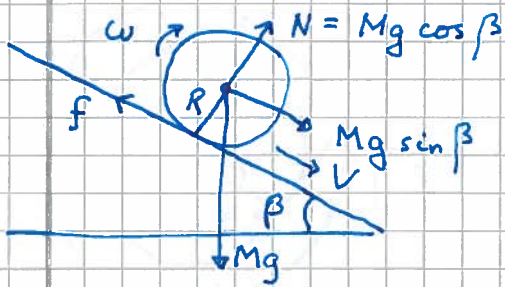
$I = \sum_i m_i \rho_i^2 =$ legemets dreghetsmoment mhp rot. aksen

Fra $\mathcal{P} = \tau d\phi/dt$ og $\mathcal{P} = dW/dt$ ser vi at tilført arbeid ved rotasjon er:

$$\boxed{dW = \tau d\phi}$$

[YF 10.4; LL 6.4]

Eks 1: Rulling på skråplan



$$\omega = v/R, \quad \dot{\omega} = \dot{v}/R$$

$$I_0 = cMR^2$$

N2, rot. om akse gjennom CM: $\tau = I_0 \dot{\omega}$; $\tau = f \cdot R$

$$\Rightarrow f \cdot R = cMR^2 \cdot \frac{\dot{v}}{R} \Rightarrow f = cM\dot{v}$$

N2, transl.: $Mg \sin \beta - f = M\dot{v}$

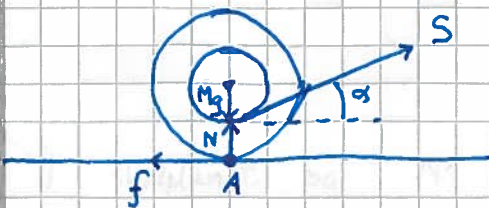
$$\Rightarrow Mg \sin \beta - cM\dot{v} = M\dot{v} \Rightarrow \underline{\underline{\dot{v} = \frac{g \sin \beta}{c+1}}} \quad (\text{som s. 3b})$$

Eks 2: Snelle (på flatt underlag)



Hvilken vei ruller snella?

Løsn: Velg akse i "kontaktlinje" A:



Mg , N og f har ingen arm mhp akse A

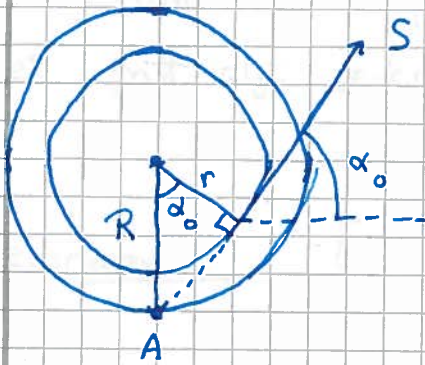
\Rightarrow Kun S kan ha dreiemoment mhp akse A

Liten α (som i fig) \Rightarrow Rulling mot høyre

Stor α \Rightarrow \leftarrow \leftarrow venstre

Statisk likevekt hvis \vec{S} går gjennom A (og S ikke for stor!), (39)

da er $\tau_A = 0$:

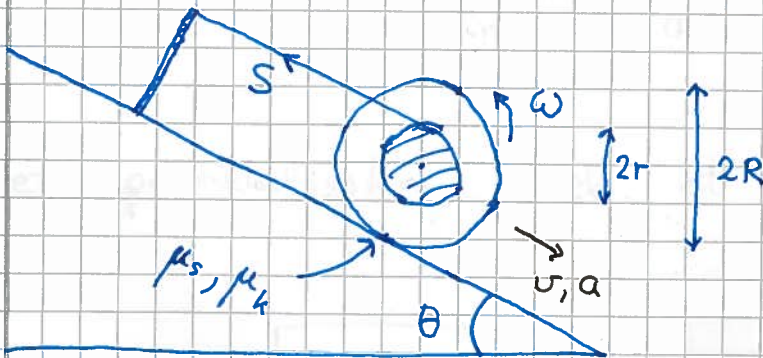


Fra figur: $\cos \alpha_0 = \frac{R}{r}$

Oppg: Vis at snella nå blir liggende i ro dersom

$$S \leq \frac{\mu_s Mg}{\cos \alpha_0 + \mu_s \sin \alpha_0}$$

Eks 3: Snelle på skråplan (baklengs) (Øving 6)



- Ved hvilken $\theta = \theta_0$ vil snella begynne å "slure baklengs" nedover?
- Hva er S og a hvis $\theta > \theta_0$?

Tips:

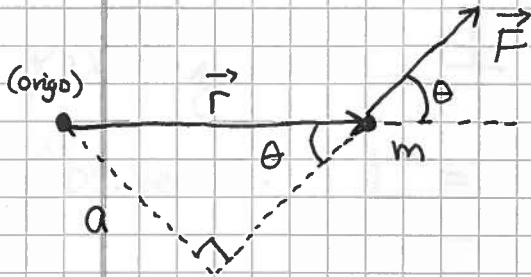
- $N_1 \parallel$ skråplanet og N_1 for rot. om CM gir θ_0 når $f = f_{\max} = \mu_s N$
- $N_2 \text{ ——— } \parallel \text{ ———}$ og $N_2 \text{ ——— } \parallel \text{ ———}$ gir S og a; $f = \mu_k N$

Rotasjonsdynamikk i 3D ("vektorielt")

(40)

NB: Dreiemoment $\vec{\tau}$ og dreieimpuls \vec{L} må beregnes relativt et fritt valgt referansepunkt. Vi velger her origo som ref. punkt.

Dreiemoment [YF 10.1 ; LL 5.5, 6.4]



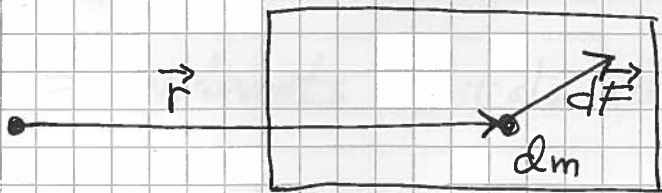
$$\vec{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{F}$$

= dreiemomentet til \vec{F} på m
(relativt origo)

Retning: $\vec{\tau} \perp \vec{F}$ og $\vec{\tau} \perp \vec{r}$ (Her: Ut av planet)

Abs.verdi: $\tau = r \cdot F \cdot \sin \theta = a \cdot F$ ("arm x kraft")

For et partikkelssystem, f.eks. et stivt legeme:

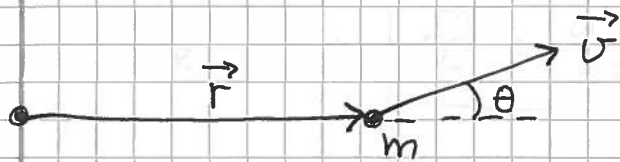


$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{F} = \text{det totale dreiemomentet på systemet}$$

Dreieimpuls

[YF 10.5 ; LL 6.6]

(41)



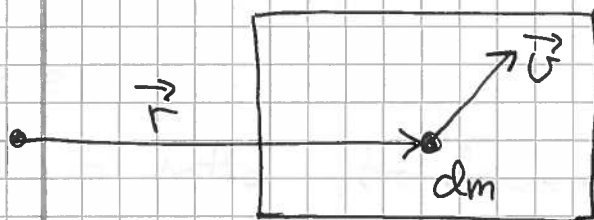
impuls: $\vec{p} = m\vec{u}$

$$\boxed{\vec{L} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{p}} = \text{dreieimpulsen til } m$$

Retning: $\vec{L} \perp \vec{r}$ og \vec{p} (Her: Ut av planet)

Abs.verdi: $L = r p \sin \theta$

For partikkelsystem:



$$d\vec{p} = dm \cdot \vec{u}$$

$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times d\vec{p} = \int \vec{r} \times \vec{u} \cdot dm$$

= systemets totale dreieimpuls

N2 for rotasjon [YF 10.5 ; LL 6.6]

(42)

Skal vise at: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ ("spinnsetsen")

Ser på punktmasse m :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) = m \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}}_{=0} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\stackrel{N2}{=} \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \quad (\text{qed})$$

(For partikkelsystem går beviset helt tilsvarende.)

Her er:

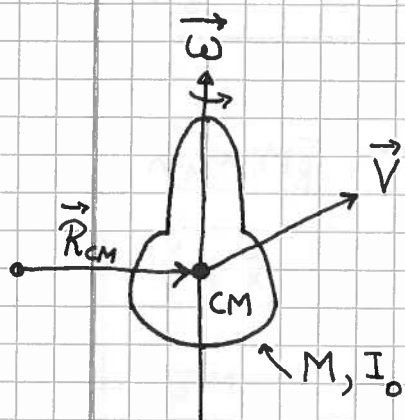
$\vec{\tau}$ = netto ytre dreiemoment på systemet

\vec{L} = systemets totale dreieimpuls

\vec{L} for stivt legeme [YF 10.5 ; LL 6.6]

(43)

Anta stivt legeme med refleksjonssymmetri om rotasjonsaksen
 [dvs symmetrisk når $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$]



$$\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s$$

$$= \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} + I_0 \vec{\omega}$$

[Se notat for bevis]

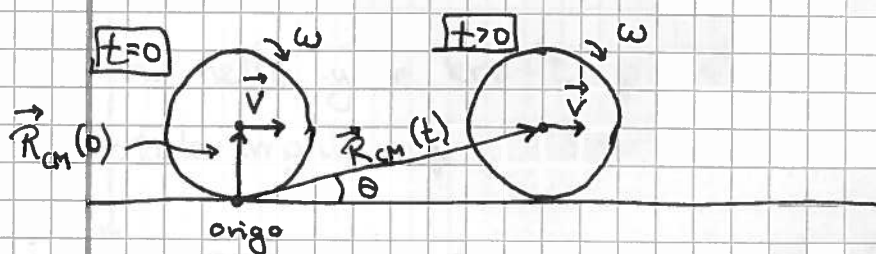
Banedreieimpuls: (bidrag pga bevegelsen til CM)

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}; \text{ dvs som punktmasse } M \text{ i CM med hastighet } \vec{V}$$

Indre dreieimpuls: (bidrag pga rotasjon om CM)

$$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega}; \text{ uavhengig av valg av referansepunkt}$$

Eks: Rent rullende kule; $\vec{L} = ?$



$$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$$

$$(\omega < 0)$$

$$I_0 = \frac{2}{5} MR^2$$

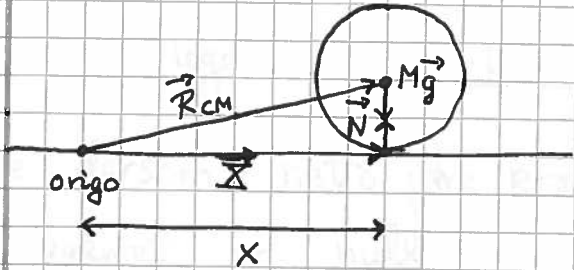
$$\vec{L}_b(0) = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} = -MRV \hat{z}$$

$$\vec{L}_b(t) = \vec{R}_{CM}(t) \times M\vec{V} = -R_{CM}(t) MV \sin\theta \hat{z} = -MRV \hat{z}$$

$$\vec{L}_s(0) = \vec{L}_s(t) = I_0 \vec{\omega} = -\frac{2}{5} MR^2 \cdot \frac{V}{R} \hat{z} = -\frac{2}{5} MRV \hat{z}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{L}} = -\frac{7}{5} MRV \hat{z}, \text{ uavh. av } t$$

Med konstant \vec{L} er $d\vec{L}/dt = 0$, og dermed $\vec{\tau} = 0$:



$(N \uparrow \Rightarrow N = Mg)$

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} + \vec{X} \times \vec{N} \\ &= (X\hat{x} + R\hat{y}) \times (-Mg\hat{y}) + (X\hat{x}) \times (Mg\hat{y}) \\ &= -X Mg \hat{z} + X Mg \hat{z} = \underline{\underline{0}} \quad \underline{\text{OK!}} \end{aligned}$$

Bevaringslover

Vi kan nå oppsummere bevaringslovene for energi, impuls og dreieimpuls:

- For isolert system (ingen ytre krefter) er total energi E , impuls \vec{p} og dreieimpuls \vec{L} bevart
- I konservativt system er mekanisk energi, $K+U$, bevart
- Hvis netto ytre kraft på et system er null, er systemets totale impuls \vec{p} bevart
- Hvis netto ytre dreiemoment på et system er null, er systemets totale dreieimpuls \vec{L} bevart

Statisk likevekt [YF 11.1-11.3; LL 7.1]

(45)

Et stivt legeme forblir i ro ($\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$)

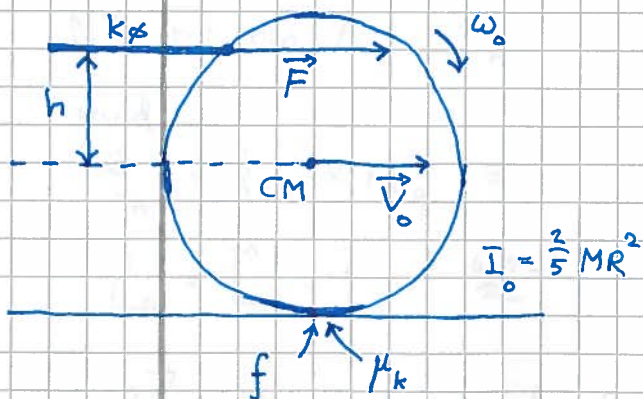
bare dersom netto ytre kraft og netto ytre dreiemoment på legemet er null:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konstant} \quad (\text{f.eks. } \vec{p} = 0)$$

$$\sum_i \vec{\tau}_i = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{konstant} \quad (\text{f.eks. } \vec{L} = 0)$$

Eksempler, N2 rotasjon, dreieimpuls(-bevarelse)

Eks 1: Snooker [LL 6.7; øving 6]



Anta kortvarig støt med kjen i høyde h over senterlinjen. $F \gg f$, så vi neglisjerer f i selve støtet.

Bestem kulas bevegelse.

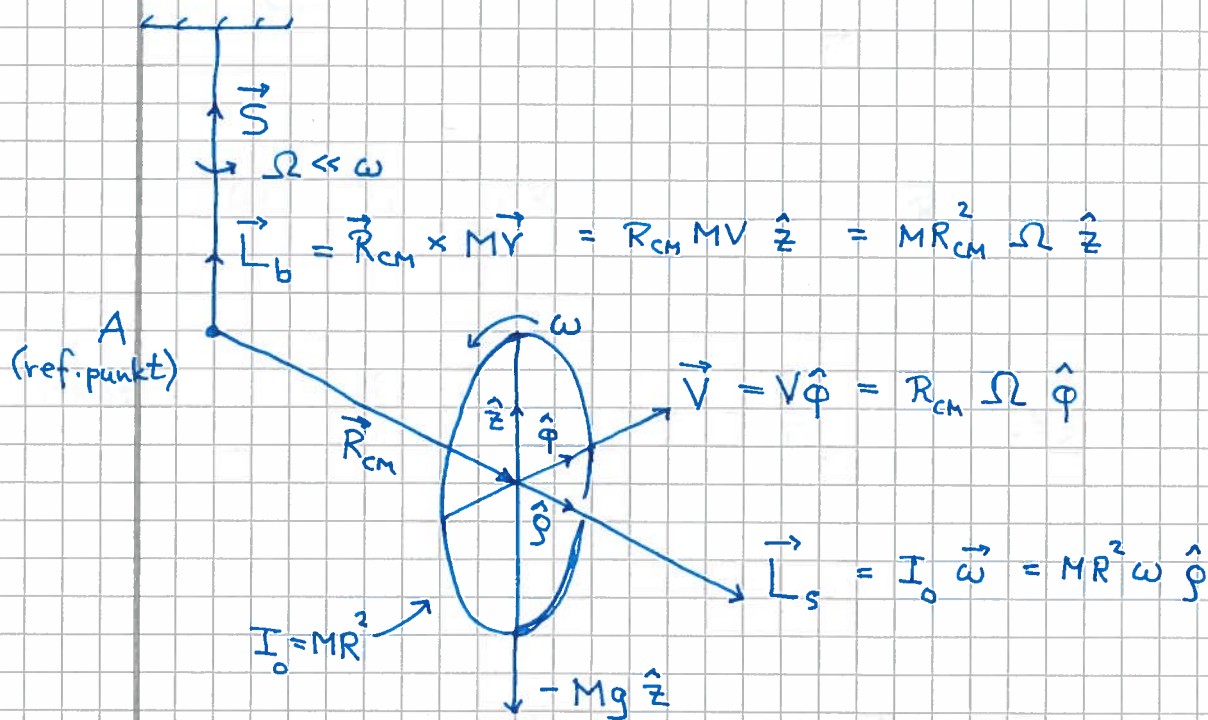
Tips: N2 og N2, rotasjon gir v_0 og ω_0 når støtet er ferdig; antar varighet Δt (≥ 0) og $F = \text{konstant}$:

$$F \cdot \Delta t = \Delta p = M v_0 \quad ; \quad \tau \cdot \Delta t = F \cdot h \cdot \Delta t = \Delta L = I_0 \omega_0$$

For stor $h \Rightarrow \omega_0 > v_0/R \Rightarrow$ skring, og \vec{f} mot høyre

For liten $h \Rightarrow$ omvendt

"Riktig" $h \Rightarrow \omega_0 = v_0/R$ og ren rulling med en gang



Finn T_Ω (T_ω) ; $T_\Omega = 2\pi/\Omega$, $T_\omega = 2\pi/\omega$

Exp: $M = 5 \text{ kg}$, $R = 0.3 \text{ m}$, $R_{cm} = 0.2 \text{ m}$, $T_\Omega \approx \underline{4.7 \text{ s}}$

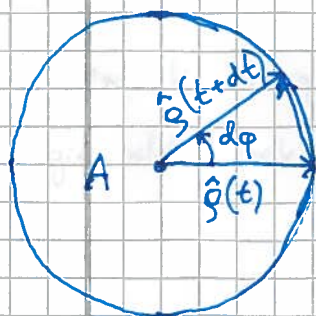
N2, rot. om A : $\vec{\tau}_A = d\vec{L}_A / dt$

med

$\vec{\tau}_A = \vec{R}_{cm} \times M\vec{g} = R_{cm} Mg \hat{\phi} \quad [\hat{\phi} \times (-\hat{z}) = \hat{\phi}]$

$\vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s \quad \omega \gg \Omega \quad \vec{L}_s = MR^2 \omega \hat{\phi}$

$\Rightarrow d\vec{L}_A / dt \approx MR^2 \omega d\hat{\phi} / dt$



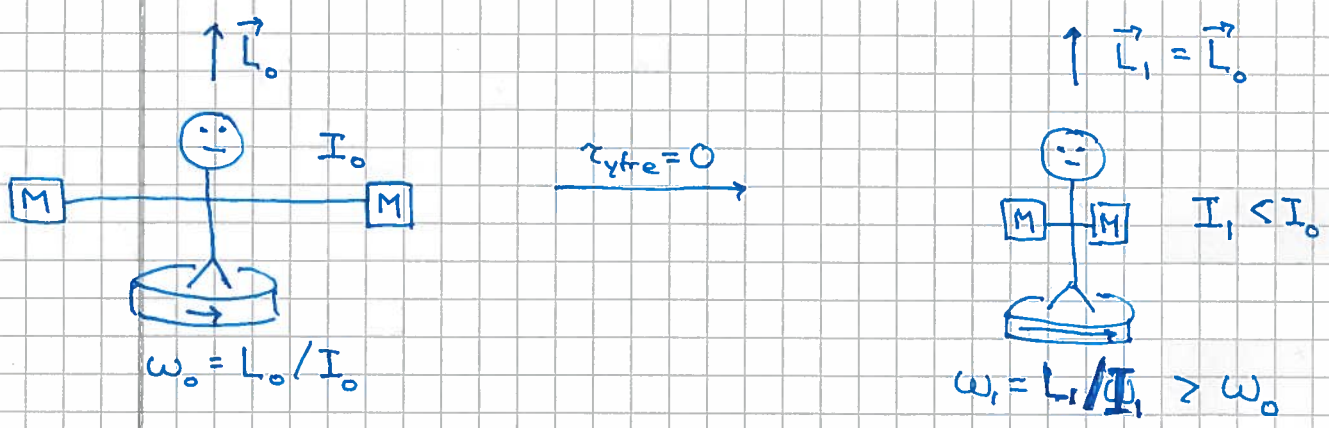
$d\hat{\phi} = |\hat{\phi}| \cdot d\phi \cdot \hat{\phi} = d\phi \cdot \hat{\phi} \Rightarrow \frac{d\hat{\phi}}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \hat{\phi} = \Omega \hat{\phi}$

$$\Rightarrow \underbrace{R_{cm} Mg \hat{\phi}}_{\vec{\tau}_A} = \underbrace{MR^2 \omega \Omega \hat{\phi}}_{d\vec{L}_A/dt}$$

$$\Rightarrow \omega = R_{cm} g / R^2 \Omega \Rightarrow T_\omega = \frac{(2\pi R)^2}{R_{cm} g T_\Omega}$$

Exp: $T_\omega \approx \frac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10 \cdot T_\Omega} \approx \frac{4}{2T_\Omega} \approx 0.4s$

Eks 3: Piruett [YF 10.6 ; LL 6.5]



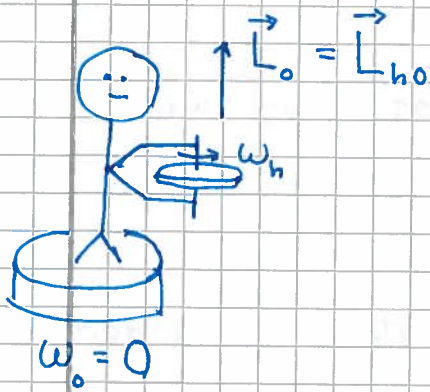
$$L_1 = L_0 \Rightarrow \omega_1 = \frac{L_1}{I_1} = \frac{I_0 \omega_0}{I_1} > \omega_0, \text{ da } I_0 > I_1$$

Kin. energi:

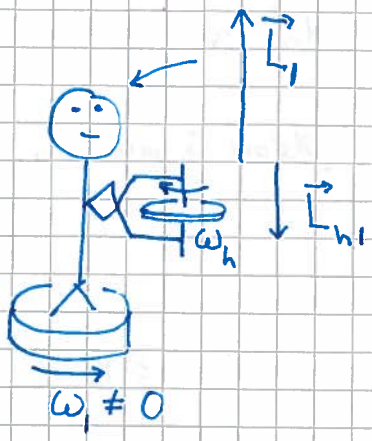
$$K_0 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 ; K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0 \omega_1 = K_0 \cdot \frac{\omega_1}{\omega_0} > K_0$$

(Kjemisk energi i musklene brukes til å utføre arbeid, gir økt mekanisk energi.)

Eks 4: Dreieimpulsbevarelse med sykkelhjul og student



Hjulet snus
 $\vec{r}_{\text{ytre}} = 0$



$$\vec{L}_l + \vec{L}_{hl} = \vec{L}_0 \quad ; \quad \vec{L}_{hl} = -\vec{L}_0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{L}_l = 2\vec{L}_0}}$$

Svingninger

[YF 14; LL 9]

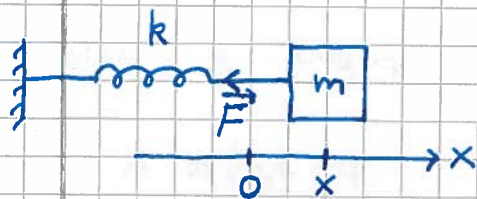
(49)

= oscillasjoner = periodisk oppførsel omkring en likevekt

Eks: masse/fjær, pendler, instrumentstreng, atom i molekyl osv osv

Harmonisk oscillator

[YF 14.2; LL 9.1-9.3]



x = posisjonen til m

= fjæras forlengelse ($x > 0$) ert

sammenpressing ($x < 0$) relativt

likevekt ($x = 0$)

\vec{F} = kraft på m fra fjæra

\vec{F} har retning $\mp \hat{x}$ når $x \gtrless 0$ (trekker/skyver m tilbake mot likevekt)

Ideell fjær; Hookes lov:

$$\vec{F} = -kx \hat{x}$$

k = fjærkonstanten; $[k] = \text{N/m}$

N2 gir: $-kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$, som er diff.ligning for enkel harmonisk oscillator i 1D.

Skriver generelt $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, dvs $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, som har

Løsning

$$x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t$$

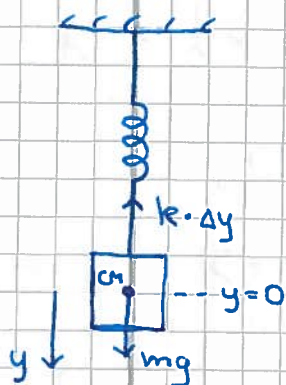
eventuelt

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

der integrasjonskonstantene B, C ert A, φ bestemmes med to initialbetingelser, f.eks. $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$.

Samme ligning vertikalt i tyngdefeltet:

50



Likevekt når $mg = k \Delta y$, dvs fjæra forlenget med $\Delta y = mg/k$. Anta CM i $y=0$ i "strukket likevekt". Hvis CM er i pos. y , gir N2:

$$m\ddot{y} = \sum F = mg - k(\Delta y + y) = -ky$$
$$\Rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad \text{med } \omega_0 = \sqrt{k/m}, \text{ som før.}$$

Størrelser og begreper (se sirkelberegelse):

$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ = oscillatorens posisjon (utsving fra likevekt)

A = amplitude = max utsving fra likevekt; $[A] = [x]$

ω_0 = vinkel frekvens; $[\omega_0] = s^{-1}$

$T = 2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr hde svingning; $[T] = s$

$f = 1/T$ = frekvens = antall svingninger pr tidsenhet; $[f] = s^{-1} = \text{Hz}$

$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

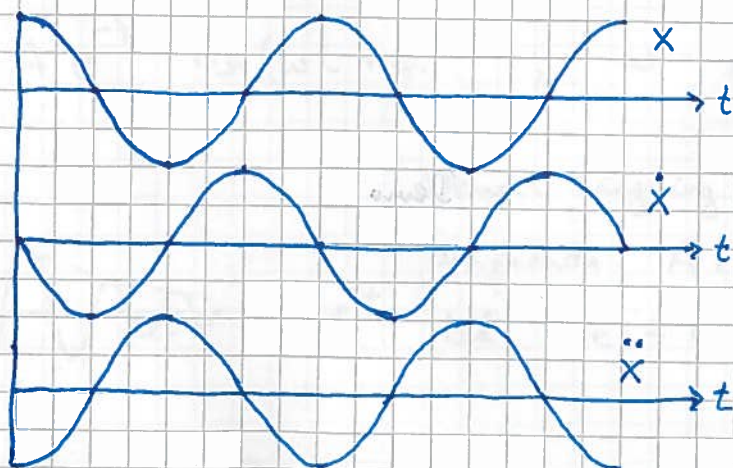
φ = fasekonstant; $[\varphi] = 1$

$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi) = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2)$ = hastighet

$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi) = \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$ = akselerasjon

Dvs: Faseforskjell $\pi/2$ mellom x og \dot{x}

————— " π " mellom x og \ddot{x} (i motfase)



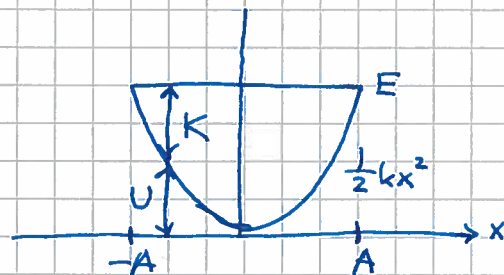
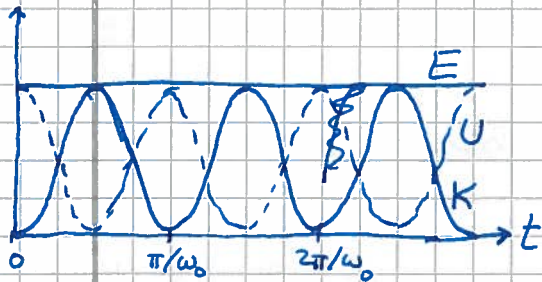
Energi i harmonisk oscillator [YF 14.3; LL 9.4]

(51)

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega_0 t \quad (\text{antar } \varphi=0)$$

$$U = -\int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 \omega_0 t$$

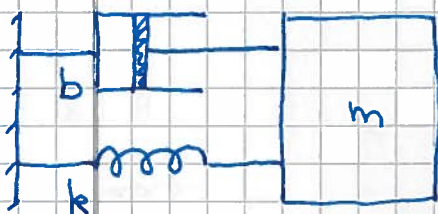
$\Rightarrow E = K + U = \frac{1}{2} k A^2$, dvs total mek. energi bevart; konservervativt system



Dempet fri svingning [YF 14.7; LL 9.7]

Antar $f = -b\dot{x}$, dvs langsom bevægelse i fluid

[Større \dot{x} i fluid: $f = -D\dot{x}^2$; Tørr friksjon: $f = \mu_k N$]



$$NZ: -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

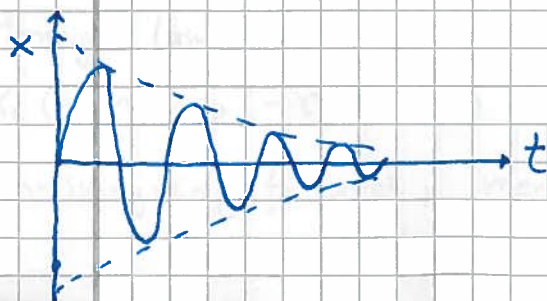
$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\text{med } \gamma \equiv b/2m, \quad \omega_0^2 \equiv k/m; \quad [\gamma] = [\omega_0] = s^{-1}$$

[Matte 3; $x \sim \exp(\lambda t)$; karakteristisk ligning; imaginære, komplekse, reelle røtter...]

Underkritisk demping, $\gamma < \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi); \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



Dempet svingning med eksp. aftagende amplitude, $A \exp(-\gamma t)$; dvs reduceret til $A/e \approx 0.37 A$ eller tid $1/\gamma$

Overkritisk damping, $\gamma > \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}$$

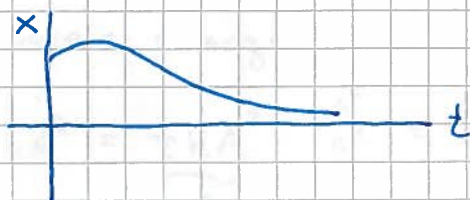
$$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Kritisk damping, $\gamma = \omega_0$ ($\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \gamma$)

$$x(t) = A e^{-\gamma t} + B t e^{-\gamma t}$$

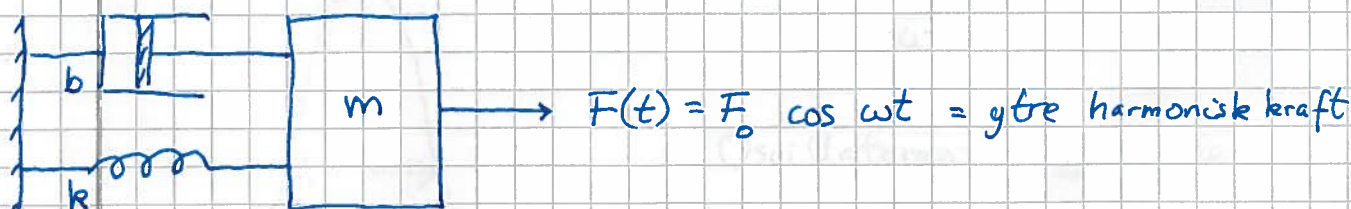
Eks: Støtdempere med $\gamma \approx \omega_0$ gir god kjørekomfort.

Merk at $\gamma \geq \omega_0$ gir ikke svingninger:



Her er $x(0) > 0$ og $\dot{x}(0) > 0$

Tvingen svingning og resonans [YF 14.8; LL 9.9]



$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (2\gamma \equiv b/m, \omega_0^2 \equiv k/m)$$

Generell løsning: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Homogen løsning:

$x_h(t) \sim \exp(-\gamma t) \approx 0$ når $t \gg 1/\gamma$; relevant for
innsvingningsforløpet, men dør ut (eksponentielt)

Vi antar $t \gg 1/\delta$

(53)

$\Rightarrow x(t) = x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$; innsetting i N2 gir

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\delta\omega)^2\}^{1/2}} \quad ; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left\{\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega}\right\}$$

Resonans: Svært stor A hvis $\omega \approx \omega_0$ og $\delta \ll \omega_0$ (svak damping).

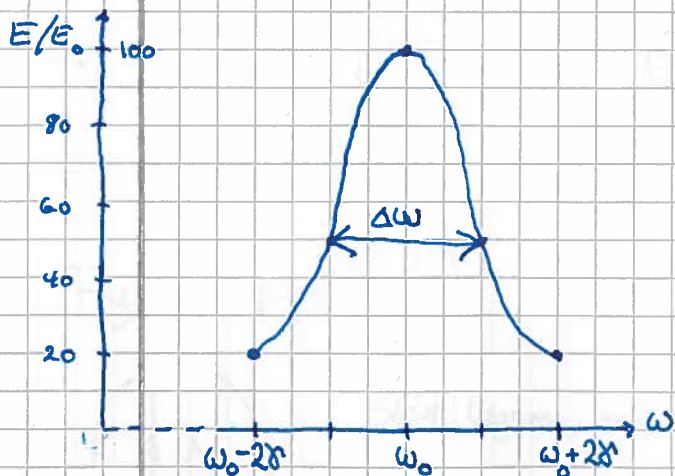
$$A(\omega_0) = \frac{F_0}{2m\delta\omega_0} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cdot \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{\omega_0}{2\delta} = A_0 \frac{\omega_0}{2\delta} \gg A_0 (=A(0))$$

[Tacoma bridge, 1940; "torsjonsvridning" med periode ca 5s]

Oscillatorens energi:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \underbrace{\frac{1}{2}kA_0^2}_{E_0} \cdot \frac{A^2}{A_0^2} = E_0 \cdot \frac{(F_0/m)^2 / (F_0/k)^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\delta\omega)^2} = \underline{\underline{E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}}$$

Eks: $\omega_0/\delta = 20$



Resonanskurvens halvverdbreidde:

$$\Delta\omega \approx 2\delta$$

Oscillatorens Q-faktor:

$$Q \equiv \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx \frac{\omega_0}{2\delta}$$

Skarp resonans \Rightarrow stor Q-faktor

Her er $Q = 10$. Redusert damping δ gir smalere og høyere resonans.

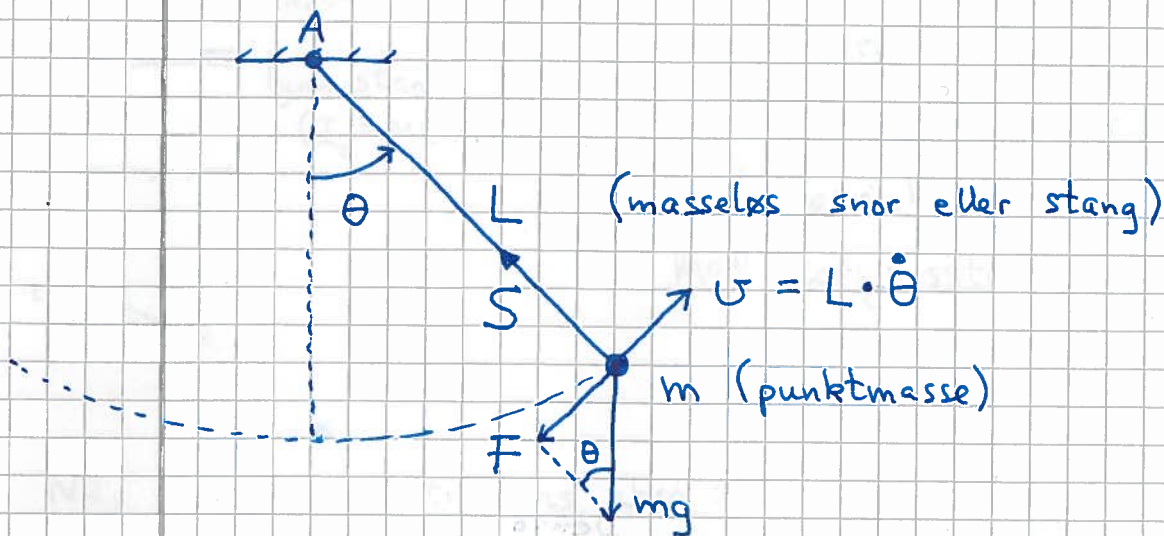
Exp: Stav med messinglodd. Plotter $E/E_0 = A^2/A_0^2$ vs f .

$$T_0 \approx 0.65 \text{ s} \quad f_0 \approx 1.55 \text{ Hz} \quad \Delta f \approx 0.15 \text{ Hz}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Q \approx 10}}$$

Pendler

Matematisk pendel [YF 14.5; LL 9.6]



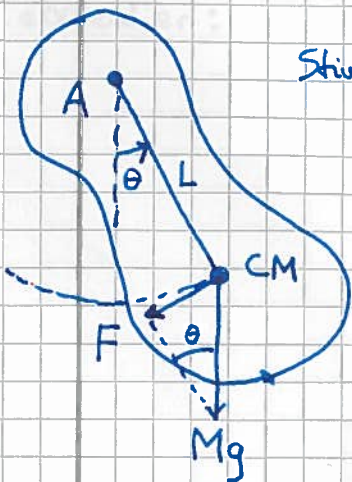
N2 || sirkelbanen:

$$\left. \begin{aligned} F &= -mg \sin \theta \\ a &= \dot{v} = L \ddot{\theta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} -mg \sin \theta &= mL \ddot{\theta} \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta &= 0 \end{aligned}$$

Anta små utsving fra likevekt, $|\theta| \ll 1 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$

\Rightarrow Harmonisk oscillator: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ med $\omega_0 = \sqrt{g/L}$

Fysisk pendel [YF 14.6; LL 9.6]



Stivt legeme, masse M, treghetsmoment I mhp akse A.

$$\text{N2, rotasjon om A: } \tau = I \ddot{\theta}$$

med $\tau = -F \cdot L = -MgL \sin \theta$

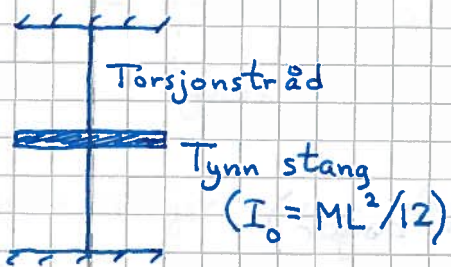
[pos. τ som gir rotasjon mot klokke]

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{MgL}{I} \sin \theta = 0$$

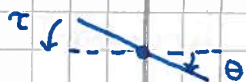
Anta små utsving, $\sin \theta \approx \theta$: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ med $\omega_0 = \sqrt{\frac{MgL}{I}}$

Torsjonspendel

[YF 14.4 ; LL 9.6]



Hookes lov: Tråden motsetter seg vridning og virker på stanga med dreiemoment som er prop. med vridningsvinkelen, $\tau = -\kappa \theta$, med torsjonsstivhet κ



N2, rotasjon om trådens akse:

$$\tau = I_0 \ddot{\theta} \Rightarrow -\kappa \theta = I_0 \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \text{ med } \omega_0 = \sqrt{\kappa/I_0}$$

Eks/Exp:

$M = 50g$, $L = 11cm$. Mål $T = 2\pi/\omega_0$ og bestem κ .

Løsn:

$$\kappa = I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{12} ML^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{ML^2 \pi^2}{3T^2}$$

Tallverdier: $\kappa = \frac{0.050 \text{ kg} \cdot (0.11 \text{ m})^2 \cdot \pi^2}{3 \cdot (0.8 \text{ s})^2} = \underline{0.003 \text{ Nm}}$

BØLGER [YF 15, 16, 11.4 ; LL 10, 7.2]


(56)

= forplantning av en forstyrrelse fra likevekt,
typisk en svingning

Masse svinger men forplanter seg ikke.

Energi svinger og forplanter seg med bølgen.

Transversal bølge (T): Partikler svinger \perp bølgens forplantningsretning

Longitudinal bølge (L):  $\text{---} \parallel \text{---} \parallel \text{---} \parallel \text{---}$

Eks:

Streng / Fjær: T-utsving av streng- / fjærelementer

Lyd: L-utsving av molekylene i mediet

Overflatebølger (f.eks. på vann): T og L utsving av vannet

Elektromagnetiske bølger (lys, IR, UV, radio, røntgen, ...):

Elektrisk felt \vec{E} og magnetfelt \vec{B} svinger \perp forplantningsretningen

Bølge fenomener:

Interferens, diffraksjon

Stående bølger, resonans

Dopplereffekt

Brytning. Dispersjon \Rightarrow Regnbue etc

Sjokkbølger

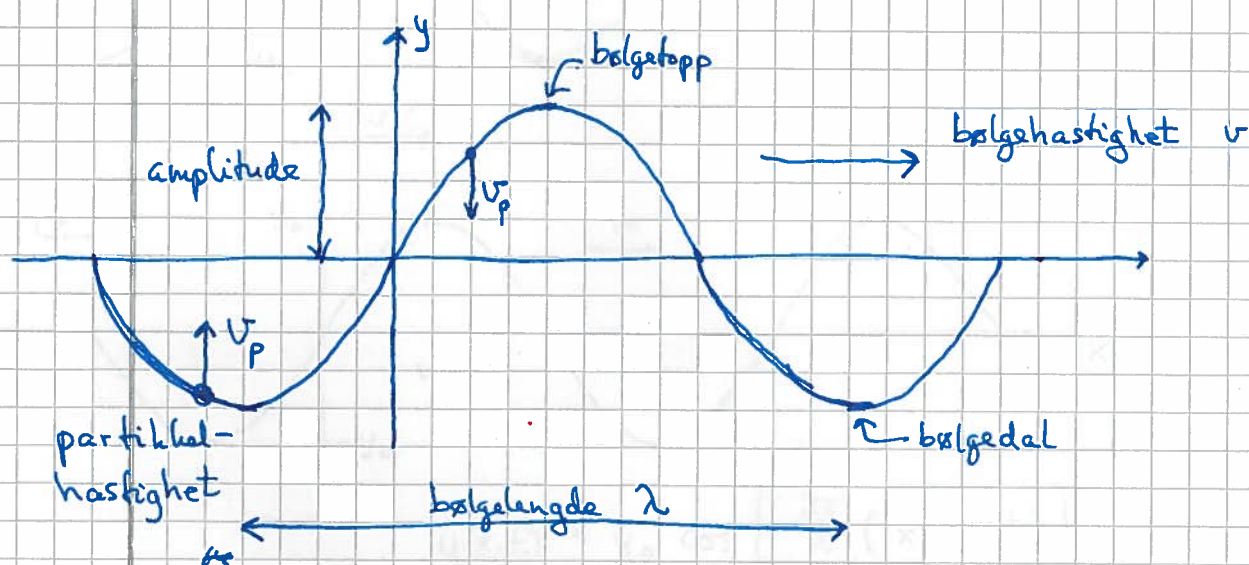
Harmonisk bølge [YF 15.2, 15.3 ; LL 10.2]

(57)

[Vilkårlig "bølgepakke" = sum av harmoniske bølger ; Fourieranalyse]

Anta T-bølge på (∞ lang) streng.

$y = y(x, t)$ = utsving fra likevekt ($y=0$) i pos. x ved tid t



T = perioden = tida det tar for bølgemønsteret å flytte seg en bølgelengde λ

Dermed er bølgehastigheten : $v = \frac{\lambda}{T}$ (fasehastigheten)

f = frekvensen = antall svingninger ved en gitt pos. x pr tidsenhet

$$\Rightarrow f = 1/T$$

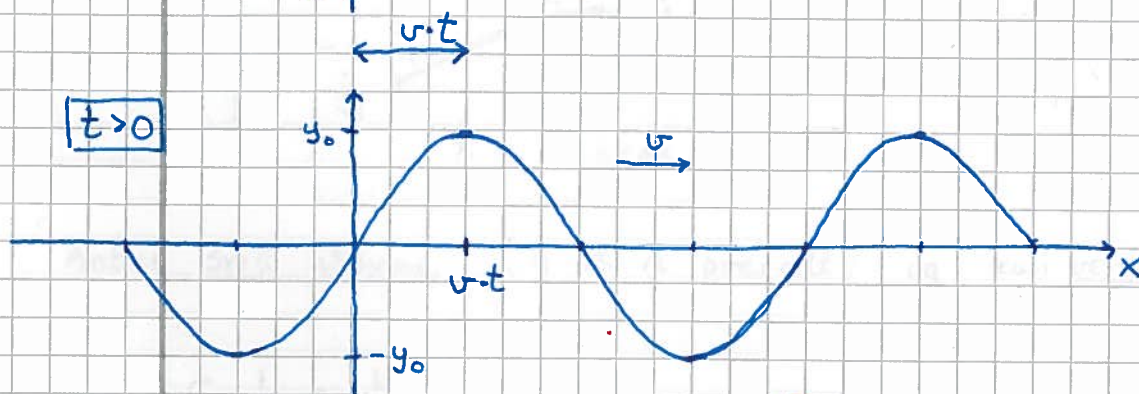
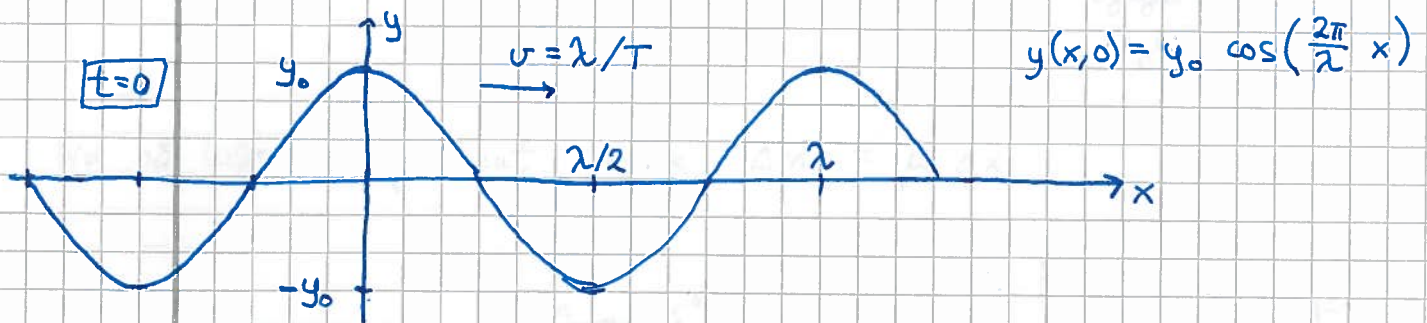
ω = vinkel frekvensen = bølgens faseendring ved en gitt pos. x pr tidsenhet

$$\Rightarrow \omega = 2\pi/T = 2\pi f$$

Partikkelhastighet: $v_p = dy/dt$

(58)

Matematisk beskrivelse av harmonisk bølge:



$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \lambda \cdot \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot v$$

Bølgetallet: $k = 2\pi/\lambda$ $[k] = m^{-1}$ $[k = \text{faseendring pr lengdeenhet ved gitt tid } t]$

Dermed:

$$y(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t)$$

Harmonisk bølge som forplanter seg i positiv x-retning, $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$

Tilsvarende: $y(x,t) = y_0 \cos(kx + \omega t)$ hvis bølgen forplanter seg i negativ x-retning

Mer generelt:

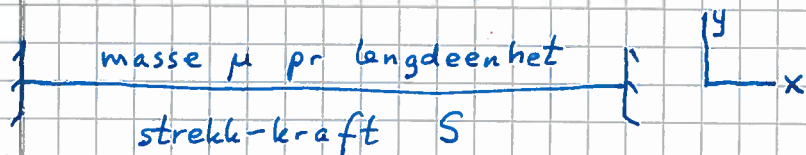
T-bølge: $\vec{D}(x,t) = \hat{y} D_0 \cos(kx \pm \omega t + \varphi)$

L-bølge: $\vec{D}(x,t) = \hat{x} D_0 \cos(kx \pm \omega t + \varphi)$

Transversal bølge på streng

[YF 15.4; LL 10.1]

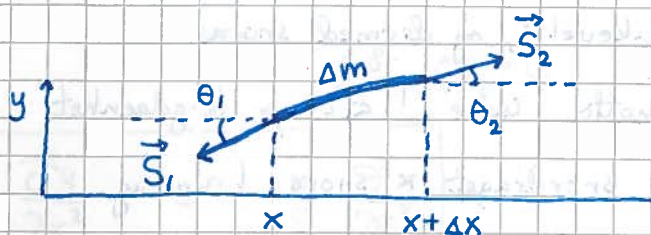
(59)



Likevekt: $y=0$

(Antar at strengens tyngde Mg kan neglisjeres)

N2 på lite streksegment, masse $\Delta m = \mu \Delta x$



["Snor" \rightarrow ingen bøyingsstivhet]

Antar små utsving ($y \ll \lambda$ overalt) og kun vertikal bevegelse.

$$\Rightarrow |S_{1x}| = |S_{2x}| = S_x \quad \text{og} \quad S_x \approx S$$

$$N2: \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \Delta m \cdot \vec{a}$$

$$\text{Horisontalt:} \quad S_{1x} + S_{2x} = \Delta m \cdot a_x = 0$$

$$S_{1x} = -S_1 \cos \theta_1 = -S$$

$$S_{2x} = S_2 \cos \theta_2 = S$$

$$\text{Vertikalt:} \quad S_{1y} + S_{2y} = \Delta m \cdot a_y = \Delta m \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$S_{1y} = -S_1 \sin \theta_1$$

$$S_{2y} = S_2 \sin \theta_2$$

$$\Rightarrow S_2 \sin \theta_2 - S_1 \sin \theta_1 = \Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\text{Divider med } S; \quad S = S_1 \cos \theta_1 = S_2 \cos \theta_2$$

$$\Rightarrow \frac{S_2 \sin \theta_2}{S_2 \cos \theta_2} - \frac{S_1 \sin \theta_1}{S_1 \cos \theta_1} = \Delta x \cdot \frac{\mu}{S} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= \tan \theta_2} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{= \tan \theta_1}$

Fra figuren: $\tan \theta = \partial y / \partial x =$ strengens helning

$$\Rightarrow \frac{(\partial y / \partial x)_{x+\Delta x} - (\partial y / \partial x)_x}{\Delta x} = \frac{\mu}{S} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$= \partial^2 y / \partial x^2$ når $\Delta x \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{S} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

som er bølgligningen for små transversale utsving $y(x,t)$ på streng (snor) med snordrag S og masse μ pr lengdeenhet.

Den generelle løsningen er:

$$\boxed{y(x,t) = f(x-ut) + g(x+ut) ; \quad v = \sqrt{S/\mu}}$$

der f og g er vilkårlige "glatte" (dvs 2 ganger deriverbare) funksjoner.

[Bevises med $z = x - ut$ og kjernerregel for derivasjon:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = (-u) \frac{\partial f}{\partial z} ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = (-u) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

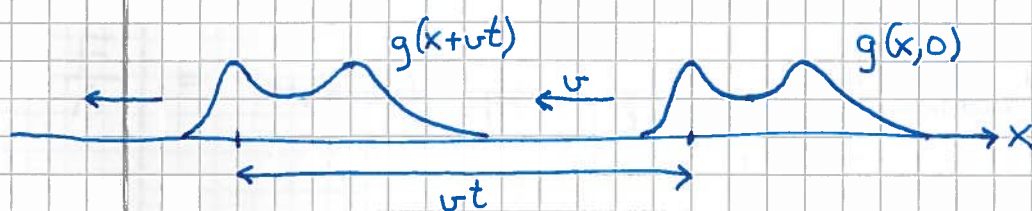
$$\Rightarrow \partial^2 f / \partial x^2 = (1/u^2) \partial^2 f / \partial t^2$$

Tilsvarende for g , med $z = x + ut$]

Vi ser at $f(x-ut)$ er en bølge som forplanter seg i positiv x -retning, med hastighet v :



Tilsv. ser vi at $g(x+ut)$ forplanter seg i negativ x -retning:



Eks/Exp: Mål S , $\mu = M/L$ og v med spiralfjær.

Finn ut om $v = \sqrt{S/\mu}$.

Elastisitet [YF 11.4 ; LL 7.2]

Lineær respons (Hookes lov) :

Relativ lengde- eller volumendring ($\Delta L/L_0$ evt $\Delta V/V_0$) er proporsjonal med påtrykt kraft pr flateenhet (F/A).

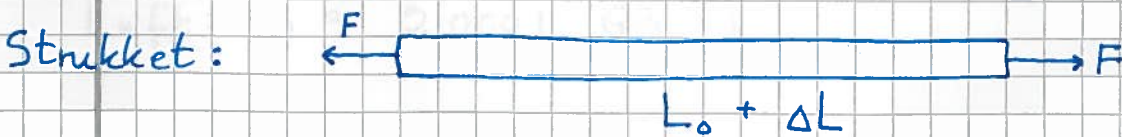
$$\frac{\Delta L}{L_0} \text{ (evt } \frac{\Delta V}{V_0} \text{)} = \text{deformasjon} = \text{"strain"}$$

$$\frac{F}{A} = \text{mekanisk spenning} = \text{"stress"}$$

Prop. faktoren er en materialkonstant og kalles elastisk modul :

$$\text{Elastisk modul} = \frac{\text{Mekanisk spenning}}{\text{Deformasjon}} \quad (= \frac{\text{Stress}}{\text{Strain}})$$

Tynn stang; normalspenning :



Elastisitetsmodulen (YF: Youngs modul Y) :

$$E = \frac{F/A}{\Delta L/L_0} \quad [E] = \text{N/m}^2 = \text{Pa (pascal)}$$

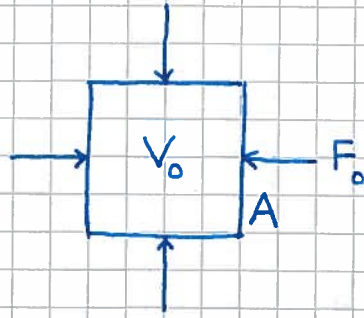
$$\Rightarrow \text{"Fjærkonstant"} \quad k = F/\Delta L = E \cdot A/L_0$$

Eks: Stål: $E \approx 200 \text{ GPa}$. Grafen: $E \approx 1050 \text{ GPa}$. DNA: $E \approx 0.3 \text{ GPa}$

Volumkompressibilitet:

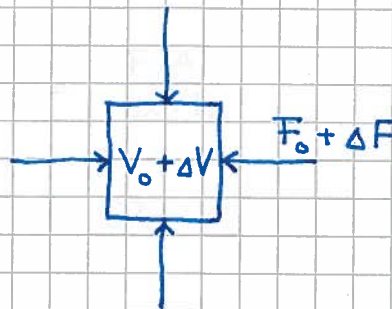
(63)

Likerekt:



$p_0 = F_0/A =$ likerektstrykket
pga det omgivende mediet

En trykk~~økning~~ gir en volum~~reduksjon~~:



$$p = p_0 + \Delta p$$

Bulkmodulen:

$$B = - \frac{\Delta p}{\Delta V/V_0} = -V_0 \frac{\Delta p}{\Delta V}$$

$$[B] = \text{N/m}^2 = \text{Pa}$$

Eks: Stål: $B = 160 \text{ GPa}$.

Vann: $B \approx 2 \text{ GPa}$

Luft: $B \approx 0.0001 \text{ GPa}$

Dvs:

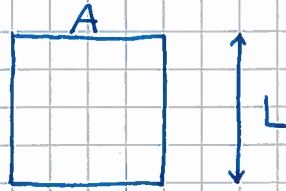
$$B_{\text{gass}} \ll B_{\text{væske}} < B_{\text{faststoff}}$$

Kompressibiliteten:

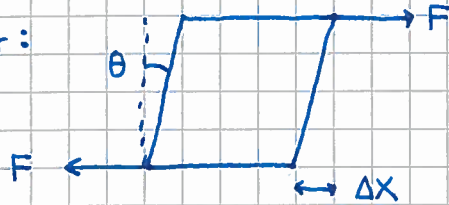
$$\kappa = B^{-1} = - \frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta p}$$

Skjærdeformasjon:

Likevekt:



Med skjærkrefter:



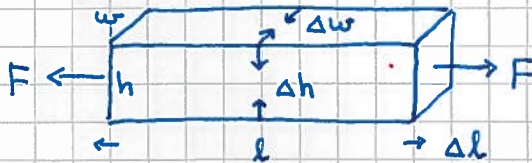
Skjærmodulen: $G = \frac{F/A}{\Delta x/L} = \frac{F/A}{\tan \theta} \stackrel{\theta \ll 1}{\approx} \frac{F/A}{\theta}$; $[G] = \text{Pa}$

Eks: Stål: $G \approx 79 \text{ GPa}$

For de fleste faste stoffer: $E \sim B > G$

De elastiske modulene er ikke uavhengige av hverandre; normalspenning genererer skjærspenning og omvendt.

Poissontallet:



$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\nu \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

↑
Poissontallet

Teoretiske sammenhenger:

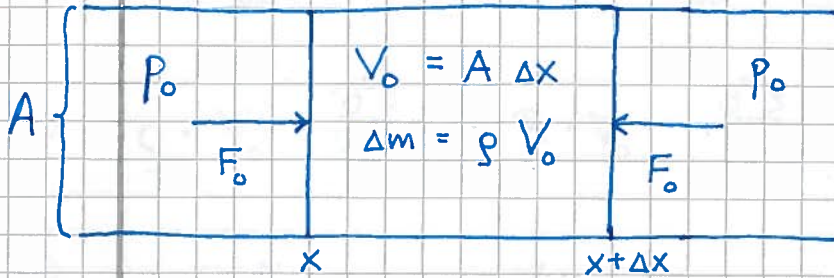
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad B = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Longitudinale mekaniske bølger. Lyd

[YF 16.1, 16.2; LL 10.6]

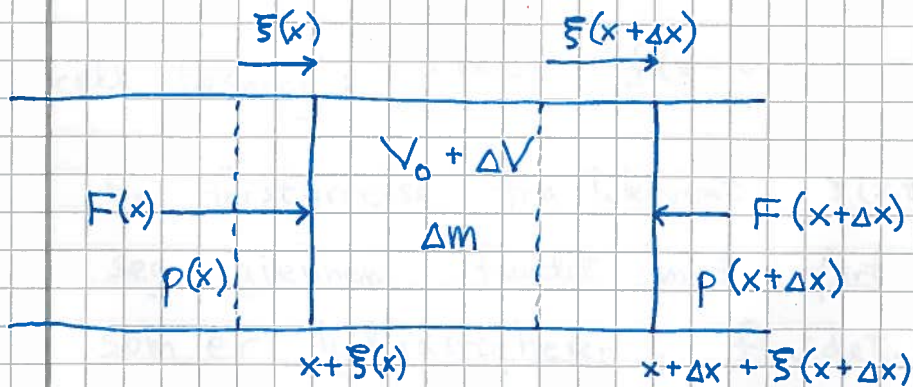
Ser på rør med fluid.

I likevekt:



ρ = masse pr volumenhet

Forstyrrelse (kompresjon eller utvidelse):



$$p(x) = p_0 + \Delta p(x)$$

$$p(x + \Delta x) = p_0 + \Delta p(x + \Delta x)$$

$\xi = \xi(x, t)$ = middlere utsving fra likevekt for molekyler med likevektsposisjon x

N2 for massen Δm :

$$\begin{aligned} \Delta m \cdot \ddot{\xi} &= F(x) - F(x + \Delta x) \\ &= [p(x) - p(x + \Delta x)] \cdot A \\ &= [\Delta p(x) - \Delta p(x + \Delta x)] \cdot A \end{aligned}$$

Fra s. 63:

$$B = - \frac{\Delta p}{\Delta V / V_0} \Rightarrow \Delta p = -B \frac{\Delta V}{V_0}$$

Fra figuren ser vi:

(66)

$$\Delta V = A \cdot [\xi(x+\Delta x) - \xi(x)] = A \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = V_0 \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \Delta p(x) - \Delta p(x+\Delta x) = -B \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} \right] = B \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \Delta m \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = B \cdot \Delta x \cdot A \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \rho \cdot V_0 \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = B \cdot V_0 \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} ; v = \sqrt{B/\rho}}$$

Generell løsning: $\xi(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$

Dvs: En forstyrrelse fra likevekt $\xi(x,t)$ forplanter seg gjennom fluidet med fart $v = \sqrt{B/\rho}$, som er lydhastigheten i fluidet.

Eks:

Luft. $\rho = 1.29 \text{ kg/m}^3$, $B = 1.42 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ($= \text{N/m}^2 = \frac{\text{kg m/s}^2}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2}$)

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{1.42 \cdot 10^5 \text{ kg/m} \cdot \text{s}^2}{1.29 \text{ kg/m}^3}} \approx 332 \text{ m/s}$$

Vann. $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $B = 2.2 \cdot 10^9 \text{ Pa}$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2.2 \cdot 10^9}{1000}} \text{ m/s} \approx 1.5 \text{ km/s}$$

(B øker forholdsvis mer enn $\rho \Rightarrow$ større v i vann enn i luft)

Mekaniske bølger i faste stoffer:

Tynn stang:

Longitudinale bølger; E erstatter B; $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$; $v = \sqrt{E/\rho}$

Eks: Stål. $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 200 \text{ GPa} \rightarrow v \approx 5.1 \text{ km/s}$

Generelt:

Forstyrrelse fra likevekt \Rightarrow Både normalspenning og skjærspenning

\Rightarrow Både longitudinale og transversale bølger

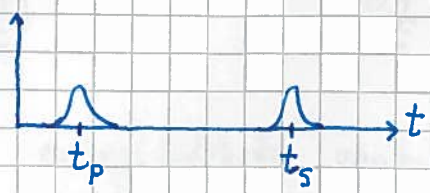
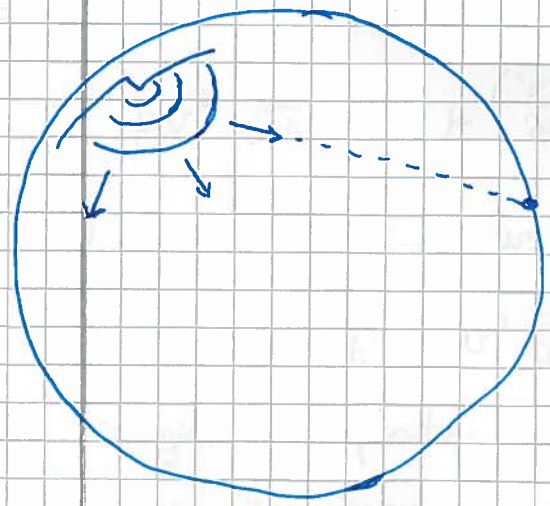
L: $v = \sqrt{(B + \frac{4}{3}G)/\rho}$

T: $v = \sqrt{G/\rho}$

Eks: Seismiske bølger og jordskjelvs

Primærbølge (L) $v_p = \sqrt{(B + \frac{4}{3}G)/\rho} \sim 5.5 - 13.7 \text{ km/s}$

Sekundærbølge (T) $v_s = \sqrt{G/\rho} \sim 3.0 - 7.3 \text{ km/s}$

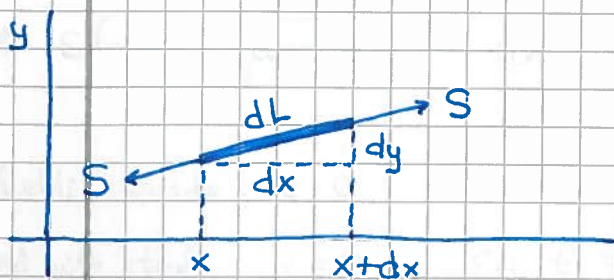


Måling av $t_s - t_p$ på diverse steder gjør det mulig å lokalisere hvor (og når) jordskjelvet skjedde.

Energi transportert med bølger [YF 15.5; LL 10.5]

(68)

Braker transv. bølge på streng som eksempel.



Likevekt: $K=0$, $U=0$

Forstyrrelse fra likevekt gir
strengsegmentet hastighet $(\partial y / \partial t)$
og forlengelse $(dL - dx)$

$$\text{Kin. energi: } dK = \frac{1}{2} dm v_y^2 = \frac{1}{2} \mu dx \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$

$$\text{Pot. energi: } dU = S \cdot (dL - dx)$$

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + (dy/dx)^2} \approx dx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right)$$

$$\Rightarrow dU = \frac{1}{2} S dx \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

Mekanisk energi pr lengdeenheter (energitetthet): $[E] = \text{J/m}$

$$E = dE/dx = dK/dx + dU/dx$$

$$= \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} S \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

Siden $y(x,t) = y(x \pm vt)$, er $\frac{\partial y}{\partial t} = \pm v \frac{\partial y}{\partial x}$.

Har også $v = \sqrt{S/\mu}$, dvs $S = \mu v^2$

Dermed:

$$E = \mu v^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \pm \mu v \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial x}$$

$E(x,t) = E(x \pm vt)$, dvs energitettheten oppfyller bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2},$$

dvs energien forplanter seg med hastighet v (her: $\sqrt{S/\mu}$)
i bølgens forplantningsretning.

Ekse: Harmonisk bølge, $y(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t)$.

(69)

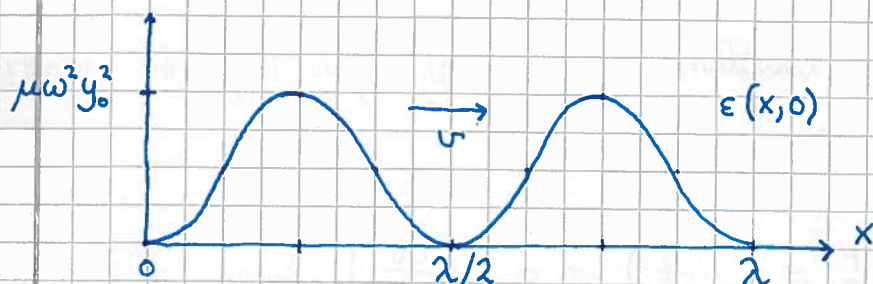
$$k = 2\pi/\lambda, \quad \omega = 2\pi/T, \quad v = \lambda/T = \omega/k$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -k y_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\Rightarrow \varepsilon(x,t) = \mu v^2 k^2 y_0^2 \sin^2(kx - \omega t) = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

Øjeblikksbilde, $t=0$: $\varepsilon(x,0) = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2 kx$

Ved gitt sted, $x=0$: $\varepsilon(0,t) = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2 \omega t$



Midlere energitethet i harmonisk bølge:

Romlig middelverdi: $\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\lambda \varepsilon(x,t) dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \varepsilon(x,t) dx$

Tidsmiddel:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\int_0^T \varepsilon(x,t) dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon(x,t) dt$$

Vi ser fra figuren ovenfor: $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2$

Tilsvarende er også $\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2$

Matematisk: $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, og vi må ha $\langle \sin^2 \varphi \rangle = \langle \cos^2 \varphi \rangle$, slik at $\langle \sin^2 \varphi \rangle = \langle \cos^2 \varphi \rangle = 1/2$.

$$\text{Evt: } \overline{\sin^2 \varphi} = \overline{\cos^2 \varphi} = 1/2$$

Utleddningene blir tilsvarende for en plan longitudinal bølge (dvs lydbølge) i et fluid.

⇒ Vi kan "oversette" resultatene direkte:

1D → 3D

$\mu \rightarrow \rho = \text{masse pr volumenhet}$

$\epsilon = dE/dx \rightarrow dE/dV = \text{energi pr volumenhet } (\text{J/m}^3)$

transv. strengutsving $y \rightarrow$ longitudinalt (midlere) molekylutsving ξ fra likevekt

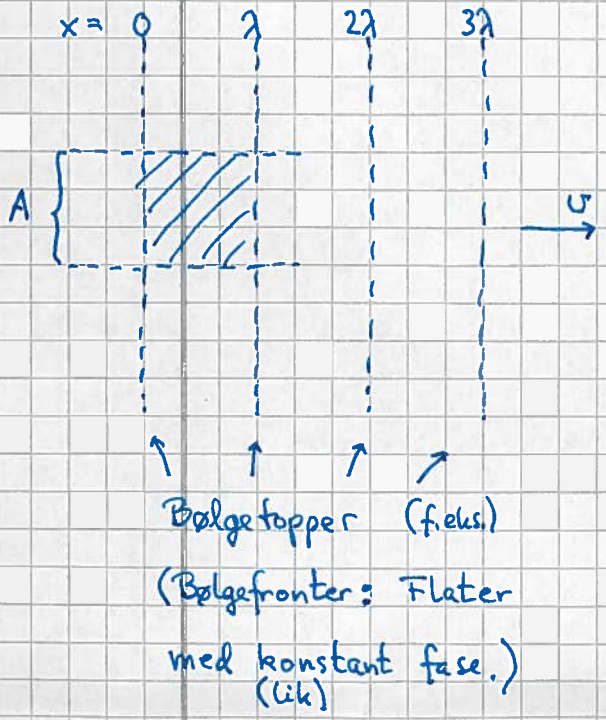
⇒ $\epsilon(x,t) = \rho v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 = \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = \pm \rho v \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x}$

med $v = \sqrt{B/\rho}$

Bølgens intensitet [YF 16.3; LL 10.5]

I = midlere overført effekt pr flateenhet ⇒ $[I] = \text{W/m}^2$

Eks: Plan harmonisk lydbølge



Energinnhold i skravert volum:

$\bar{\epsilon} \cdot A \cdot \lambda$

Denna energien passerer flaten med areal A ved $x = \lambda$ i løpet av en periode T

⇒ $I = \frac{\bar{P}}{A} = \frac{\bar{\epsilon} A \lambda / T}{A} = \underline{\underline{\bar{\epsilon} \cdot v}}$

$(v = \lambda/T)$

Desibel (dB)

(71)

Stort tallmessig spenn i lydintensiteter:

Knapt hørbar lyd: $I = 10^{-12} \text{ W/m}^2 = I_0 = \text{"referanseverdi"}$

Smertegrense: $I = 1 \text{ W/m}^2$

⇒ Bruker gjerne en logaritmisk skala:

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) = \text{lydtrykksnivå målt i dB (desibel)}$$

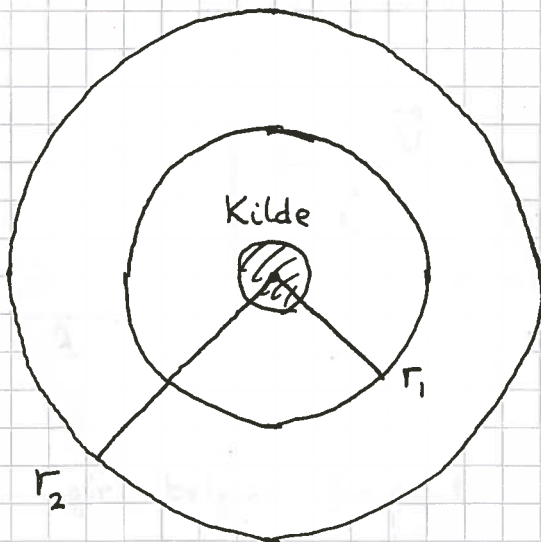
Eks: Høregrensen $\beta = 10 \log \frac{10^{-12}}{10^{-12}} = 10 \log 1 = \underline{0 \text{ dB}}$

Smertegrensen $\beta = 10 \log \frac{1}{10^{-12}} = 10 \cdot 12 = \underline{120 \text{ dB}}$

Kulebølger



Kuleformet bølgekilde ⇒ Bølge radielt utover med lik intensitet i alle retninger.



Kuleformede bølgefronter forplanter seg radielt utover.

Energibevarelse ⇒

Like stor effekt passerer vilkårlig kuleflate

$$\Rightarrow \langle P_1 \rangle = \langle P_2 \rangle \Rightarrow 4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2$$

$$\Rightarrow I_2 / I_1 = r_1^2 / r_2^2$$

$$\Rightarrow I(r) \sim 1/r^2$$

for kulebølger

Eks: $\beta = 110 \text{ dB}$ 2m unna kuleformet høyttaler.

Hvor langt unna er $\beta = 80 \text{ dB}$?

Løsn: $I(2\text{m}) = I_0 \cdot 10^{11} = A/2^2$; $I(r) = I_0 \cdot 10^8 = A/r^2$

$\Rightarrow r = 2 \cdot (10^{11-8})^{1/2} \text{ m} = 2 \cdot 10^{3/2} \text{ m} \approx \underline{\underline{2 \cdot 31.6 \text{ m}}} = \underline{\underline{63 \text{ m}}}$

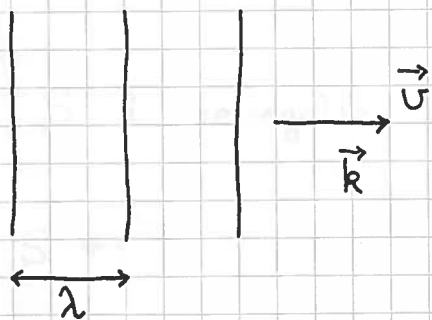
Sylinderformet bølgekilde \Rightarrow Sylinderbølger med lik effekt gjennom areal $L \cdot 2\pi r \sim r$

$\Rightarrow \underline{I(r) \sim 1/r}$

Plan bølgekilde \Rightarrow Plane bølger med lik effekt gjennom areal uavhengig av r (som nederst s. 70)

$\Rightarrow \underline{I(r) = \text{konst.}}$

Plan harmonisk bølge i vilkårlig retning :



$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{\xi}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$

\vec{k} = bølgetallsvektoren

$k = |\vec{k}| = 2\pi/\lambda$; $\hat{k} = \hat{U}$

\vec{k} angir bølgens forplantningsretning

$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$, $\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$

Eks: Forplantning i z -retning betyr at $k_x = k_y = 0$ og $k = k_z$

$\Rightarrow \vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{\xi}_0 \sin(kz - \omega t)$

Hvis L-bølge: $\vec{\xi}_0 = \xi_0 \hat{z}$. Hvis T-bølge: $\vec{\xi}_0$ i xy -planet

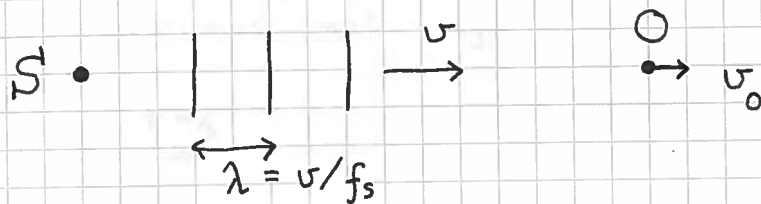
Dopplereffekt [YF 16.8; LL 10.8]

(73)

Relativ bevegelse mellom bølgekilde S og observatør O
(langs forbindelseslinjen)

⇒ Observert frekvens $f_o \neq$ utsendt frekvens f_s

① S i ro, O i bevegelse [Velger positive v mot høyre]

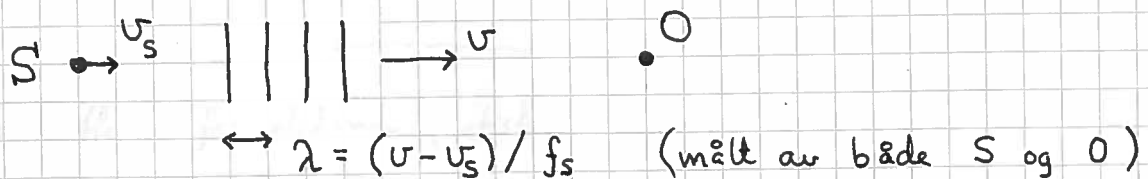


Bølgfarten relativt O: $v - v_o$

⇒ Frekvens målt av O:

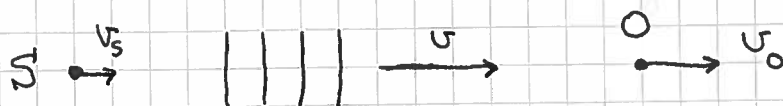
$$f_o = \frac{v - v_o}{\lambda} = \frac{v - v_o}{v} \cdot f_s < f_s \quad \text{når } v_o > 0$$

② S i bevegelse, O i ro



$$\Rightarrow f_o = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{v - v_s} \cdot f_s > f_s \quad \text{når } v_s > 0$$

③ Begge i bevegelse



$$\Rightarrow f_o = \frac{v - v_o}{\lambda} = \frac{v - v_o}{v - v_s} \cdot f_s$$

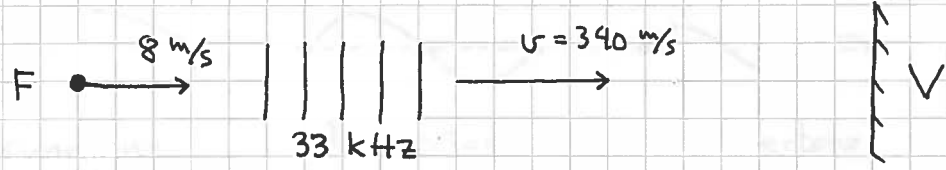
④ Mediet i bevegelse; vind!

$v_m =$ luftfartshastigheten $\Rightarrow v$ erstattes av $v + v_m$

$$\Rightarrow f_o = \frac{v + v_m - v_o}{v + v_m - v_s} \cdot f_s$$

Se youtube for diverse eksempler med tog og biler.

Eks: Flaggermus mot vegg.



Hvilken frekvens hører flaggermusen (F) på ekkoet fra vegg (V)?

Løsn: F er først kilden og V er observatør.

$$\text{Frekvens "observert" av V: } f_v = \frac{v}{v - v_F} \cdot f_F$$

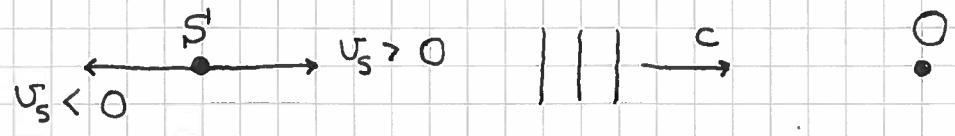
V sender lyd med samme frekvens f_v tilbake.

F er nå observatør, på vei mot kilden V: ($f_E = f_{\text{ekko}}$)

$$f_E = \frac{v + v_F}{v} \cdot f_v = \frac{v + v_F}{v - v_F} \cdot f_F = \frac{348}{332} \cdot 33 \text{ kHz} = \underline{\underline{34.6 \text{ kHz}}}$$

Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger:

$$v \rightarrow c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$



$$f_o \approx \frac{c}{c - v_s} \cdot f_s \quad (\text{så lenge } |v_s| \ll c)$$

"Rød-skift" når S på vei bort fra O (oss), dvs $v_s < 0$, og $f_o < f_s$, dvs endring av f_s i retning mindre frekvens ($f_{\text{rød}} < f_{\text{blå}}$)

Stående bølger

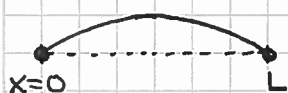
(75)

[YF 15.7, 15.8, 16.4 ; LL 10.3]

Harmonisk bølge på streng med lengde L må ha bølgelengde λ gitt ved

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

når strengen er fastspent i begge ender:



Grunntone.

$$\lambda_1 = 2L$$



1. overtone

$$\lambda_2 = L$$



2. overtone

$$\lambda_3 = \frac{2}{3}L$$

osv.

Kan oppfattes som overlapping av to bølger som forplanter seg hver sin vei:

$$y(x,t) = y_1 \sin(kx - \omega t) + y_2 \sin(kx + \omega t)$$

$$\text{Fast i } x=0 \Rightarrow y(0,t) = -y_1 \sin \omega t + y_2 \sin \omega t = 0$$

$$\Rightarrow y_1 = y_2 = y_0$$

"Identitet": $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$

$$\Rightarrow y(x,t) = y_0 \left[\sin kx \cos \omega t - \cos kx \sin \omega t + \sin kx \cos \omega t + \cos kx \sin \omega t \right]$$

$$= \underline{2y_0 \sin kx \cos \omega t}$$

som er en harmonisk svingning ($\cos \omega t$) med posisjonsavhengig amplitude ($2y_0 \sin kx$).

Stående bølge; ingen netto energitransport.

$$y(L,t) = 0 \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi$$

$$\Rightarrow \lambda_n = 2L/n$$

som vi allerede har innsett.

Resonansfrekvensene ($v = \sqrt{S/\mu}$; $f = v/\lambda$):

$$f_n = \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot \frac{n}{2L}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Eks: Gitarstreng, lengde 650 mm (mellom faste punkter), diameter 0.80 mm, stål. Bestem strekk-kraft som gir frekvens (grunntone) 196.0 Hz. (G; streng nr 3)
Stål: 7.86 g/cm^3 .

$$\begin{aligned} \text{Løsn: } \mu &= \rho \cdot A = \rho \cdot \pi r^2 = \rho \pi d^2/4 = 7.86 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot \pi \cdot (0.80 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2/4 \\ &= 3.95 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= 4L^2 \mu f_1^2 = 4 \cdot (0.650 \text{ m})^2 \cdot 3.95 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot (196.0 \text{ s}^{-1})^2 \\ &= \underline{\underline{257 \text{ N}}} \end{aligned}$$

Helt tilsvarende for stående lydølger i et langt, tynt rør med lengde L som er åpent (eller lukket) i begge ender:



Åpen ende $\Rightarrow p(0) = p(L) = p_0$, dvs $\Delta p = p - p_0 = 0$;
evt. max utsving for utsvingsølgen $\xi(x,t)$

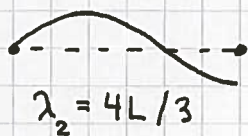
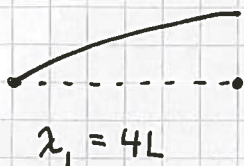
$$\Rightarrow \lambda_n = 2L/n$$

$$\Rightarrow \text{Resonansfrekvenser: } f_n = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \cdot \frac{n}{2L} \quad (v = \sqrt{B/\rho})$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

Med to ulike grensebetingelser :

(77)



$$\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}$$

($n=1,2,3,\dots$)

Dvs: Streng med 1 fast og 1 fri ende, evt.
rør med 1 åpen og 1 lukket ende.

Tverrflytte : 2 åpne ender

Klarnett : 1 åpen, 1 lukket; sylindrisk rør

Obo, fagott, saksofon : 1 åpen, 1 lukket; konisk rør \Rightarrow mer komplisert...

Eks: Stående lydølge, to åpne ender, ^{max} utsvingsamplitude $2\xi_0$.
Bestem max trykkamplitude.

Løsn: $\xi(x,t) = 2\xi_0 \cos kx \cos \omega t$

$$\Delta p(x,t) = -B \cdot \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} = 2kB\xi_0 \sin kx \cos \omega t$$

Max amplitude : $2kB\xi_0$ ($k = 2\pi/\lambda$)

Exp / Demoforsøk :

- Stående bølger på spiralfjær
- Stående ^{lyd-}bølger i rør med to eller en åpen ende

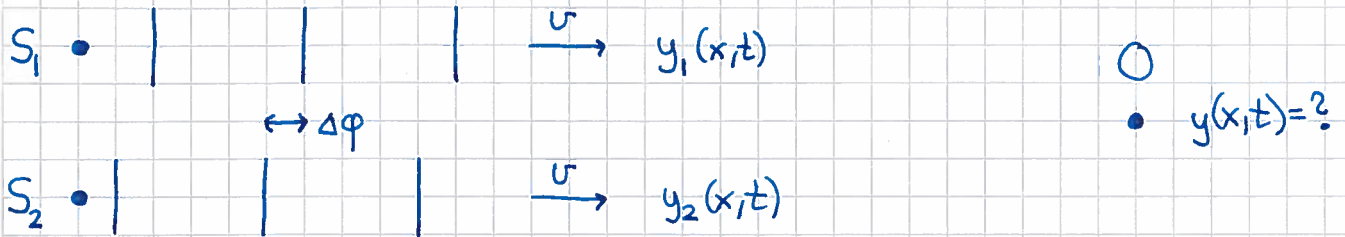
Interferens

[YF 15.6, 16.6 ; LL 10.7]

(78)

= overlapping av to eller flere bølger på et gitt sted til en gitt tid

① To bølger i samme retning med lik frekvens, med faseforskjell $\Delta\varphi$



Total bølge ved O :

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t) + y_0 \cos(kx - \omega t + \Delta\varphi)$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a-b}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2}$$

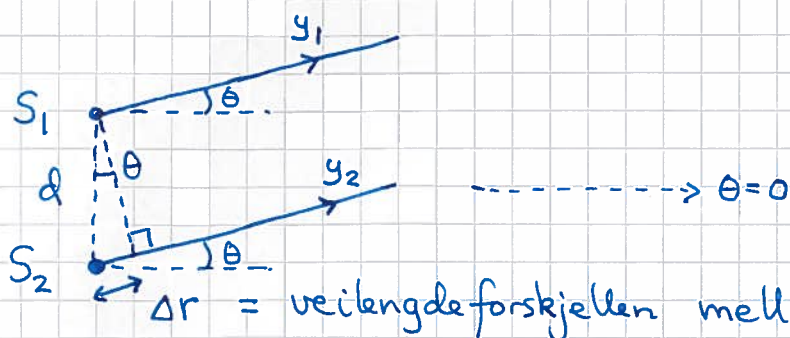
$$\Rightarrow y(x,t) = 2y_0 \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \cdot \cos(kx - \omega t + \frac{\Delta\varphi}{2})$$

\Rightarrow Konstruktiv interferens hvis $\Delta\varphi = 0$; da er y_1 og y_2 i fase ved O .

Hvis en bølge alene gir intensitet I_1 ved O , vil to bølger i fase gi intensitet $I_2 = 4I_1$.

Destruktiv interferens ved O hvis $\Delta\varphi = \pi$; da er y_1 og y_2 i motfase, og $I_2 = 0$.

② Retningsavhengig interferens med to like bølgekilder i fase



$\Delta r =$ veiklengdeforskjellen mellom y_1 og y_2

$$\Delta r = d \cdot \sin \theta ; \quad d = \text{avstanden mellom } S_1 \text{ og } S_2$$

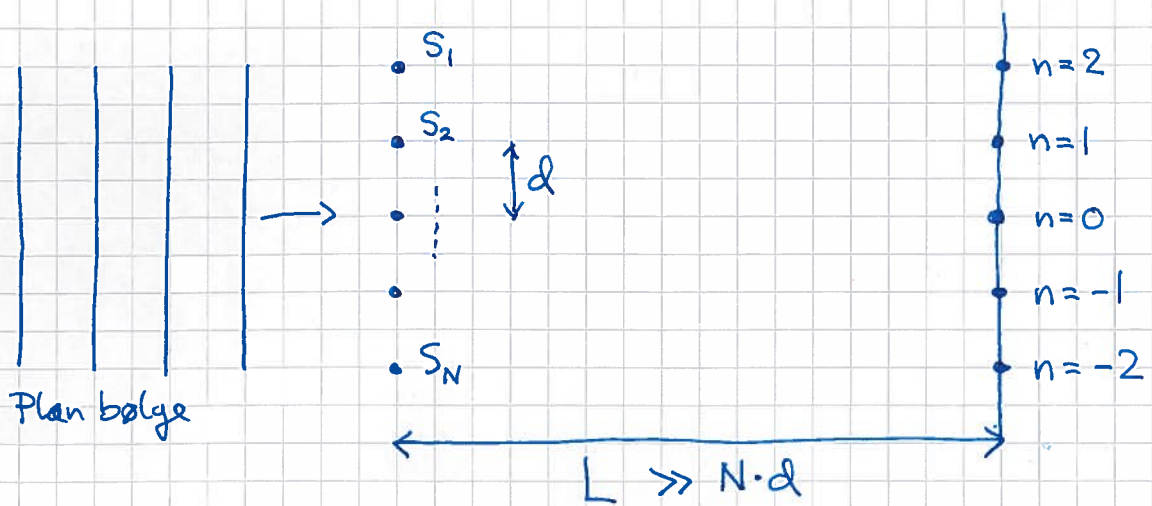
Anta at bølgene observeres på en skjerm (detektor) i stor avstand ($L \gg d$) fra kildene.

Konstruktiv interferens når $\Delta r = d \sin \theta = n \lambda$

Destruktiv ———— når $\Delta r = d \sin \theta = (n + 1/2) \lambda$
($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

③ Som ②, men med mange bølgekilder i fase.

Oppnås ved å sende en plan bølge inn mot et diffraksjonsgitter: Mange smale spalteåpninger med avstand d i mellom. Hver spalteåpning er da opphav til en sylinderbølge som forplanter seg mot detektoren. Veiklengdeforskjell $d \sin \theta = n \lambda$ mellom nabospalter gir konstruktiv interferens mellom alle N delbølgene, og maksimal intensitet. I andre retninger interfererer delbølger med "alle mulige faser", og intensiteten blir omtrent lik null.



Eks/Exp: Laserpenner og diffraksjonsgitter

Laserlys er E.M. bølger med skarpt definert
bølglengde λ .

Rød: 650 nm

Grønn: 532 nm

Blå: 405 nm

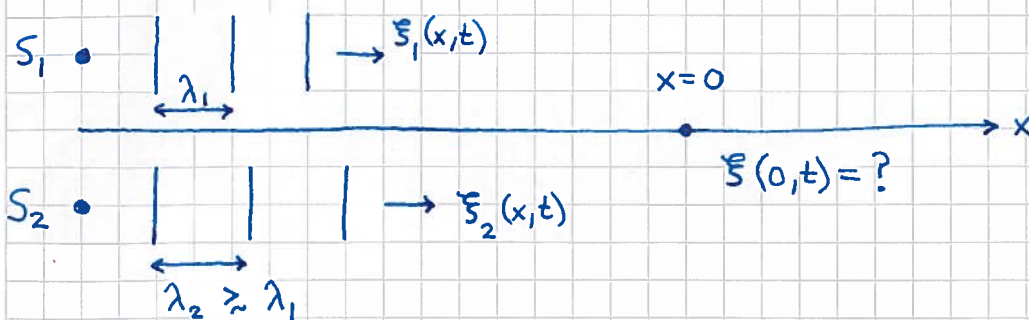
Diffr. gitter: 100, 300 og 600 spalter pr mm

$$\Rightarrow d = \frac{1}{100} \text{ mm}, \frac{1}{300} \text{ mm} \text{ og } \frac{1}{600} \text{ mm}$$

④ Svingning; interferens i tid
[YF 16.7; LL 10.7]

81

To bølgekilder (f.eks. lyd) med litt forskjellig frekvens.



$$\begin{aligned}\xi(x,t) &= \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) \\ &= \xi_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + \xi_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t) \\ &= 2\xi_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t\right) \cdot \cos(kx - \omega t)\end{aligned}$$

der $\Delta k = k_1 - k_2$, $\Delta \omega = \omega_1 - \omega_2$, $k = \frac{k_1 + k_2}{2}$, $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$
og $\Delta k \ll k$, $\Delta \omega \ll \omega$

Ved $x=0$: $\xi(0,t) = 2\xi_0 \cos\left(\frac{\Delta \omega}{2} t\right) \cdot \cos(\omega t)$

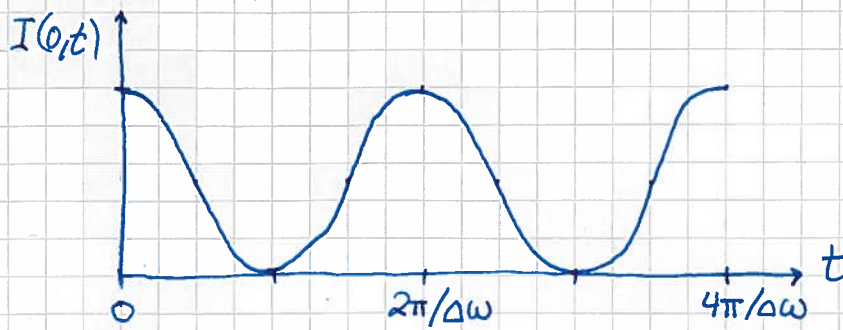
Intensitet ved $x=0$:

$$\begin{aligned}I(0,t) &= \langle \epsilon \rangle \cdot v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (2\xi_0)^2 v \cdot \cos^2\left(\frac{\Delta \omega}{2} t\right) \\ &= \rho \omega^2 \xi_0^2 v [1 + \cos(\Delta \omega \cdot t)]\end{aligned}$$

Her er $\langle \epsilon \rangle$ et tidsmiddel over en periode av den raske svingningen, $T = 2\pi/\omega$, dvs den som gir "tonen" $f = (f_1 + f_2)/2$.

Faktoren $[1 + \cos(\Delta\omega \cdot t)]$ gir en langsom variasjon i intensiteten:

(82)



Animasjon:
svevning.m

Vi hører svevning ("beats"), der $I(t)$ varierer mellom null ("svak") og max ("sterk") med periode

$$T_s = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{f_s}$$

$$f_s = f_1 - f_2 = \text{svevefrekvensen}$$

Ned to stemmegaffer:

Ca 3 svingninger i intensiteten pr sekund

$$\Rightarrow f_s \approx 3 \text{ Hz}$$

$$\Rightarrow f_1 = 440 \text{ Hz} \quad (\text{uten tape})$$

$$f_2 = 437 \text{ Hz} \quad (\text{med tape})$$

(evt. 443 Hz; må sjekke om $f_2 > f_1$ eller $f_1 > f_2$)

Gruppestastighet. Dispersjon [LL 10.7, 10.10; YF 33.4]

Summen av to harmoniske bølger med litt ulike bølgelengder er

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) = 2\xi_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cdot \cos(kx - \omega t)$$

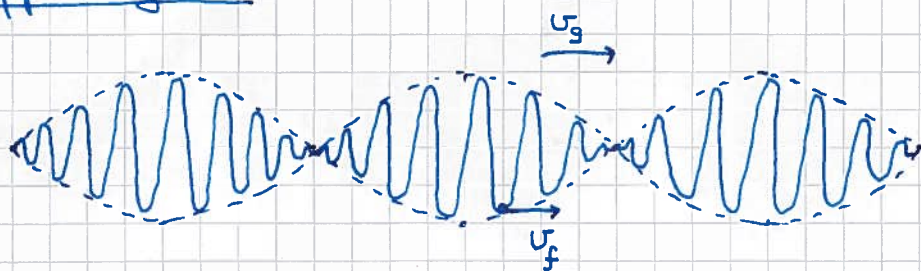
det er en raskt varierende bærebølge $\cos(kx - \omega t)$ med

hastighet $v = v_f = \omega/k =$ fasehastigheten, kombinert med

en langsomt varierende modulasjonsbølge $\cos\left(\frac{1}{2}\Delta kx - \frac{1}{2}\Delta\omega t\right)$

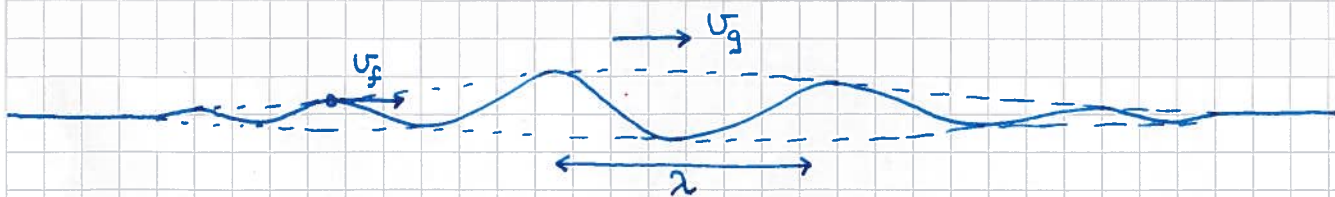
med hastighet $v_g = \Delta\omega/\Delta k = d\omega/dk$ (små $\Delta\omega$ og Δk) =

gruppestastigheten :



[Animasjon: bølgepakke 2. m]

En sum av mange harmoniske bølger med bølgelengder omkring en typisk (gjennomsnittlig) bølgelengde λ kan representere en romlig avgrenset bølgepakke :



- Hele bølgepakken, og dermed energien i bølgepakken, forplanter seg nå med gruppestastigheten $v_g = d\omega/dk$.
- Vi kaller funksjonen $\omega(k)$ dispersjonsrelasjonen; formen på denne avgjør v_g
- Bølger på streng, lydbølger i fluid og elektromagnetiske bølger i vakuum har fasefart uavhengig av k (hvor $\sqrt{5/\mu}$, $\sqrt{B/\rho}$ og c). Da er $\omega = v_f \cdot k$ og $v_g = d\omega/dk = v_f$; såkalt linær dispersjon.

Overflatebølger på vann

To typer krefter virker på vannet i overflaten:

- tyngdekraften
- overflatespenningen

Dypt vann:

$$\omega(k) = \sqrt{g \cdot k + \gamma \cdot k^3 / \rho} \quad (k = 2\pi / \lambda)$$

med $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

$\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$

$\gamma = 0.073 \text{ N/m}$ (overflatespenningen)

Skiller da mellom

- tyngdebølger; $g \gg \gamma k^2 / \rho$ ($\lambda \gg 2\pi \sqrt{\rho / g} \approx 1.7 \text{ cm}$)
- kapillærbølger; $g \ll \gamma k^2 / \rho$ ($\lambda \ll 1.7 \text{ cm}$)

Tyngdebølger: $\omega \approx \sqrt{gk} \Rightarrow v_f = \sqrt{g/k}, v_g = \frac{1}{2} \sqrt{g/k} = \frac{1}{2} v_f$

\Rightarrow Bølgetoppene beveger seg framover i bølgepakken

Kapillærbølger: $\omega \approx \sqrt{\gamma k^3 / \rho} \Rightarrow v_f = \sqrt{\gamma k / \rho}, v_g = \frac{3}{2} \sqrt{\gamma k / \rho} = \frac{3}{2} v_f$

\Rightarrow Bølgetoppene beveger seg bakover i bølgepakken

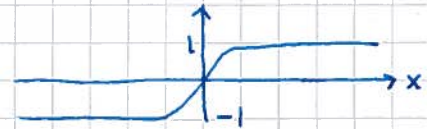
Se notat og filmer på hjemmesiden.

Animasjon: bølgepakke.m

Tyngdebølger, generelt:

$$\omega^2 = g \cdot k \cdot \tanh(kD) ; D = \text{vannedybden}$$

$$\tanh x = \sinh x / \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



$$|x| \ll 1 \Rightarrow \tanh x \approx x ; x \gg 1 \Rightarrow \tanh x \approx 1$$

$$\text{Dypt vann: } kD = 2\pi D / \lambda \gg 1 \Rightarrow \omega(k) = \sqrt{gk} \quad (\text{ok})$$

$$\text{Grunt vann: } kD = 2\pi D / \lambda \ll 1$$

$$\Rightarrow \omega^2 = gk \cdot kD = gD \cdot k^2$$

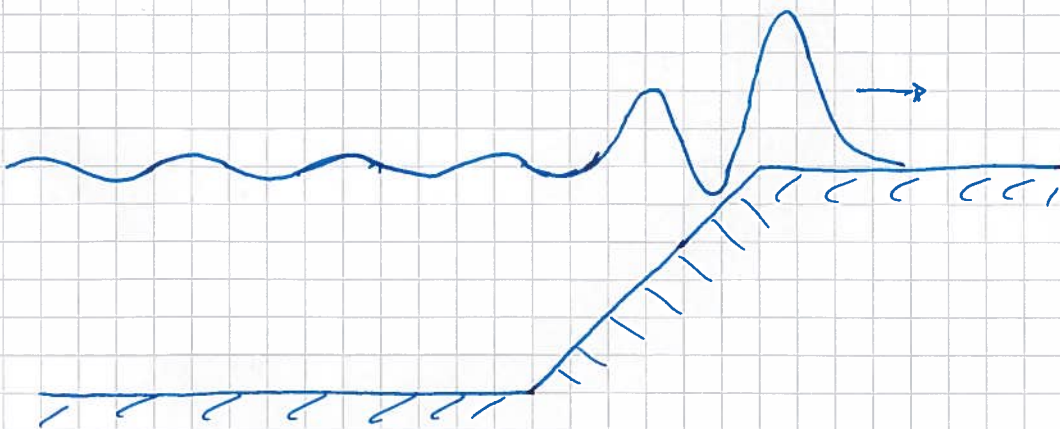
$$\Rightarrow \omega(k) = \sqrt{gD} \cdot k \Rightarrow v_f = v_g = \sqrt{gD}$$

Eks: Tsunami

Jordskjelv på havbunnen kan gi overflatebølger med bølgelengder opp mot flere hundre kilometer.

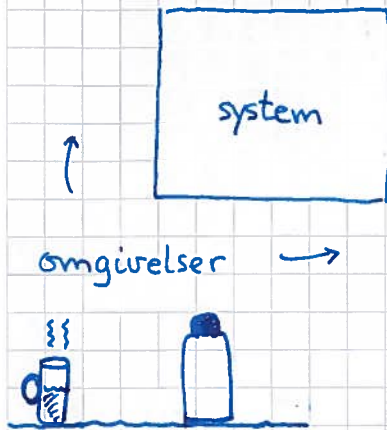
Da er $D \ll \lambda$, og vi er alltid på grunt vann.

På vei mot land øker dybden D , og dermed hastigheten v_g . Pga energi bevarelse må da amplituden øke, potensielt med katastrofale følger.



[YF 17-20 ; LHL 13-18]

System og omgivelser



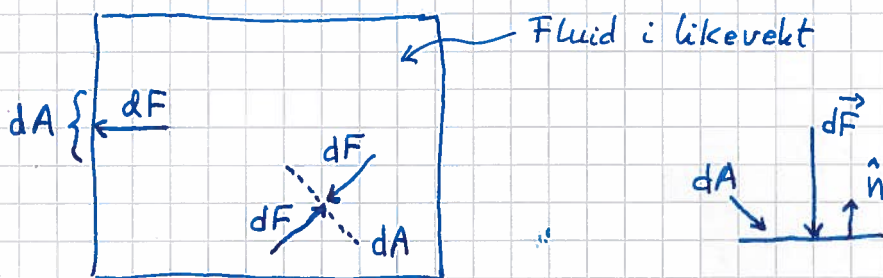
Systemet kan utveksle energi og/eller masse med omgivelsene.

Eks:

Kaffekopp utveksler både energi (varme) og masse (molekyler) med lufta omkring.
 ⇒ Termisk kontakt og materielt åpent.

En god termos med lokk er termisk isolert og materielt lukket.

Trykk [YF 11.4, 12.2, 12.3 ; LL 7.2, 8.1-8.4]



$p = dF/dA =$ trykket i fluidet (skalar og isotrop)

$$d\vec{F} = -p d\vec{A} = -p dA \hat{n}$$

$$[p] = \text{N/m}^2 = \text{Pa} \text{ (pascal)}$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ atm} = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} \approx 1 \text{ bar} \text{ ("normalt" lufttrykk)}$$

$$1 \text{ psi} = \text{pound pr square inch}$$

$$= 0.454 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 / (25.4 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 \approx 6.9 \text{ kPa}$$

$\text{N}_2, \text{O}_2, \text{CO}_2, \text{H}_2\text{O}$ etc bidrar med hvert sitt partialtrykk til lufttrykket

Temperatur og termisk likevekt [YF 17.1 ; L4L 13.1]

(87)



↑
Lukket, men
termisk kontakt

Hvis netto energistrøm mellom A og B er null,
er A og B i termisk likevekt.

Da har A og B samme temperatur, $T_A = T_B$.

Måler T med termometer.

En endring i T fører til en endring i

- væskevolum (og gassvolum)
- gasstrykk
- lengde (og volum) av fast stoff
- elektrisk motstand

osv.

Enheter og kalibrering:

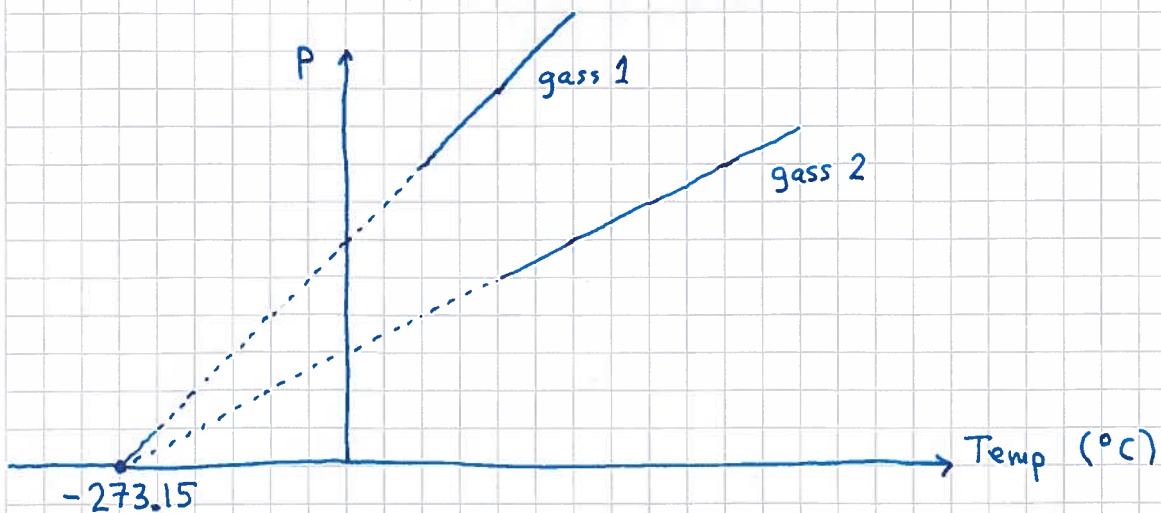
Celsius:

$T = 0^\circ\text{C}$ når H_2O fryser ved trykk 1 atm

$T = 100^\circ\text{C}$ — " — koker — " —

Absolutt temperatur:

Hvis volumet V holdes konstant, og $p(T)$ måles for
ulike gasser med lav tetthet:



Finnes at p øker lineært med T , og at ekstrapolering til $p=0$ gir $T = -273.15^\circ\text{C}$ for alle gassene.

\Rightarrow Innfører absolutt temperatur slik at $T = 0\text{ K}$ (kelvin) tilsvarer -273.15°C (det absolute nullpunkt).

$\Delta T = 1\text{ K}$ tilsvarer $\Delta T = 1^\circ\text{C}$.

$\Rightarrow \text{H}_2\text{O}$ fryser ved 273.15 K og koker ved 373.15 K (ved 1 atm)

Trippelpunkt for H_2O :

Is, vann og damp i samtidig termisk likevekt.

Skjer kun ved $T_t = 273.16\text{ K} = 0.01^\circ\text{C}$, med damptrykk (partialtrykket til H_2O) $p_t = 612\text{ Pa}$.

Standardreferanse siden 1954.

Tilstandsligning for ideell gass [YF 18.1; LHL 13.3]

Ekspenimenter med gasser med lav tetthet gir

$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$

Ideell gass tilstandsligning

Tilstandsvariable:

p = trykk ($\text{Pa} = \text{N/m}^2 = \text{J/m}^3$)

V = volum (m^3)

T = temperatur (K)

n = stoffmengde (mol)

1 mol av et stoff inneholder like mange "byggeklosser"

(dvs atomer eller molekylar) som det er C -atomer i 12 g av

isotopen ^{12}C ; $1\text{ mol} \approx 6.022 \cdot 10^{23}$ molekylar

Avogadros tall: $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$

Gasskonstanten: $R \approx 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

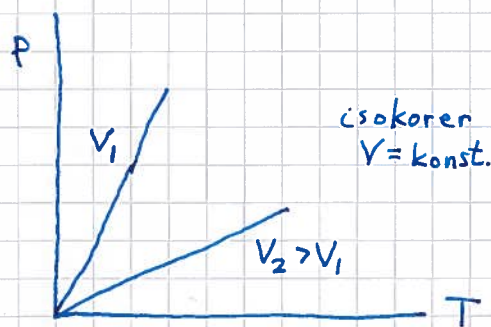
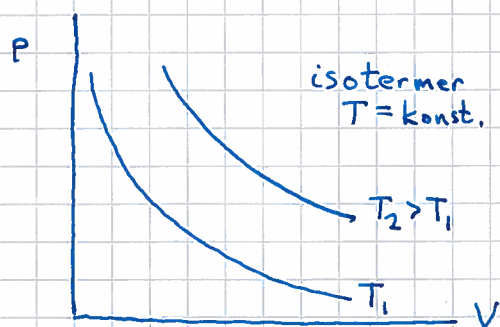
Antall molekylar i n mol: $N = n \cdot N_A$

$$\Rightarrow pV = \frac{N}{N_A} RT = N k_B T$$

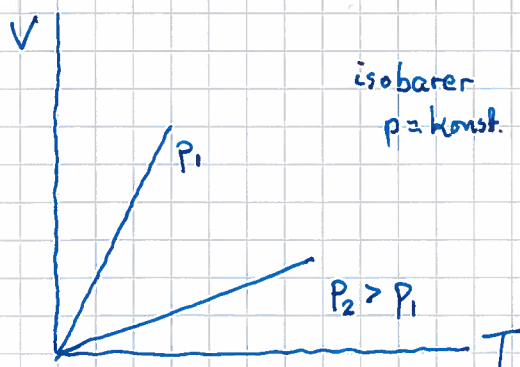
Boltzmanns konstant: $k_B = R/N_A = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$

Med gitt stoffmengde n kan nå p , V og T framstilles som funksjoner av de to andre, f.eks. med en av dem holdt konstant:

$$p(V, T) = \frac{nRT}{V}$$



$$V(p, T) = \frac{nRT}{p}$$

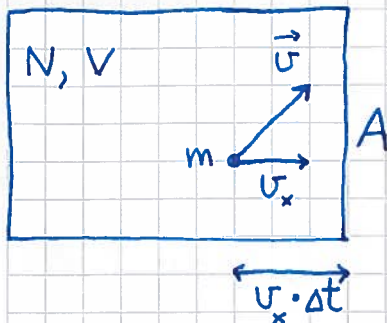


Mikroskopisk tolkning av gasstrykk og temperatur

(90)

[YF 18.3; LHL 14.1]

Anta gass med lav tetthet, isotrope (retningsuavhengige) forhold og elastiske kollisjoner mot beholderens vegger.



ΔP_x = overført impuls fra gassmolekylene til veggen (med areal A) i løpet av tiden Δt

$$\Delta P_x = \underbrace{2 m v_x}_{\text{overført impuls pr molekyl}} \cdot \underbrace{\frac{N}{2}}_{\text{antall molekyler med } v_x > 0} \cdot \underbrace{\frac{A v_x \Delta t}{V}}_{\text{andel av molekylene som treffer høyre vegg i løpet av tiden } \Delta t}$$

Newtons 2. lov, $F_x = \Delta P_x / \Delta t$, gir nå trykket i gassen:

$$p = F_x / A = (\Delta P_x / \Delta t) / A = \frac{N}{V} \cdot m v_x^2$$

Vi må ta hensyn til at molekylene har en isotrop fordeling av hastigheter:

$$v_x^2 \rightarrow \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \quad (\text{siden } v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2, \text{ og fordelingen er isotrop})$$

Her angir $\langle \dots \rangle$ middelværdien for de N molekylene.

Midlere kinetiske translasjonsenergi pr molekyl er

$$\langle K_{\text{trans}} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$$

Dermed:

$$p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle K_{\text{trans}} \rangle$$

Sammenligning med $pV = Nk_B T$ gir nå en mikroskopisk tolkning av absolutt temperatur:

(91)

$$k_B T = \frac{2}{3} \langle K_{\text{trans}} \rangle$$

dvs T er et direkte mål på gassmolekylenes midlere translasjonsenergi: $\langle K_{\text{trans}} \rangle = \frac{3}{2} k_B T$

Molekylenes midlere hastigheter:

$$\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0 \quad \text{pga symmetri}$$

$$\langle v^2 \rangle = 3 k_B T / m$$

RMS-hastigheten ("Root Mean Square"):

$$v_{\text{rms}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3 k_B T / m}$$

Eks: Hva er v_{rms} for vannmolekyler i luft ved 300 K?

$$\text{Løsn: } m = 18 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 2.99 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v_{\text{rms}} &= \sqrt{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 300 \text{ K} / 2.99 \cdot 10^{-26} \text{ kg}} \\ &= \underline{\underline{645 \text{ m/s}}} \end{aligned}$$

N_2 , O_2 og CO_2 er tyngre, og har dermed litt mindre v_{rms} .

Termodynamiske koeffisienter [YF 17.4; LHL 13.2]

(92)

Lineær utvidelseskoeffisient (kun faste stoffer):

$$\alpha = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta L/L}{\Delta T} \right\}_{p = \text{konst.}} = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_p$$

Eks: $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ for stål

⇒ jernbaneskinne litt lenger om sommeren enn om vinteren;
legges med et lite mellomrom for å unngå salslyng

Volumutvidelseskoeffisient:

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p ; \quad \beta = 3\alpha \text{ for faste stoffer, siden } V = L^3$$

Eks 1: $\beta(\text{glass}) = 2.7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \ll \beta(\text{etanol}) \approx 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

⇒ sprøspøylen i termometeret stiger når T øker

Eks 2: $\beta(\text{H}_2\text{O}) < 0$ mellom 0°C og 4°C

⇒ større masse tetthet ved 4°C enn ved 0°C

⇒ innsjøer bunnfryser (som regel) ikke, og fisken overlever

Isoterm kompressibilitet:

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{B} ; \quad B = \text{isoterm bulkmodul}$$

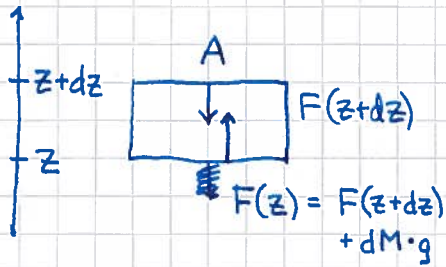
Trykk - koeffisient:

$$\gamma = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

Alle disse koeffisientene måles ved å måle sammenhengende endringer i to termodynamiske størrelser.

Trykkvariasjon i atmosfæren

(93)



$$\begin{aligned} dM &= \mu dV = \mu A dz \\ &= \text{massen til lufta i volum } dV \\ \mu &= \text{luftas massetetthet (kg/m}^3\text{)} \end{aligned}$$

Tyngden av dM må i likevekt tilsvare økningen i trykket fra $z+dz$ til z ganget med arealet A :

$$\Delta p \cdot A = -dM \cdot g = -\mu A dz \cdot g \Rightarrow \Delta p = -\mu g dz \quad *$$

$$\mu = \langle m \rangle \cdot N/V \quad ; \quad \langle m \rangle = \text{midlere molekylvekt} \approx 29 \text{ g/mol} \\ \approx 4.8 \cdot 10^{-26} \text{ kg pr molekyl}$$

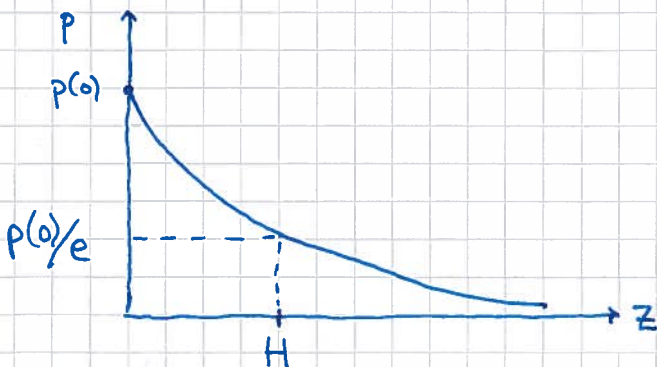
$$pV = Nk_B T$$

$$\Rightarrow \mu = \langle m \rangle \cdot \frac{p}{k_B T} \Rightarrow \Delta p = -\langle m \rangle g \frac{p}{k_B T} dz$$

$$\Rightarrow \int_{p(0)}^{p(z)} \frac{\Delta p}{p} = \int_0^z \left(-\frac{\langle m \rangle g}{k_B T} \right) dz$$

Her varierer både g og T med høyden z , hvis vi går høyt nok opp i atmosfæren, men la oss for enkelhets skyld anta konstante g og $T \approx 260 \text{ K}$. Får da:

$$p(z) = p(0) \exp(-z/H) \quad \text{med} \quad H = k_B T / \langle m \rangle g \approx \underline{7.6 \text{ km}}$$



Øving 10:
Namensk løsning
med z -avhengig T .

* [Barometer: $\Delta p = -\mu g h$; $h =$ høydeforskjellen på kvikksølsøylen]

Varme og varmekapasitet [YF 17.5; LHL 13.2]

94

Hva er varme?

Varme = Energi overført pga temperaturforskjell

Andre former for energioverføring er arbeid.

Varmekapasitet = $\frac{\text{Tilført varme}}{\text{Temperaturøkning}}$

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

Dvs: $\Delta Q = C \cdot \Delta T$ = varmeenergimengden som må tilføres systemet for å øke temperaturen med ΔT .

Stor $C \Rightarrow$ Mye varme må tilføres for å gi ønsket ΔT .

Måler C ved å måle sammenhengende ΔQ og ΔT , typisk med p eller V holdt konstant:

$$C_p = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_p ; \quad C_v = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_v$$

Enhet: $[C] = \text{J/K}$

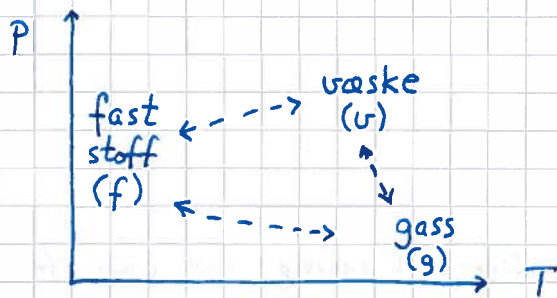
Molar varmekap.: $c_m = C/n$ $[c_m] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

Varmekap. pr masseenh. : $c = C/M$ $[c] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$

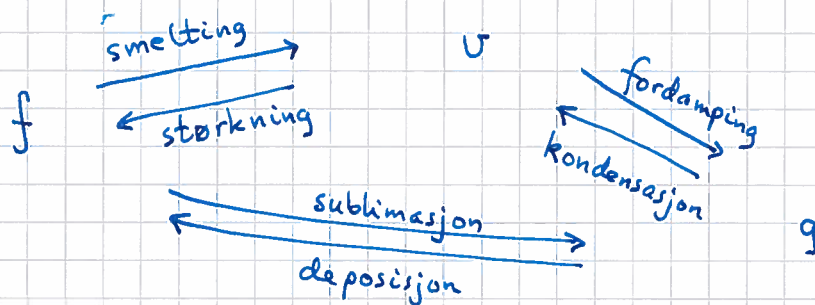
Faseoverganger. Latent varme

[YF 17.6, 18.6 ; LHL 13.2, 17.10]

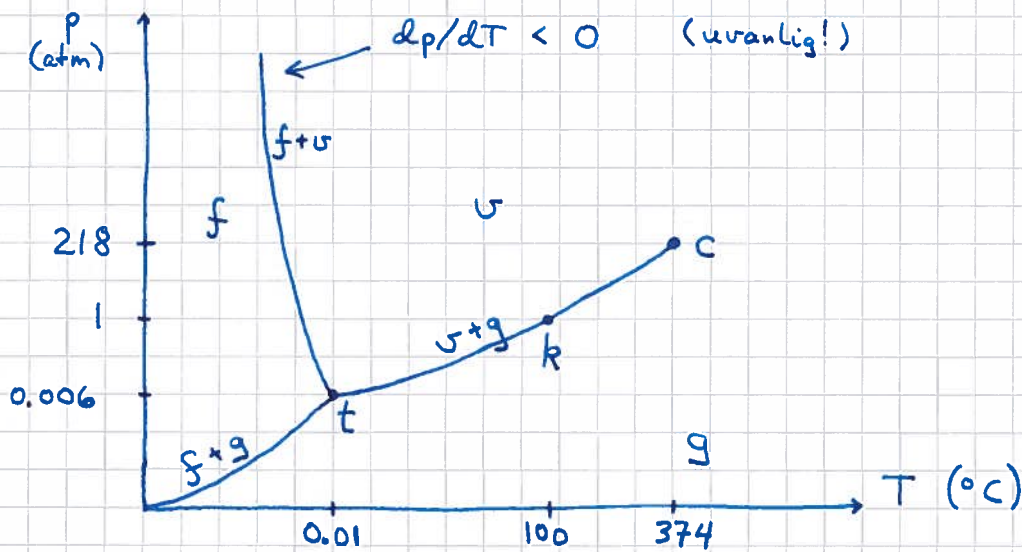
Kvalitativt, i et pT-diagram:



Vi markerer faseoverganger med koeksistenslinjer :



Særlig interessant er selvsagt H₂O :



På koeksistenslinjene (f+v, v+g, f+g) er to faser i likevekt med hverandre. I trippelpunktet (t) er alle tre faser i samtidig likevekt.

Kokepunktet (k): Når $T = T_k$ er damptrykket like stort som det omgivende ("faktiske") trykket. Når T passerer T_k blir det energetisk gunstig med gass framfor væske, og væske omdannes til gass i store mengder. Væsken koker! (Krever energi å bryte bindinger.) (96)

Kritisk punkt (c): Her ender $v+g$ koeksistenslinjen, og forskjellen mellom væske og gass opphører. Når $p > p_c$ og $T > T_c$ er det ingen forskjell på væske og gass, og stoffet er et såkalt superkritisk fluid.

Latent varme:

Må bryte bindinger for å smelte et fast stoff eller fordampe en væske (eller sublimere et fast stoff).

Krever tilførsel av energi / varme.

Systemet holder seg på koeksistenslinjen, dvs $T = \text{konstant}$, inntil alt er smeltet eller fordampet (eller sublimert).

L = påkrevd varme for å smelte / fordampe / sublimere en gitt mengde stoff ved en gitt temperatur ($\Delta T = 0$).

For H_2O (nær trippelpunktet):

$$L_{sm} \approx 80 \text{ cal/g}, \quad L_f \approx 600 \text{ cal/g}, \quad [L_f \rightarrow 0 \text{ nær } T \rightarrow T_c]$$

[$L_f \approx 540 \frac{\text{cal}}{\text{g}}$ ved 1 atm]

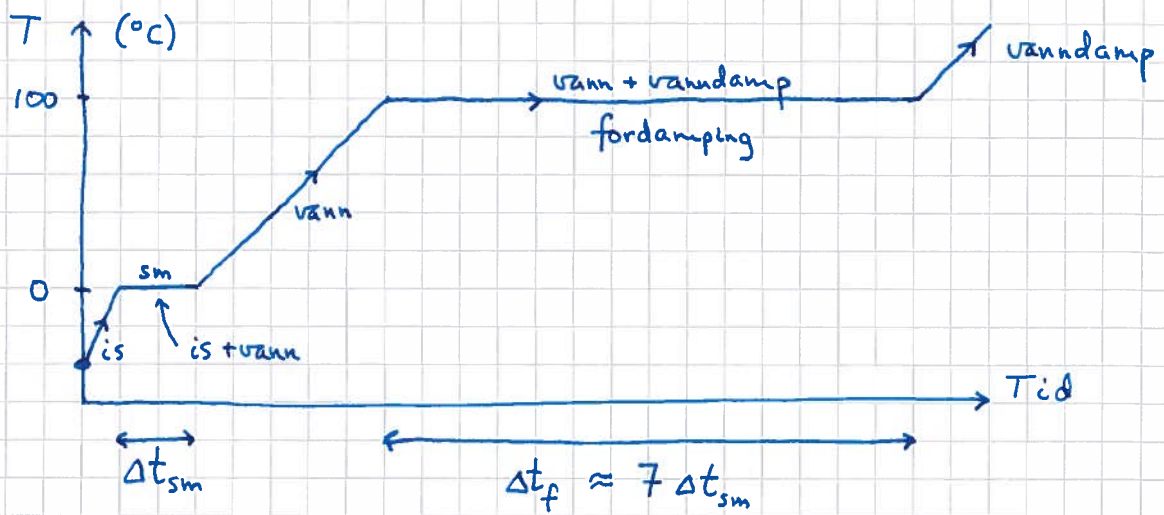
$$L_{sub} \approx 680 \text{ cal/g} \quad (\text{dvs } L_{sub} \approx L_{sm} + L_f; \text{ OK})$$

1 cal (kalori) = varmen som øker T fra 14.5°C til 15.5°C i 1g H_2O ved 1 atm

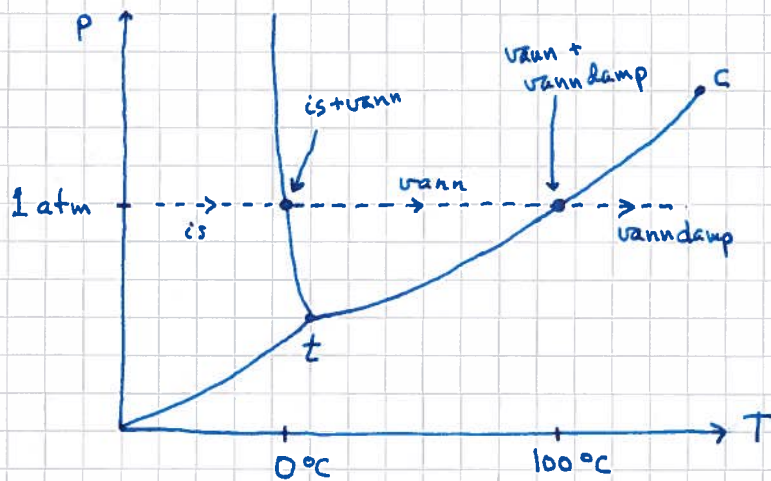
$$\approx 4.184 \text{ J}$$

Med konstant tilførsel av varmeeffekt:

97



Proessen i pT -diagrammet:



Luftfuktighet

[LHL 17.10]

(98)

Totalt lufttrykk = sum av partialtrykk:

$$P = P_{N_2} + P_{O_2} + P_{CO_2} + P_{H_2O} + \dots$$

Damptrykket = p_d = partialtrykket pga H_2O i lufta når vi har termodynamisk likevekt mellom vanddampen i lufta og vann i væskeform (som vi typisk har til stede, i hvert fall utendørs!), dvs når vi er på $U + g$ koeksistenslinjen.

Hvis mengden vanddamp i lufta blir større enn dette, har vi ikke lenger likevekt, og vanddamp vil kondensere inntil likevekt gjenopprettes og $P_{H_2O} = p_d$.

Da innser vi at

p_d = maksimalt partialtrykk av H_2O i lufta ved den aktuelle temperatur T ; lufta er mettet med vanddamp, og p_d kalles derfor også metningstrykket

Dersom luft inneholder mindre H_2O enn det som tilbrerer at $P_{H_2O} = p_d$, har vi en relativ luftfuktighet ϕ som er mindre enn 100%:

$$\phi = \frac{P_{H_2O}}{p_d} \cdot 100\%$$

Clausius - Clapeyrons ligning

(99)

Formen på koeksistenslinjene kan utledes fra termodynamikkens 1. og 2. lov (som vi kommer til senere).

[Kort fortalt baserer utledningen seg på at den såkalte Gibbs frie energi må være den samme for de to involverte fasene.]
(evt. kjemisk potensial)

Resultatet er:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T \cdot \Delta V}$$

der ΔV = volumendringen i faseovergangen, f.eks.
 $V_g - V_v$ ved fordamping

L = den latente varmen i faseovergangen,
f.eks. L_f ved fordamping

Siden både L og ΔV er proporsjonale med stoffmengden, blir $L/T\Delta V$ uavhengig av stoffmengden.

Hvis vanndamp er den ene fasen, kan vi gjøre tilnærmelsen

$$\Delta V = V_g - V \approx V_g$$

siden $V \ll V_g$, enten vi har $V = V_v$ eller $V = V_f$.

Derneft kan vi anta at vanndampen i lufta oppfører seg som en ideell gass:

$$V_g = nRT/p_a$$

Endelig antar vi (for enkelhets skyld) at $L = n \cdot l$ er uavhengig av T ; her er $l = L/n =$ molar latent varme.

Da har vi med ett en løsbar ligning for damptrykket P_d :

$$\frac{dP_d}{dT} = \frac{L}{T \Delta V} \approx \frac{n \cdot l}{T \cdot nRT/P_d} = \frac{l \cdot P_d}{RT^2}$$

$$\Rightarrow \int_{P_d(T_0)}^{P_d(T)} \frac{dP_d}{P_d} = \frac{l}{R} \int_{T_0}^T \frac{dT}{T^2}$$

der T_0 og $P_d(T_0)$ representerer et valgt (og kjent) referansepunkt på koeksistenslinjen. Et naturlig valg er trippelpunktet :

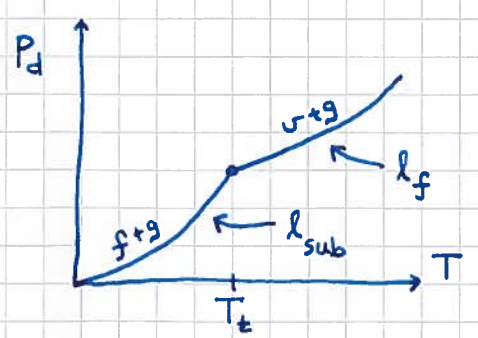
$$T_0 = T_t = 273.16 \text{ K}, \quad P_d(T_t) = 612 \text{ Pa} = P_t$$

Dermed :

$$\ln \left\{ \frac{P_d(T)}{P_t} \right\} = \frac{l}{R} \left\{ \frac{1}{T_t} - \frac{1}{T} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_d(T) = P_t \cdot \exp \left\{ \frac{l}{R} \left(\frac{1}{T_t} - \frac{1}{T} \right) \right\}}$$

som er damptrykk-kurven



$$T > T_t : l = l_f = 598 \frac{\text{cal}}{\text{g}} = 0.598 \frac{\text{kcal}}{\text{g}} \cdot 4.184 \frac{\text{kJ}}{\text{kcal}} \cdot 18 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \approx 45 \text{ kJ/mol}$$

$$T < T_t : l = l_{\text{sub}} = 678 \frac{\text{cal}}{\text{g}} = 0.678 \frac{\text{kcal}}{\text{g}} \cdot \text{---} \text{---} \text{---} \approx 51 \text{ kJ/mol}$$

Eks: Hva er relativ luftfuktighet i luft som i 20 kuldegrader er mettet med vændamp, etter oppvarming til 20 varme grader?

(101)

Løsn: Partialtrykket pga H_2O tilsværer damptrykket ved 253K,

$$P_{H_2O} = P_d(253) = P_t \cdot \exp \left\{ \frac{l_{sub}}{R} \left(\frac{1}{T_t} - \frac{1}{253} \right) \right\},$$

som med ~~2~~ $T_t = 273.16 \text{ K}$ og $l_{sub} = 51 \text{ kJ/mol}$ gir

$$P_{H_2O} = 0.167 P_t.$$

Ved 293 K er damptrykket (metningstrykket)

$$\begin{aligned} P_d(293) &= P_t \cdot \exp \left\{ \frac{l_f}{R} \left(\frac{1}{T_t} - \frac{1}{293} \right) \right\} \quad (l_f = 45 \text{ kJ/mol}) \\ &= 3.826 P_t \end{aligned}$$

Dermed er

$$\phi = \frac{0.167}{3.826} \cdot 100\% = \underline{\underline{4\%}}$$

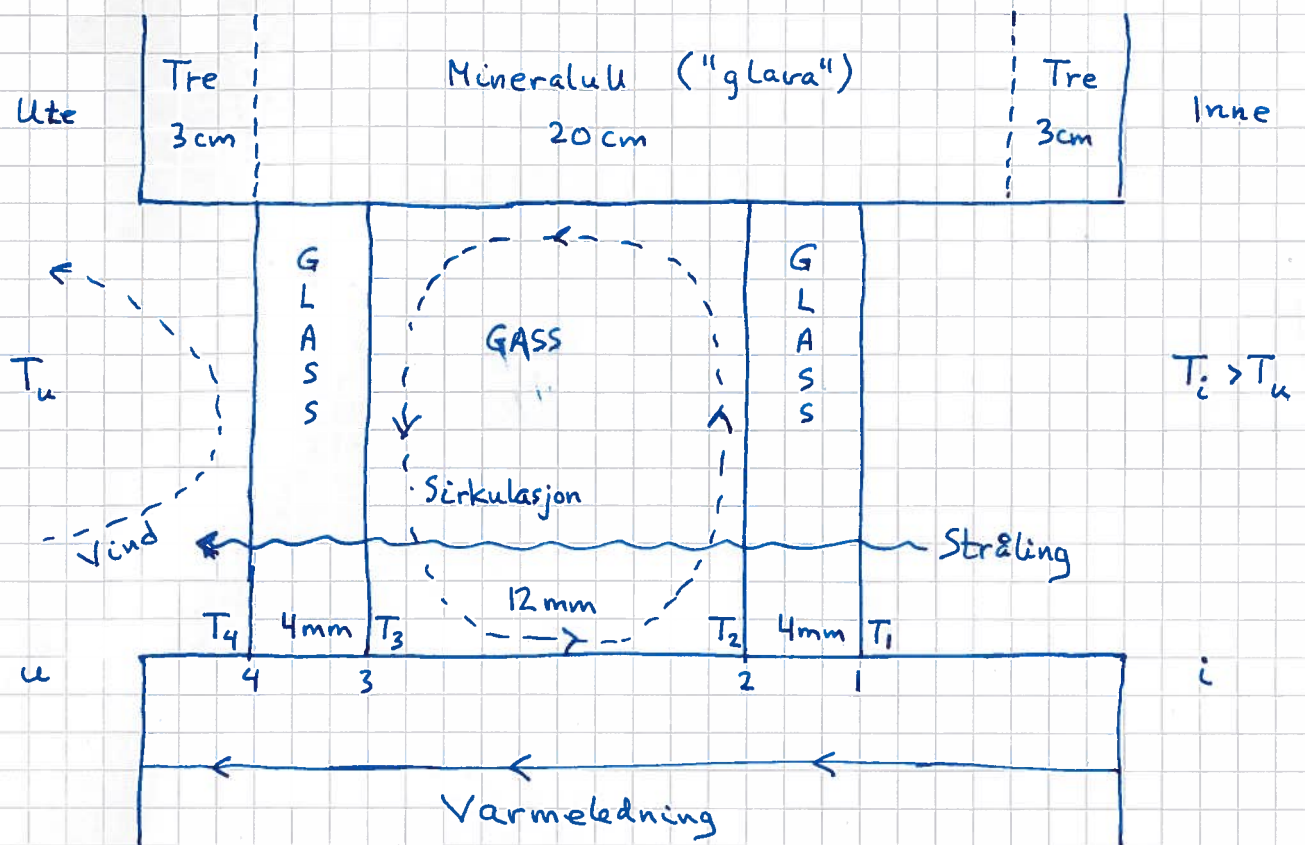
Ekstraspm:

Hvor mange mL (evt. g) vann må nå fordampe for å gi mettet luft i et rom med volum 25 m^3 ?

Varmetransport [YF 17; LHL 18]

(102)

Se på f.eks. en vegg med et dobbeltvindu :



Ulike mekanismer for varmeoverføring :

- Konveksjon : Strømning gir varmeoverføring.
- Varmeledning : Forplantning av kinetisk energi på mikroskopisk nivå
- Stråling : Legeme med temperatur T sender ut energi i form av elektromagnetiske bølger

Konveksjon [YF 17.7; LHL 18.2]

103

$T_2 > T_3 \Rightarrow$ gassen mellom vindusglassene utvider seg og stiger ved 2; avkjøles og trekkes seg sammen og faller ved 3

\Rightarrow sirkulasjon, og netto varmeoverføring fra 2 til 3

Vind (ute) \Rightarrow øker varmeoverføringen fra 4 til u

Antar "grovt sett" at overført varme pr tids- og flateenhet, dvs varmestromtettheten, pga konveksjon er proporsjonal med temperaturforskjellen.

$$\text{Ute: } j_u = \alpha_u (T_4 - T_u)$$

$$\text{Inne: } j_i = \alpha_i (T_i - T_1)$$

$$[j] = \text{W/m}^2 \Rightarrow [\alpha] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \quad (\text{varmeovergangstall})$$

Vanskelig å beregne; byggeforskriftene angir "typiske verdier":

$$\alpha_u = 25 \text{ W/m}^2\text{K} \quad (\text{dvs med vind, 5-6 m/s i snitt})$$

$$\alpha_i = 7.5 \text{ W/m}^2\text{K} \quad (\text{uten vind})$$

Eks: Hvilken temp. oppleves like behagelig med vind på 5 m/s som 25°C uten vind? (Hudens overflate: ca 30°C)

Løsn: Ønsker samme varmestrom j som ved 25°C uten vind.

$$j = \alpha_i \cdot \Delta T_{\text{stille}} = 7.5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \cdot 5 \text{ K} = 37.5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

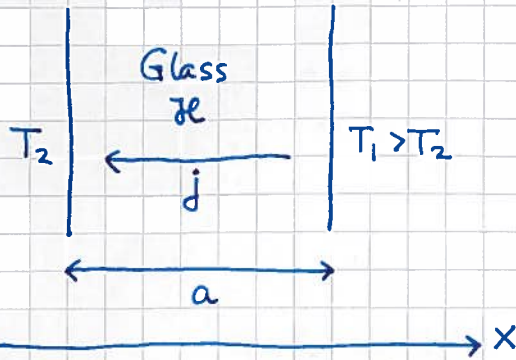
$$\Rightarrow T_{\text{vind}} = 30^\circ\text{C} - \frac{37.5}{25}^\circ\text{C} = \underline{\underline{28.5^\circ\text{C}}}$$

$$[\alpha_i \Delta T_{\text{stille}} = \alpha_u \Delta T_{\text{vind}}]$$

Varmeledning

[YF 17.7; LHL 18.1]

(104)



Ekspirimeter gir, som ventet,

- $|j| \sim \Delta T = T_1 - T_2$,
og fra høy mot lavere T
- $|j| \sim \frac{1}{a}$

$$\Rightarrow j = -\kappa \cdot \frac{\Delta T}{a}; \quad \kappa = \text{materialets varmeledningsevne}$$
$$[\kappa] = \text{W/m}\cdot\text{K}$$

→ Vi skal bare se på stasjonære (tidsuavhengige) forhold.

Da er j like stor gjennom hele glasset; hvis ikke er det en netto varmestrøm inn i eller ut av ei "skive" mellom x og $x+dx$, og da er T ikke konstant der, og da er det ikke stasjonært!

$$\text{Dermed: } \Delta T/a = dT/dx$$

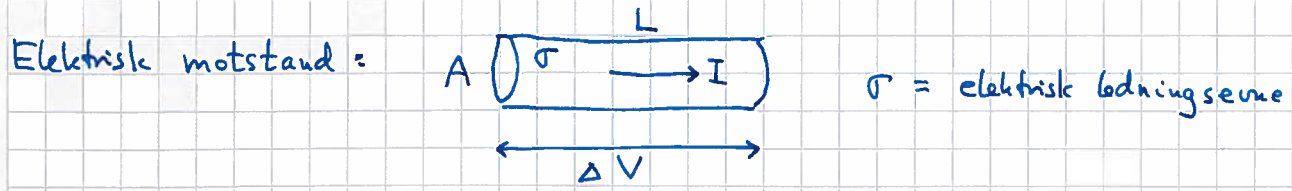
$$\Rightarrow \boxed{j = -\kappa \frac{dT}{dx}} \quad \text{Fouriers lov for 1D varmeledning}$$

$$3D: \vec{j} = -\kappa \nabla T; \quad \nabla T = \hat{x} \frac{\partial T}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial T}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial T}{\partial z}$$

Tallverdier for κ :

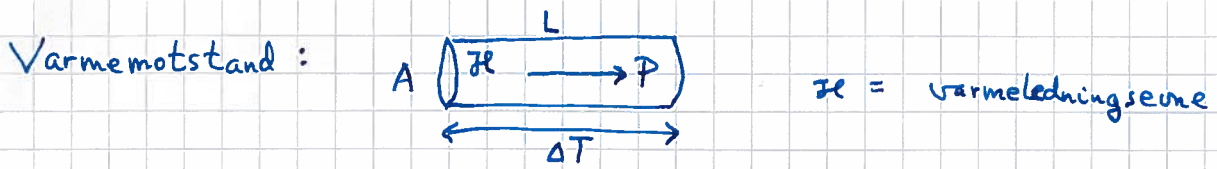
	Luft	Glava	Vann	Is	Glass	Stål	Tre
$\kappa \left(\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}\right)$	0.026	0.035	0.61	2.2	0.7-1.1	43	0.1-0.2

Analogi mellom Fourniers lov og Ohms lov:



$$j = \frac{I}{A} = \sigma E = \sigma \Delta V / L$$

$$\Rightarrow \Delta V = I \cdot R \quad \text{med} \quad R = \frac{L}{\sigma A} \quad [R] = \frac{V}{A} = \Omega \text{ (ohm)}$$



$$j = \frac{P}{A} = \kappa \Delta T / L$$

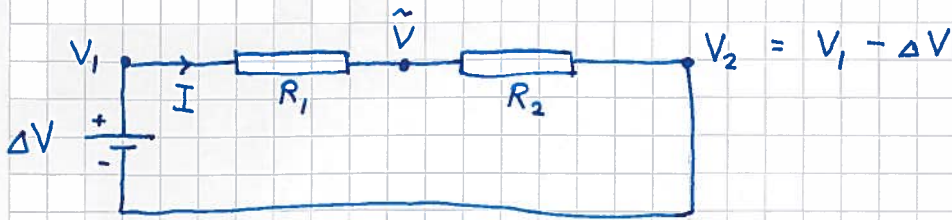
$$\Rightarrow \Delta T = P \cdot R_Q \quad \text{med} \quad R_Q = \frac{L}{\kappa A} \quad [R_Q] = \frac{K}{W}$$

	Fourniers lov	Ohms Lov
drivkraft	ΔT (K)	ΔV (V)
strøm	P (J/s=W)	I (C/s=A)
resistans	$R_Q = \frac{L}{\kappa A}$ (K/W)	$R = \frac{L}{\sigma A}$ (V/A)
konduktans	$1/R_Q = \kappa A/L$ (W/K)	$1/R = \sigma A/L$ (A/V)
resistivitet	$1/\kappa$	$1/\sigma$

Seniekobling.

106

Elektriske motstander:



Pga ladningsbevarelse går samme strøm I gjennom R_1 og R_2

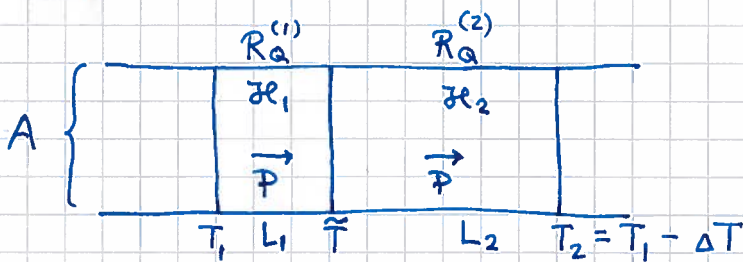
$$\text{Ohms lov} \Rightarrow V_1 - \tilde{V} = R_1 I$$

$$\tilde{V} - V_2 = R_2 I$$

$$\Rightarrow \Delta V = V_1 - V_2 = (R_1 + R_2) I$$

$$\Rightarrow R = R_1 + R_2$$

Varmemotstander:



Pga energiebevarelse går samme varmestrøm P gjennom begge lag

$$\text{Fouriers lov} \Rightarrow T_1 - \tilde{T} = R_a^{(1)} P$$

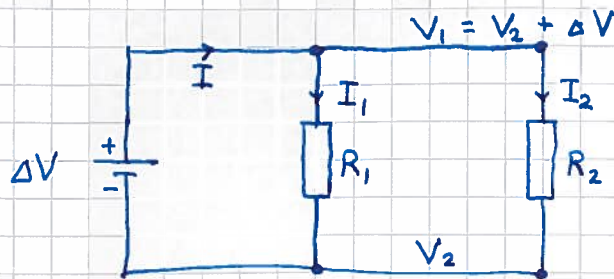
$$\tilde{T} - T_2 = R_a^{(2)} P$$

$$\Rightarrow \Delta T = T_1 - T_2 = (R_a^{(1)} + R_a^{(2)}) P$$

$$\Rightarrow R_a = R_a^{(1)} + R_a^{(2)}$$

Parallellkobling.

Elektriske motstander:



Pga energibevarelse er det lik spenning ΔV over R_1 og R_2

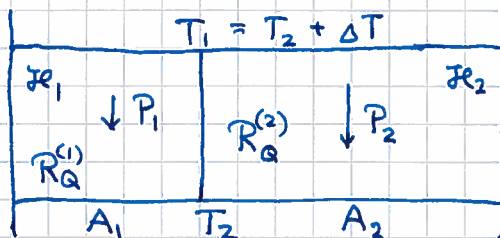
$$\text{Ohms lov} \Rightarrow \Delta V = R_1 I_1 = R_2 I_2$$

Pga ladningsbevarelse er $I = I_1 + I_2$

$$\Rightarrow I = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Delta V = \frac{1}{R} \Delta V$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Varmemotstander:



Pga termisk likevekt på hver side er det lik ΔT over begge lag

$$\text{Fouriers lov} \Rightarrow \Delta T = R_Q^{(1)} P_1 = R_Q^{(2)} P_2$$

Pga energibevarelse er $P = P_1 + P_2$

$$\Rightarrow P = \frac{\Delta T}{R_Q^{(1)}} + \frac{\Delta T}{R_Q^{(2)}} = \left(\frac{1}{R_Q^{(1)}} + \frac{1}{R_Q^{(2)}} \right) \Delta T = \frac{1}{R_Q} \Delta T$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_Q} = \frac{1}{R_Q^{(1)}} + \frac{1}{R_Q^{(2)}}$$

Eks: Husvegg.

Seriekobling av 3 cm panel og 20 cm glava og 3cm panel,

$\lambda_p = 0.12 \text{ W/Km}$, $\lambda_g = 0.035 \text{ W/Km}$. Sett $A = 1 \text{ m}^2$.

Total varmemotstand: $R_Q = 2 R_Q^p + R_Q^g$, med

$R_Q^p = L_p / \lambda_p A = 0.03 \text{ m} / (0.12 \frac{\text{W}}{\text{Km}} \cdot 1 \text{ m}^2) = 0.25 \text{ K/W}$

$R_Q^g = L_g / \lambda_g A = 0.20 \text{ m} / (0.035 \frac{\text{W}}{\text{Km}} \cdot 1 \text{ m}^2) = 5.71 \text{ K/W}$

$\Rightarrow R_Q = 6.21 \text{ K/W}$

Anta $T_i = 20^\circ\text{C}$ og $T_u = -10^\circ\text{C}$. Da er

$P = \Delta T / R_Q = 30 \text{ K} / 6.21 \text{ K/W} = 4.83 \text{ W}$ (pr m^2 vegg)

Temp. fall gjennom hvert panellag :

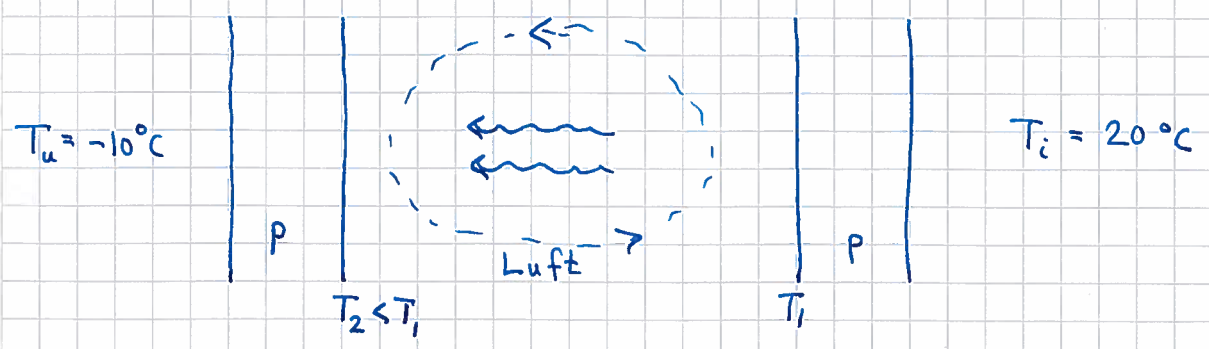
$\Delta T_p = P \cdot R_Q^p = 4.83 \text{ W} \cdot 0.25 \text{ K/W} = 1.2 \text{ K}$

Gjennom isolasjonslaget :

$\Delta T_g = P \cdot R_Q^g = 27.6 \text{ K}$

Dvs: Størst temp.gradient $\Delta T/\Delta x$ gjennom materialet med minst λ , dvs det som isolerer best.

Uten glava (dvs bare luft) : Varmetap pga konveksjon og stråling.



Stråling [YF 17.7; LHL 18.4]

109

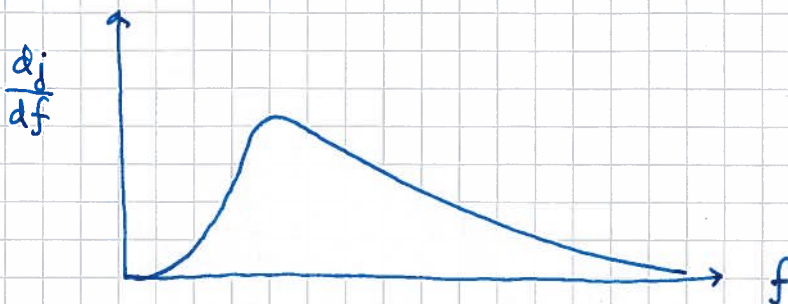
- Legeme ved temp. T har akseleererte ladninger, og emitterer dermed elektromagnetiske bølger, dvs EM stråling.
- Når disse bølgeene treffer et annet legeme, vil de enten absorberes, reflekteres eller transmitteres. Hvis a , r og t er andelen stråling som blir hhv abs, refl og trans, er selvsagt $a + r + t = 1$
- Vi definerer et idealisert legeme som absorberer all innkommende stråling; $a=1$. Kalles et svart legeme.
- Hvis et legeme er i termisk likevekt med konstant temp. T , må emittert og absorbert strålingsenergi være like store, for enhver bølgelengde λ : $e(\lambda) = a(\lambda)$
Dvs: $e = a = 1$ for svart legeme.

- > • For svarte legemer gjelder Stefan-Boltzmanns lov:

$$j = \sigma T^4; \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2} \approx 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

[For reelle legemer med $e = a < 1$: $j = e \cdot \sigma T^4$,
 $e =$ legemets emissivitet]

- Exp. omkring 1900 viste at strålingsenergien fordelte seg på ulike frekvenser omdrent slik:



Max Planck (1900) foreslo - motvillig - at stråling med frekvens f bare kunne inneholde en krantisert mengde energi, (110)

$$E_n = n \cdot hf ; \quad n = 0, 1, 2, \dots ; \quad h \approx 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

og utledet herfra en frekvensfordeling i strålingsenergien,

$$j(T) = \int_0^{\infty} \frac{dj}{df} df \quad \text{med} \quad \frac{dj}{df} = \frac{2\pi h f^3 / c^2}{\exp(hf/k_B T) - 1} \left(\frac{W}{m^2 Hz} \right)$$

som stemte utmerket med eksperimentene.

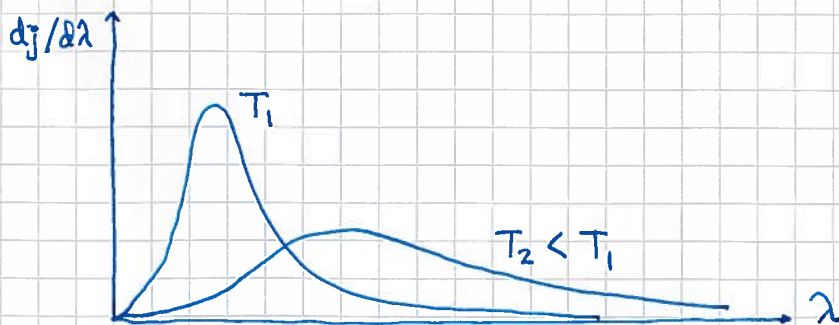
Dette var starten på krantemekanikken.

Fra dj/df og sammenhengen $c = \lambda f$ finner en nå bølglengdefordelingen

$$j(T) = \int_0^{\infty} \frac{dj}{d\lambda} d\lambda \quad \text{med} \quad \frac{dj}{d\lambda} = \frac{2\pi hc / \lambda^5}{\exp(hc/\lambda k_B T) - 1} \left(\frac{W}{m^3} \right)$$

- Wiens forskyvningslov: $\frac{dj}{d\lambda}$ har sin max-verdi når $\lambda \cdot T \approx 2.90 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}$ (Finnes ved å løse

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dj}{d\lambda} \right) = 0 ; \quad \text{tilsv. har } \frac{dj}{df} \text{ maxverdi når } \frac{f}{T} \approx 5.88 \cdot 10^{10} \frac{\text{Hz}}{\text{K}}.)$$



Noen viktige eksempler:

- Solas overflate: $T \approx 6 \cdot 10^3 \text{ K}$
 $\Rightarrow \text{max } (dj/d\lambda) \text{ for } \lambda \approx 480 \text{ nm}$ (blågrønt; synlig lys: 400-700 nm) (Blå) (Rød)
- Kroppens overflate: $T \approx 303 \text{ K}$
 $\Rightarrow \text{max } (dj/d\lambda) \text{ for } \lambda \approx 10 \mu\text{m}$ (infrarødt, IR)
- Mørk, skyfri nattehimmel: $T \approx 240 \text{ til } 260 \text{ K}$
 $\Rightarrow \text{max } (dj/d\lambda) \text{ for } \lambda \approx 12 \mu\text{m}$ (IR)
 \Rightarrow kan gi ising på bakkenivå, selv med noen plussgrader i lufta!
- CMB: Cosmic Background Radiation $T \approx 2.73 \text{ K}$
 $\Rightarrow \text{max } (dj/d\lambda) \text{ for } \lambda = 1.87 \text{ mm}$

U-verdier i byggebransjen

Def. ved: $j = U \cdot (T_i - T_u)$

dvs: $U =$ varmetap pr m^2 og pr grad temp. forskjell mellom inne og ute.

Eks: Lagdelt vegg, s.108, $j = 4.83 \text{ W/m}^2$ når $T_i - T_u = 30 \text{ K}$

\Rightarrow Da er veggens U-verdi: $U = 4.83/30 \approx 0.16 \text{ W/m}^2\text{K}$

Tek10 (Krav i Byggeforskriftene):

Yttervegg $U < 0.18$

Tak $U < 0.13$

Gulv $U < 0.15$

Vindu $U < 1.2$

Termodynamikkens 1. lov [YF 19,20 ; LHL 15, 13]

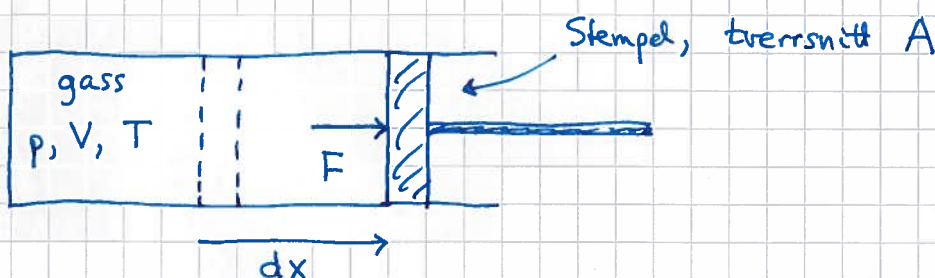
Vi antar ofte reversible prosesser. Dette er idealisererte "uendelig langsomme" prosesser, uten friksjon, og med "ørsmå" temperaturdifferanser ($\Delta T \approx 0$) når varme utveksles mellom to systemer.

Alle reelle prosesser er (mer eller mindre) irreversible, pga friksjon, turbulens, og endelige $\Delta T > 0$ ved varmeutveksling.

Arbeid [YF 19.2 ; LHL 13.5]

= alle former for energitveksling som ikke skyldes ΔT

Typisk scenario : Gass som utvider seg ved trykk p .

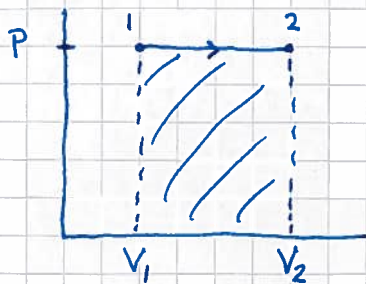


Arbeidet utført av gassen ("systemet") på omgivelsene ved utvidelse fra volum V til $V + dV$, ved trykk p :

$$\boxed{dW = F \cdot dx = p \cdot A \cdot \frac{dV}{A} = p \cdot dV}$$

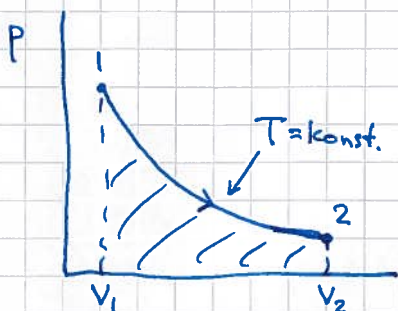
Fortegn: $dW > 0$ når $dV > 0$, dvs når systemet gjør et positivt arbeid på omgivelsene

Eks 1: Isobar utvidelse



$$W = \int_1^2 dW = p \int_{V_1}^{V_2} dV = \underline{p \cdot (V_2 - V_1)}$$

Eks 2: Isoterm utvidelse av ideell gass



$$p(V) = Nk_B T / V$$

$$\Downarrow$$

$$W = Nk_B T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \underline{Nk_B T \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

Vi ser at: $W = \text{areal under kurven } p(V)$ $\left(\begin{array}{l} \rightarrow W > 0 \\ \leftarrow W < 0 \end{array} \right)$

Indre energi [YF 19.4, 19.6; LHL 13.6]

U = systemets indre energi

= summen av kin. og pot. energi til partiklene i systemet

Ideell gass: Kun kinetisk energi.

Ingen vekselvirkn. mellom molekylene,

dermed ingen pot. energi.

Anta $\langle K \rangle$ = midlere kin. energi pr molekyl

$$\Rightarrow \boxed{U = U(T) = N \cdot \langle K \rangle}$$

Indre energi for
ideell gass.

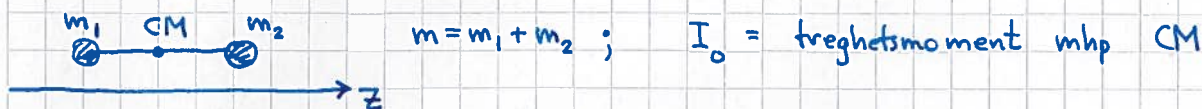
Eks 1: Atomære gasser (f.eks. edalgassene He, Ne, Ar, ...)

$$\langle K \rangle = \langle K_{trans} \rangle = \frac{3}{2} k_B T \quad (\text{pr atom}) \quad (\text{se s. 90-91})$$

$$\Rightarrow U(T) = \underline{\underline{\frac{3}{2} N k_B T}}$$

Eks 2: Toatomige gasser (N_2, O_2, H_2, \dots)

[YF 18.4
LHL 14.2]



Ekvipartisjonsprinsippet sier: Hvert kvadratiske ledd i energifunksjonen bidrar med $\frac{1}{2} k_B T$ til indre energi pr partikkel.

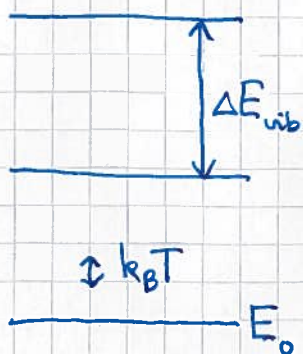
$$\Rightarrow \langle K_{trans} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

$$\langle K_{rot} \rangle = \frac{1}{2} I_0 \langle \omega_x^2 + \omega_y^2 \rangle = \frac{2}{2} k_B T$$

(I_0 mhp z-aksen er praktisk talt lik null)

Hva med $\langle K_{vib} \rangle$? I utgangspunktet to kvadratiske ledd i energifunksjonen, ett ^{pga} kinetisk og ett ^{pga} potensiell energi.

Men: Krantemekanikken viser at vibrasjonsenergien er kvantisert, med avstand $\Delta E_{vib} \gg k_B T$ mellom energinivåene. Da er det ikke nok "termisk energi" til stede til å eksitere molekylene opp i vibrasjonstilstander med høyere energi:

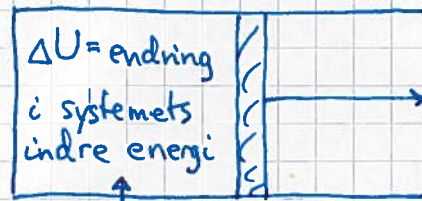


\Rightarrow Alle molekylene har samme vibr.energi E_0 , en "uinteressant konstant energi".

Total indre energi for N molekylar blir:

$$U = \frac{5}{2} N k_B T + N \cdot E_0$$

Nå kan vi formulere termodynamikkens 1. lov,
som ikke uttrykker annet enn energibevarelse :
(samt at varme er en form for energi)



$\Delta Q =$ varme tilført systemet

$\Delta W =$ arbeid utført av systemet på omgivelsene

$$\Rightarrow \boxed{\Delta Q = \Delta U + \Delta W} \quad \text{1. lov}$$

På differensiell form: $dQ = dU + dW$

Men merk: Her er det bare U som er en tilstandsfunksjon.
 Q og W er prosessvariable.

Varmekapasitet for ideell gass [YF 18.4; LHL 15.2, 14.2]

Fra s. 94: $C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V$, $C_P = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_P$

Hvis $V = \text{konst.}$, er $dW = p dV = 0$, og $dQ = dU$

$$\Rightarrow C_V = \left(\frac{dU}{dT}\right)_V = \frac{dU}{dT} \quad (\text{siden } U \text{ bare avh. av } T)$$

Videre har vi

$$C_P = \left(\frac{dU}{dT}\right)_P + p \left(\frac{dV}{dT}\right)_P = \frac{dU}{dT} + p \left(\frac{d(Nk_B T/p)}{dT}\right)_P$$

$$= C_V + Nk_B = C_V + nR$$

[Siden entalpi er $H \stackrel{\text{def}}{=} U + pV$, blir $C_P = (dH/dT)_P$]

• Kvalitativt opplagt at $C_p > C_v$: Med $V = \text{konst.}$
 går all tilført ΔQ med til økningen ΔU , og dermed ΔT .
 Med $p = \text{konst.}$ går noe av ΔQ med til å gjøre arbeidet
 $\Delta W = p \cdot \Delta V$; dette gir mindre ΔU og ΔT , og dermed
 $C_p = (\Delta Q / \Delta T)_p > (\Delta Q / \Delta T)_v = C_v$.

• Atomære gasser : $C_v = \frac{3}{2} Nk_B = \frac{3}{2} nR$, $C_p = \frac{5}{2} nR$ } se s. 114
 Toatomige gasser : $C_v = \frac{5}{2} nR$, $C_p = \frac{7}{2} nR$

Exp, edelgasser : $c_{pm} = C_p / n = 20.78 - 21.01 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$
 $= 2.50 - 2.53 R$

Exp, tørr luft : $c_{pm} = 29.07 \text{ J/mol}\cdot\text{K} = 3.50 R$
 $c_{vm} = 20.76 \text{ — " — } = 2.50 R$

Adiabatiske prosesser [YF 19.8 ; LHL 15.3]

= prosesser uten tilførsel/avgivelse av varme

$\Rightarrow \Delta Q = 0 \xrightarrow{\text{1. lov}} \Delta U = -\Delta W$

Varmeoverføring tar tid, så alle tilstrekkelig raske prosesser er tilnærmet adiabatisk.

Eks: • Rask kompresjon av lufta i sykkelpumpe.
 Da gjøres arbeid på lufta $\Rightarrow \Delta W < 0$
 $\Rightarrow \Delta U > 0 \Rightarrow \Delta T > 0$

• Lydbølger i luft. Små, men raske trykkendringer
 \Rightarrow adiabatisk forhold (ikke isoterme)

~~Adiabatiske prosesser~~

Anta ideell gass: $pV = nRT$, $nR = C_p - C_v$

Adiabatisk prosess: $dW = -dU$
 $\Rightarrow p dV = -C_v dT$

Dermed:

$$p dV = \frac{nRT}{V} dV = (C_p - C_v) T \frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow -C_v dT = C_v \left(\frac{C_p}{C_v} - 1 \right) T \frac{dV}{V}$$

Vi innfører adiabatkonstanten $\gamma \equiv C_p / C_v > 1$

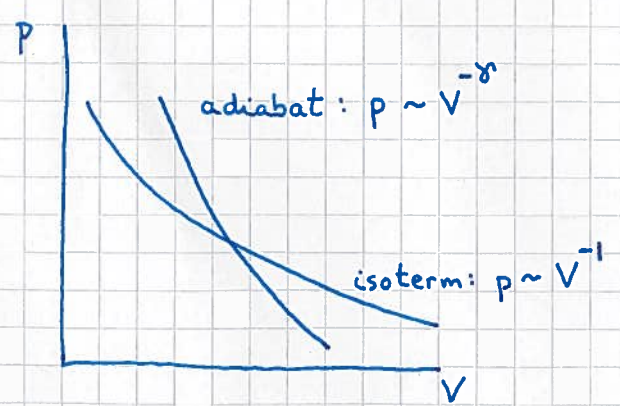
$$\Rightarrow \frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \frac{dV}{V} \Rightarrow \ln T = -(\gamma - 1) \ln V + \text{konst.}$$

$$\Rightarrow \ln T + \ln V^{\gamma - 1} = \text{konst.} \Rightarrow \ln \{ T \cdot V^{\gamma - 1} \} = \text{konst.}$$

$$\Rightarrow \boxed{T \cdot V^{\gamma - 1} = \text{konst.}}$$

$$T = \frac{pV}{nR} \Rightarrow \boxed{p \cdot V^{\gamma} = \text{konst.}}$$

$$V = \frac{nRT}{p} \Rightarrow \boxed{p \cdot T^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \text{konst.}}$$



$\gamma > 1$, slik at adiabater er brattere enn isotermer i et pV-diagram for ideell gass

Edelgasser: $\gamma = 5/3 \approx 1.7$

Toatomige gasser (inkl. luft): $\gamma = 7/5 = 1.4$

} Dus: $\gamma = \frac{f+2}{f}$, der $f = \text{antall frihetsgrader (ved den aktuelle temperatur)}$

Øving 12: Lydfarten i luft. $v = \sqrt{B/\rho} = \dots$ adiabatisk $\dots = \sqrt{\gamma k_B T / m}$ (der $m = \text{midlere masse pr molekyl}$)

Kretsprosesser [YF 19.4 ; LHL 15.1]



Indre energi U er en tilstandsfunksjon.

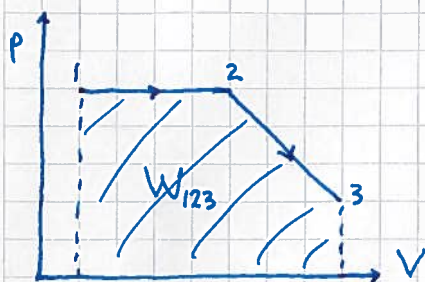
I en kretsprosess er start-tilstand

lik slutt-tilstand $\Rightarrow \Delta U = 0$

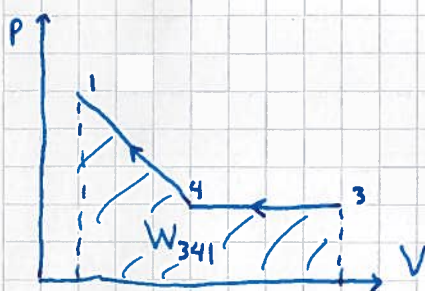
Da gir 1. lov: $\Delta Q = \Delta W$

$\Delta Q =$ netto tilført varme

$\Delta W =$ netto utført arbeid



$W_{123} =$ arbeid utført av systemet ved utvidelsen $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$



$W_{341} =$ arbeid utført på systemet ved kompresjonen $3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$

\Rightarrow Netto arbeid utført pr syklus:

$\Delta W =$ omsluttet areal i pV-diagrammet

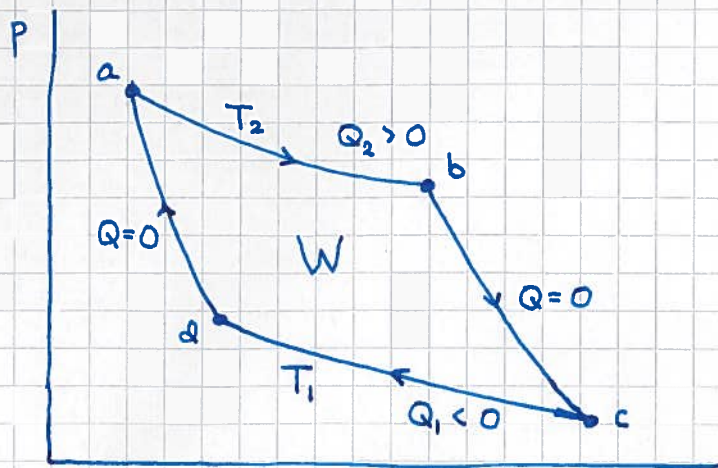


Med klokka $\Rightarrow \Delta W > 0$

Mot klokka $\Rightarrow \Delta W < 0$

Carnotprosessen [YF 20.6 ; LHL 15.4]

119



Sad: Carnot (1824):
"Er det en fundamental grense for hvor effektiv en maskin som omdanner varme til arbeid, kan bli?"

- a b: isoterm, T_2 ; $Q_2 > 0$; $W_{ab} > 0$
- b c: adiabat, $\Delta T < 0$; $Q = 0$; $W_{bc} > 0$
- c d: isoterm, $T_1 < T_2$; $Q_1 < 0$; $W_{cd} < 0$
- d a: adiabat, $\Delta T > 0$; $Q = 0$; $W_{da} < 0$

Virkningsgrad:

$$\eta = \frac{\text{nytte}}{\text{kostnad}} = \frac{\text{netto utført arbeid}}{\text{tilført varme}} = \frac{W}{Q_2}$$

For kretsprosess: $\Delta U = 0 \Rightarrow W = Q_2 + Q_1$ (1. lov)

$$\Rightarrow \eta_c = \frac{Q_2 + Q_1}{Q_2} = 1 + \frac{Q_1}{Q_2} \quad (< 1 \text{ da } Q_1 < 0)$$

Anta ideell gass. Da er $U = U(T)$, og $U = \text{konst.}$ langs isotermene

$$\Rightarrow Q_2 = W_{ab} = \int_{V_a}^{V_b} p(V) dV = nRT_2 \ln \frac{V_b}{V_a}$$

$$Q_1 = W_{cd} = nRT_1 \ln \frac{V_d}{V_c}$$

Langs adiabatene: $T \cdot V^{\gamma-1} = \text{konst.}$

$$\Rightarrow T_2 V_b^{\gamma-1} = T_1 V_c^{\gamma-1} \quad ; \quad T_2 V_a^{\gamma-1} = T_1 V_d^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_c}{V_b}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_d}{V_a}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_c}{V_b} = \frac{V_d}{V_a} \Rightarrow \frac{V_c}{V_d} = \frac{V_b}{V_a}$$

Dermed:

$$Q_1 = nRT_1 \ln \frac{V_d}{V_c} = -\frac{T_1}{T_2} nRT_2 \ln \frac{V_b}{V_a} = -\frac{T_1}{T_2} \cdot Q_2$$

(dvs $\sum Q_j/T_j = Q_1/T_1 + Q_2/T_2 = 0$ for kretsprosessen)

$$\Rightarrow \boxed{\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_2}} \quad \text{Carnotprosessens virkningsgrad}$$

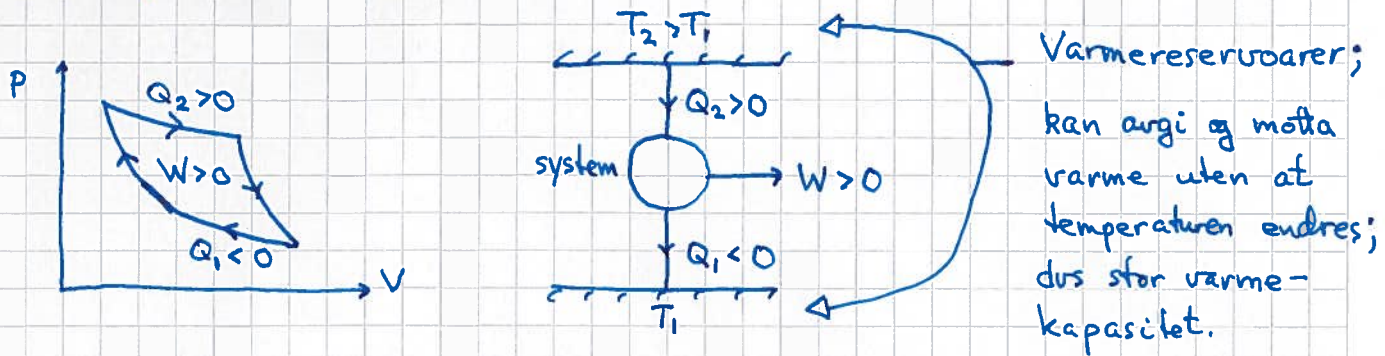
Kommentarer (uten bevis):

- Ingen varmekraftmaskin kan ha større virkningsgrad enn η_c
- Alle reversible Carnotmaskiner har virkningsgrad η_c
(dvs, ideell gass er ikke nødvendig som "arbeidssubstans")
- Alle reelle varmekraftmaskiner har mindre virkningsgrad enn η_c

Varmekraft- og kjølemaskiner

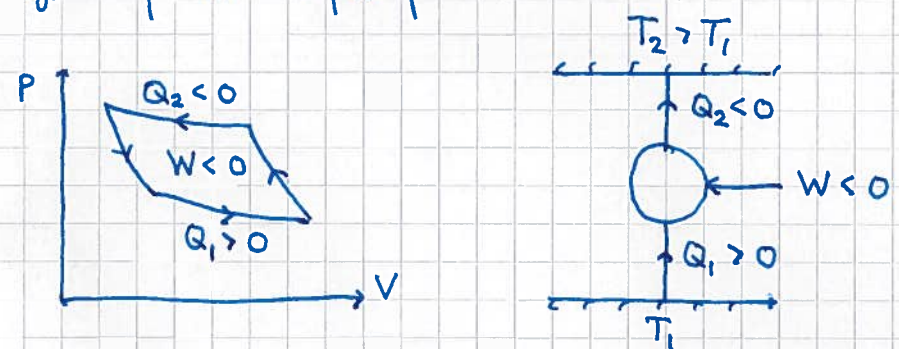
[YF 20.2-20.4 + 20.6 ; LHL 16.3-16.4]

Varmekraftmaskin:



- Varme Q_2 tilføres systemet fra et høyttemperaturreervoar (T_2)
- Systemet / Maskinen utfører arbeid W
- Virkningsgrad $\eta = W/Q_2$ ($\eta < \eta_c = 1 - T_1/T_2 < 1$)

Kjøleskap / Värmepumpe:



- Arbeid $|W|$ gjøres på systemet
- Varme Q_1 tilføres systemet fra et lavtemperaturreervoar (T_1)
- Varme $|Q_2|$ argis fra systemet til et høyttemperaturreervoar (T_2)
- Kostnad: $|W|$. Nytte: Q_1 (kjøleskap) eller $|Q_2|$ (värmepumpe)
- Effektfaktor: $E_K = |Q_1/W|$ (kjøleskap)
 $E_V = |Q_2/W|$ (värmepumpe)
- Teoretiske max-verdier gitt ved reversibel Carnotprosess:
 - $E_K^c = |Q_1/(Q_1+Q_2)| = |1+Q_2/Q_1|^{-1} = |1-T_2/T_1|^{-1} = T_1/(T_2-T_1) > 0$
 - $E_V^c = |Q_2/(Q_2+Q_1)| = \dots = |1-T_1/T_2|^{-1} = T_2/(T_2-T_1) > 1$

Eks 1: Hva er effekt faktoren til et Carnot-kjøleskap som står på boden der $T_2 = 12^\circ\text{C}$? ($T_1 = 4^\circ\text{C}$)

Hva er påkrevd elektrisk effekt hvis midlere varmetilførsel er 2.5 kW? (Pga varmeledning gjennom veggene og tilførsel av mat og drikke med $T > 4^\circ\text{C}$.)

Løsn. 1: $\epsilon_K^c = 277 / (285 - 277) \approx 35$ (Reelt er typisk $\epsilon_K \approx \epsilon_K^c / 4$)

$P_w = P_Q / \epsilon_K^c = 2.5 \text{ kW} / 34.6 = 72 \text{ W}$

Eks 2: Hvor raskt avtar $\Delta T = T_2 - T_1$ med tida hvis strømmen går ($P_w \rightarrow 0$)? Anta kjøleskapvegger med 5 cm tykkelse, areal 2 m^2 , varmeledningsevne $0.05 \text{ W/m}\cdot\text{K}$, og innhold med varmekapasitet 15 kJ/K .

Løsn. 2: $j = P/A = (dQ/dt)/A = (C dT_1/dt)/A$

og $j = \kappa (T_2 - T_1)/L$ (Fouriers lov; varmestrøm inn i kjøleskapet)

$\Rightarrow dT_1/dt = -\alpha (T_1 - T_2)$ med $\alpha = \kappa A / CL$

$\Rightarrow \frac{d(T_1 - T_2)}{T_1 - T_2} = -\alpha dt$ ($T_2 = \text{konst.}$)

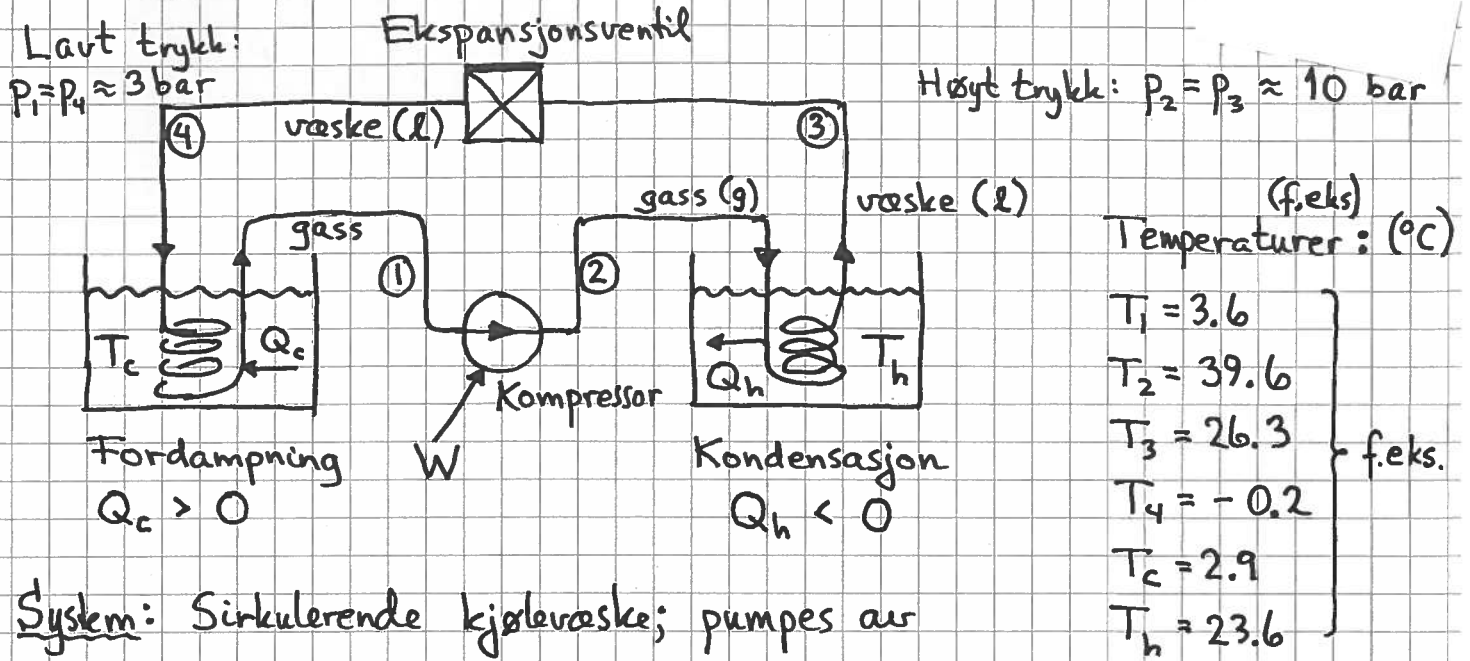
$\Rightarrow \Delta T(t) = \Delta T(0) e^{-\alpha t}$

$\alpha = \frac{0.05 \cdot 2}{15 \cdot 10^3 \cdot 0.05} \text{ s}^{-1} = 1.33 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1} = 0.48 \text{ h}^{-1}$

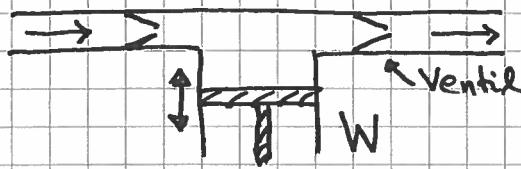
Dvs, det tar en tid $1/\alpha \approx 2.1$ timer for ΔT er redusert til $1/e$ av opprinnelig verdi 8 K ,
dvs $\Delta T(2\text{h}) \approx 3 \text{ K}$, dvs $T_1(2\text{h}) \approx 9^\circ\text{C}$.

Demo: Varmepumpe / Kjøleskap

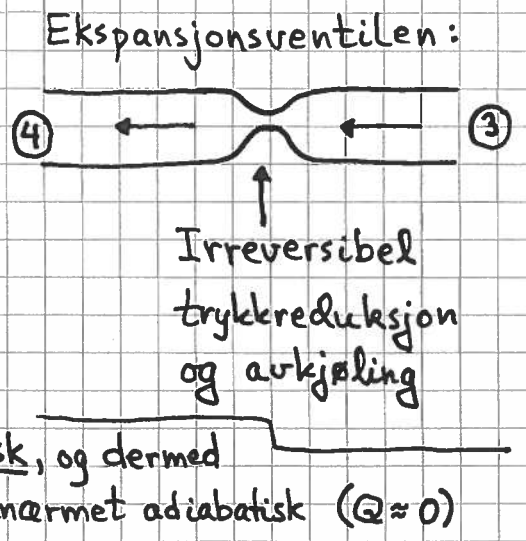
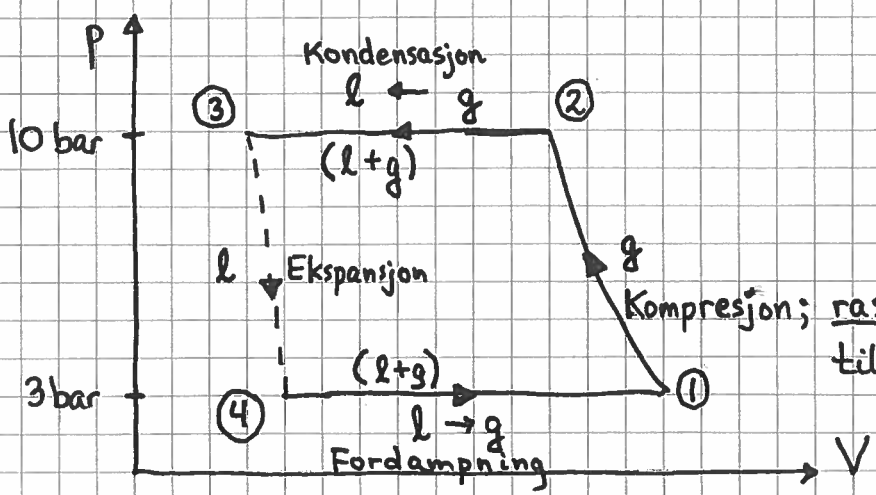
(123)



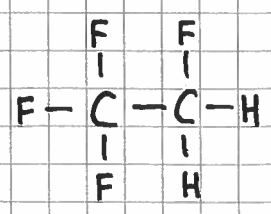
System: Sirkulerende kjølevæske; pumpes av kompressoren:

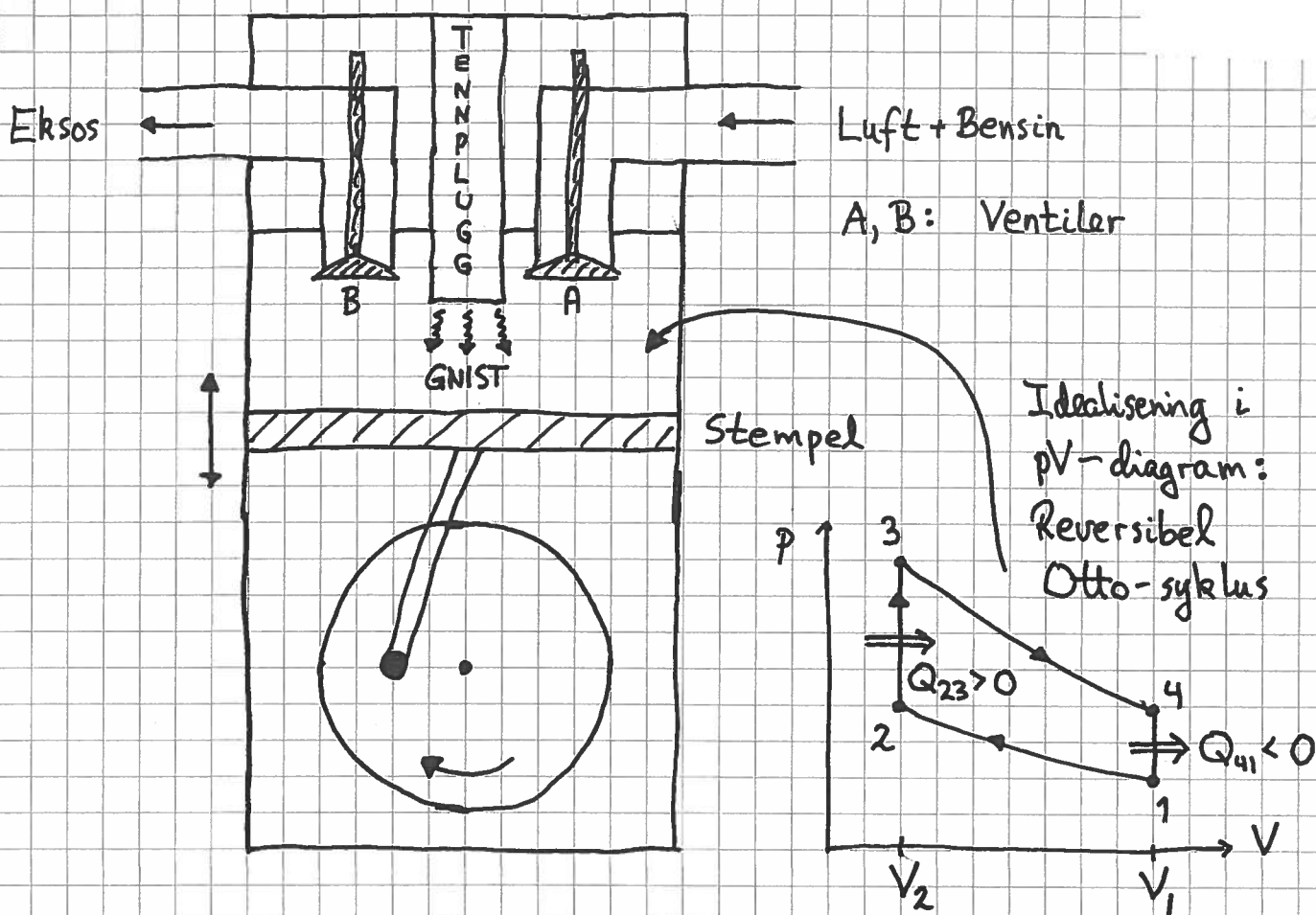


I et pV-diagram:



Kjølemediet: R134a $\hat{=}$ $C_2H_2F_4$, (1,1,1,2)-tetrafluoretan





1. A åpen, B lukket, luft+bensin inn

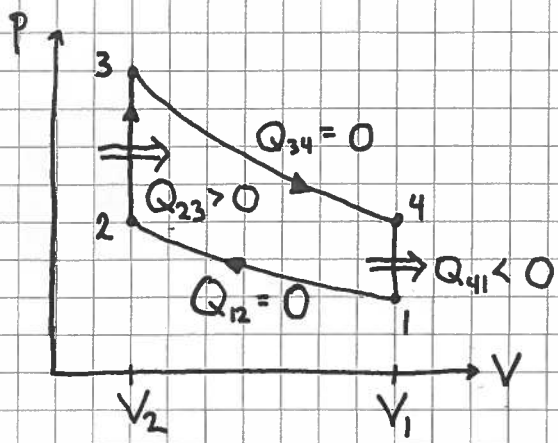
1→2. A og B lukket, adiabatisk kompresjon,
 $\Delta V < 0$, $\Delta p > 0$, $\Delta T > 0$, $W_{12} < 0$, $Q_{12} = 0$

2→3. A og B lukket, antenning med gnist fra tennplugg,
 $\Delta V = 0$, $\Delta p > 0$, $\Delta T > 0$, $W_{23} = 0$, $Q_{23} > 0$

3→4. A og B lukket, adiabatisk utvidelse,
 $\Delta V > 0$, $\Delta p < 0$, $\Delta T < 0$, $W_{34} > 0$, $Q_{34} = 0$

4→1. A lukket, B åpen, eksos ut,
 $\Delta V = 0$ (for "systemet", som nå er forbrent luft/bensin-blanding)
 $\Delta T < 0$, $\Delta p < 0$, $Q_{41} < 0$, $W_{41} = 0$

"1→1". A åpen, B lukket, luft+bensin inn (nytt system!)



Virkningsgrad for Otto-syklus:

$$\eta_o = \frac{W}{Q_{23}} = \frac{Q_{23} + Q_{41}}{Q_{23}} = 1 - \frac{|Q_{41}|}{Q_{23}}$$

$$Q_{23} = C_V(T_3 - T_2) ; |Q_{41}| = C_V(T_4 - T_1)$$

$$\Rightarrow \eta_o = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_4(1 - T_1/T_4)}{T_3(1 - T_2/T_3)}$$

1-2 og 3-4 er adiabatere $\Rightarrow T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} ; T_4 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_2^{\gamma-1}$

$\Rightarrow \frac{T_1}{T_4} = \frac{T_2}{T_3} ;$ dessuten er $\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$ med $\gamma \approx 1.4$ (mest luft!)

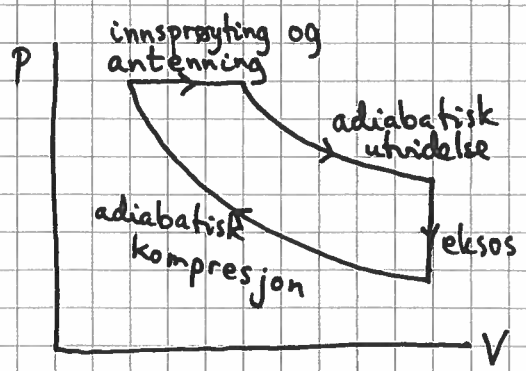
Dermed:

$$\eta_o = 1 - \frac{T_4}{T_3} = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = 1 - \alpha^{1-\gamma}$$

der $\alpha = V_1/V_2 =$ kompresjonsforholdet

Her er $T_4 > T_1 = T_{\min} , T_3 = T_{\max} ,$ slik at $\eta_o < \eta_c = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}$

Idealisert Diesel-syklus:



dvs 2 adiabatere, 1 isokor og 1 isobar

2. hovedsetning

[YF 20; LHL 16,17]

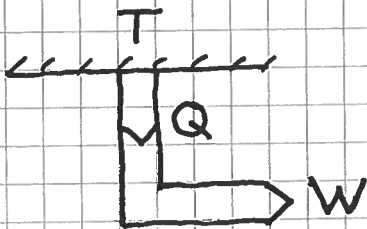
(126)

En empirisk (erfaringsbasert) lov som setter begrensninger for hva som er mulige prosesser (selv om 1. hovedsetning - energibevarelse - er oppfylt):

Kelvin: Umulig å lage kretsprosess som tar varme Q fra et varmereservoar og omsetter dette i sin helhet i arbeid W .

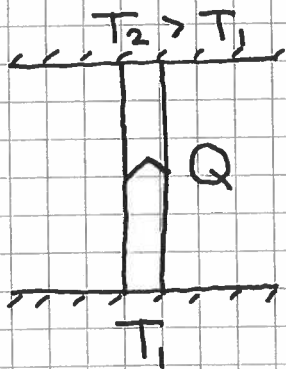
Clausius: Umulig å lage kretsprosess som tar varme Q fra varmereservoar med temp. T_1 og avgir dette i sin helhet til varmeres. med temp. $T_2 > T_1$.

Skjematisk:



"K"
er ikke mulig!

[Ikke uten videre
opplagt (?)]



"C"
er ikke mulig!

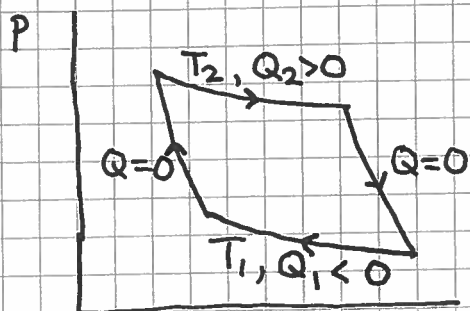
[Opplagt (?)]

K og C er ekvivalente formuleringer av 2. lov.

Tilstandsfunksjonen entropi [YF 20.7; LHL 17.1]

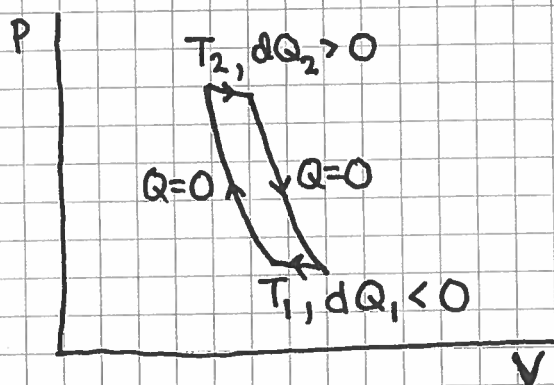
(127)

Fant for (reversibel) Carnot-prosess (s. 116-117):



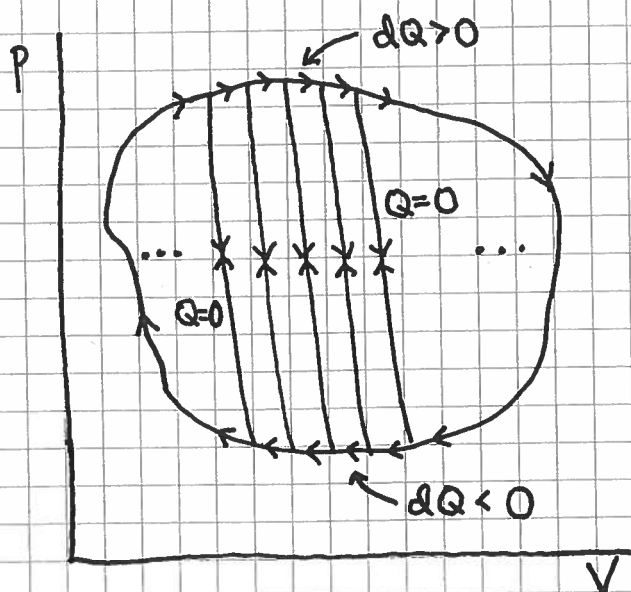
$$Q_1 = -Q_2 T_1 / T_2$$
$$\Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Må også gjelde for "liten" (rev.) Carnot-prosess:



$$\frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

Må da også gjelde for vilkårlig (rev.) kretsprosess:



"Ytre" kretsprosess = Sum av
(∞) mange (∞) små reversible
Carnot-prosesser, fordi alle
"indre" adiabatener kjøres
opp og ned

$$\Rightarrow \boxed{\oint \frac{dQ}{T} = 0}$$

for vilkårlig
reversibel
kretsprosess

Men da er dQ/T endringen i en tilstandsfunksjon som vi kaller entropi, S . Dvs:

$$dS = dQ/T$$

$$\oint dS = 0$$

$$[S] = J/K$$

Nå kan 1. hovedsetning - for reversible prosesser - uttrykkes utelukkende med tilstandsfunksjoner:

$$dQ = dU + dW ; \quad dQ = T dS \quad (\text{rev. varme});$$

$$dW = p dV \quad (\text{rev. arbeid})$$

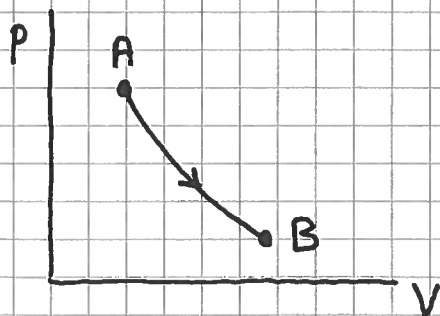
$$\Rightarrow \boxed{T dS = dU + p dV}$$

Den termodynamiske identitet

Eksempler

Eks 1: Hva er ΔS for rev. adiabatisk prosess?

Løsn 1:



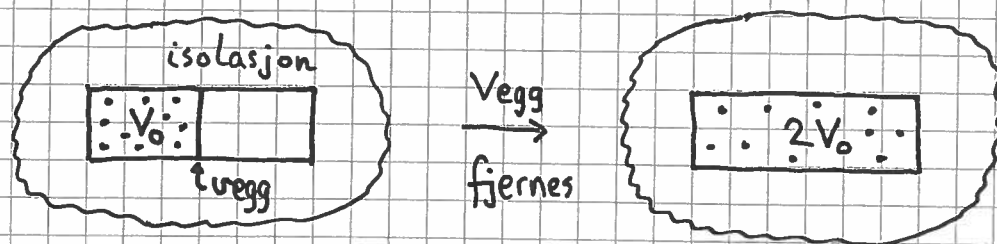
$$dQ = T dS = 0 \quad (\text{hele veien})$$

$$\Rightarrow dS = 0 \quad (-''-)$$

$$\Rightarrow \Delta S = S_B - S_A = \underline{\underline{0}}$$

Dvs: $S = \text{konstant}$ i rev. adiabatisk prosess, som derfor også kalles isentropisk.

Eks 2: Hva er ΔS for spontan utvidelse av ideell gass i varmeisolerert system?



Løsn 2: Her er $\Delta Q = 0$, men $\Delta S \neq \Delta Q/T$ fordi prosessen er irreversibel! Veggens fjernes uten at gassen utfører noe arbeid $\Rightarrow \Delta W = 0$. Da gir 1. lov $\Delta U = 0$, og siden $U = U(T)$ for ideell gass, skjer utvidelsen ved konstant T . Dermed:

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T} dV = C_V \frac{dT}{T} + \frac{Nk_B}{V} dV \stackrel{dT=0}{=} Nk_B \frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow \Delta S = \int dS = Nk_B \int_{V_0}^{2V_0} \frac{dV}{V} = Nk_B \ln \frac{2V_0}{V_0} = \underline{\underline{Nk_B \ln 2}}$$

Kommentarer:

- Da S er en tilstandsfunksjon, kan vi beregne ΔS for en irreversibel prosess ved å regne på en reversibel prosess. Det holder å kjenne start- og slutt-tilstandene.
- Vi har regnet ut at $\Delta S > 0$ for en irrev. prosess i et termisk isolert system. Dette er et eksempel på prinsippet om entropiens økning, som holder generelt:

$$\Delta S \geq 0 \text{ for alle prosesser i et termisk isolert system}$$

($\Delta S = 0$ for alle reversible prosesser i termisk isolert system)

Mikroskopisk beskrivelse av entropi [YF 20.8; LHL 17.11]

(130)

På Boltzmanns gravstein i Wien: $S = k \log W$

I "vårt" språk: $k \rightarrow k_B$; $\log \rightarrow \ln$; $W \rightarrow \Omega$ [da W er arvea...]

$$\Rightarrow \boxed{S = k_B \ln \Omega} \quad \text{Boltzmanns prinsipp}$$

Ω = antall ulike mikrotilstander konsistent med gitt makrotilstand

Eks: Spontan utvidelse av ideell gass (som på s. 126).

Løsn: Tenk deg at V_0 deles inn i M små delvolum Δ , slik at hver av de N partiklene har M mulige posisjoner før og $2M$ mulige posisjoner etter utvidelsen fra V_0 til $2V_0$.

Dermed er: $\Omega_{\text{før}} = M^N$, $\Omega_{\text{etter}} = (2M)^N$.

$$\Rightarrow \Delta S = S_{\text{etter}} - S_{\text{før}} = k_B \ln (2M)^N - k_B \ln M^N = k_B \ln 2^N = \underline{\underline{Nk_B \ln 2}}$$

- Samme resultat som med termodynamikk på s. 126.
- "Økt uorden betyr økt entropi"; presist formulert av Boltzmann.
- Naturlige (spontane) prosesser går i en bestemt retning, som tilsvarer at entropien øker.
- 1. og 2. hovedsetning oppsummert: Energien er bevart. Entropien øker.