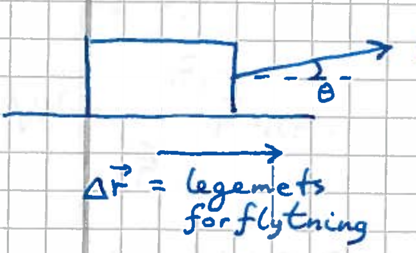
Arbeid og energi [YF 6, 7 ; LL 4]

Arbeid [YF 6.1–6.3 ; LL 4.1]



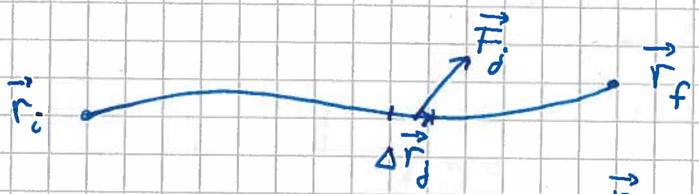
arbeid $\stackrel{\text{def}}{=}$ kraft × forflytning

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\theta$$

= arb. utført av ytre kraft $\vec{F}$

Enhet: $[W] = N \cdot m = J$ (joule)

Generelt:



$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta\vec{r}_j \underset{\Delta r_j \to 0}{=} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arb. utf. av $\vec{F}$ ved forflytn. fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_f$

Effekt [YF 6.4 ; LL 4.1]

$\stackrel{\text{def}}{=}$ arbeid (evt. energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad [P] = J/s = W \text{ (watt)}$$

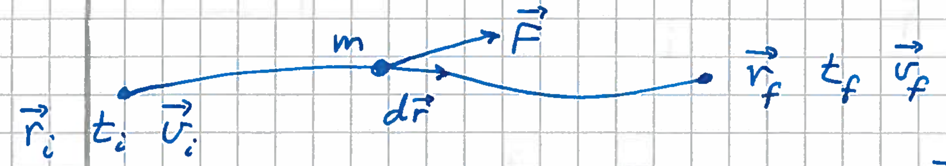
Eks: Årsforbruk på 30 MWh el.energi er

$$30 \cdot 10^6 \, \frac{J}{s} \cdot 3600 \, s = \underline{\underline{108 \text{ GJ}}}$$

og midlere effekt er

$$\langle P \rangle = \frac{W}{t} = \frac{30 \cdot 10^6 \text{ Wh}}{365 \cdot 24 \text{ h}} \approx \underline{\underline{3.4 \text{ kW}}}$$

Kinetisk energi [YF 6.2; LL 4.2]



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} m\,\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt = m\int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \vec{v}\cdot d\vec{v}$$

$$d(v^2) = d(\vec{v}\cdot\vec{v}) = d\vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot d\vec{v} = 2\vec{v}\cdot d\vec{v} \Rightarrow \vec{v}\cdot d\vec{v} = \tfrac{1}{2}d(v^2)$$

$$\Rightarrow \underline{W} = \tfrac{1}{2}m\int_{v_i}^{v_f} d(v^2) = \underline{\tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2}$$

Kinetisk energi: $K \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2$

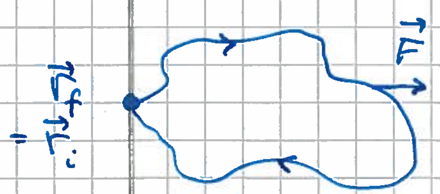
$$\Rightarrow \boxed{W = K_f - K_i = \Delta K}$$

(Netto) Arbeid W utført på legemet tilsvarer endringen ΔK i legemets kin. energi.

Konservativt ~~s~~ system [YF 7.3; LL 4.4]

I et kons. system virker kun kons. krefter.
Da tapes ikke mek. energi til andre energiformer (varme etc)

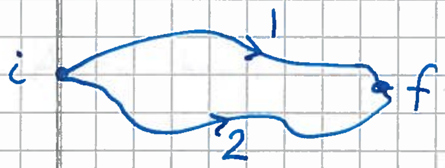
Anta $\vec{r}_f = \vec{r}_i$ (lukket kurve) og $K_f = K_i$, dvs $\underline{\Delta K = W = 0}$



$$\Rightarrow \boxed{\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0}$$

Da er $\vec{F}$ en <u>konservativ</u> kraft!

Hvis $\vec{F}$ er kons, er W uavh. av veien:



$$W_j = \left[\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right]_j \qquad j = 1, 2$$

$$0 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \underbrace{\left[\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right]_1}_{= W_1} + \underbrace{\left[\int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} \right]_2}_{= -W_2} = W_1 - W_2$$

$\Rightarrow$ $\underline{W_1 = W_2}$ (qed)

Potensiell energi [YF 7.1-7.4 ; LL 4.3-4.4]

Anta kons. $\vec{F}$. Da er

$$\boxed{U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

(pr def) den potensielle energien i pos. $\vec{r}$, der vi har valgt $U(\vec{r}_0) = 0$.

NB: Valget av $\vec{r}_0$ har ingen fysisk betydning.
Kun forskjeller i pot. energi har fysisk betydning.

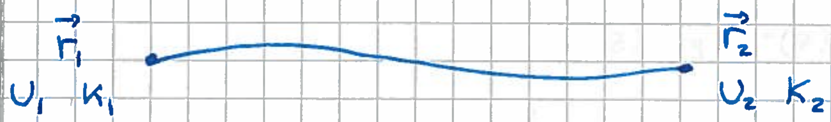
Med kons. $\vec{F}$ gjelder (se Matematikk 2)

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \iff \nabla \times \vec{F} = 0$$

$$U = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} \iff \vec{F} = -\nabla U$$

Bevarelse av mekanisk energi [YF 7.1-7.3; LL 4.5]

Anta kons. system.



$$U_1 - U_2 = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \left(-\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}\right) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = W = K_2 - K_1$$

$$\Rightarrow \boxed{K_1 + U_1 = K_2 + U_2}$$

Dvs: I et kons. system er total mekanisk energi

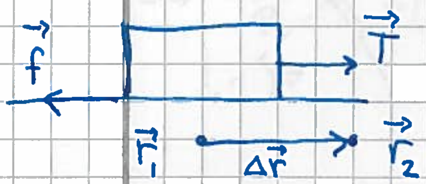
$$E = K + U$$

bevart.

Kons. krefter: Tyngdekraft. Coulombkraft.

Friksjonskrefter er <u>ikke</u> konservative.

Friksjonsarbeid [YF 7.3; LL 4.5]



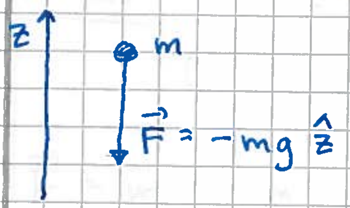
$$W_f = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f}\cdot d\vec{r} < 0$$ fordi $\vec{f}$ alltid er rettet <u>mot</u> $d\vec{r}$

$\Rightarrow$ Mek. energi tapes/omdannes til varme, lyd etc.

Hvis $\vec{f}\cdot d\vec{r} < 0$ alltid, er $\oint \vec{f}\cdot d\vec{r} < 0$

dvs $\vec{f}$ kan <u>ikke</u> være konservativ.

Eks 1: Fritt fall i tyngdefeltet.



Slippes fra $z = 0$ med $v(0) = 0$
og valget $U(0) = 0$.
Finn $U(z)$ og $v(z)$ (uten luftmotstand)

Løsn 1: $U(z) = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_0^z (-mg\hat{z})\cdot(\hat{z}\,dz) = \underline{\underline{mgz}}$

Bevart $E \Rightarrow U(z) + K(z) = U(0) + K(0) = 0$

$\Rightarrow mgz + \frac{1}{2} m v(z)^2 = 0$

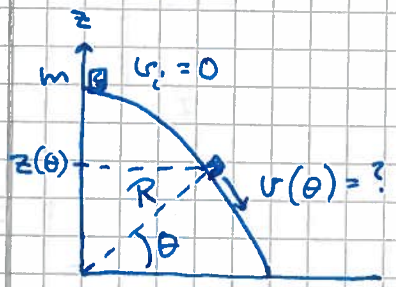
$\Rightarrow \underline{\underline{v(z) = \sqrt{-2gz}}} \quad (z<0)$

Eks 2: Hva blir terminalhastigheten v_t i Eks 1 hvis bordtennisball ?

Løsn 2: $f = Dv^2$ med $D = \frac{1}{2}\rho A C_d = \frac{1}{2}\cdot 1.3 \cdot \pi \cdot (0.020)^2 \cdot 0.5$ kg/m
$\approx 4\cdot 10^{-4}$ kg/m

N1 $\Rightarrow Dv_t^2 = mg \Rightarrow v_t = \sqrt{mg/D} = \sqrt{0.0027\cdot 9.8/4\cdot 10^{-4}} \approx \underline{\underline{8 \text{ m/s}}}$

Eks 3: På glatt kuppel (tak)



Velg (f.eks) $U(0) = 0 \Rightarrow E = U(R) = mgR$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m v(\theta)^2 + mg \underbrace{z(\theta)}_{= R\sin\theta} = mgR$

$\Rightarrow \underline{\underline{v(\theta) = \sqrt{2gR(1-\sin\theta)}}}$

- Øv 3: Hvor mister m kontakten med underlaget? $(N = 0)$
- Hvordan ta hensyn til friksjon ?
- Hva med objekter som ruller ?

} Numerikk påkrevd...