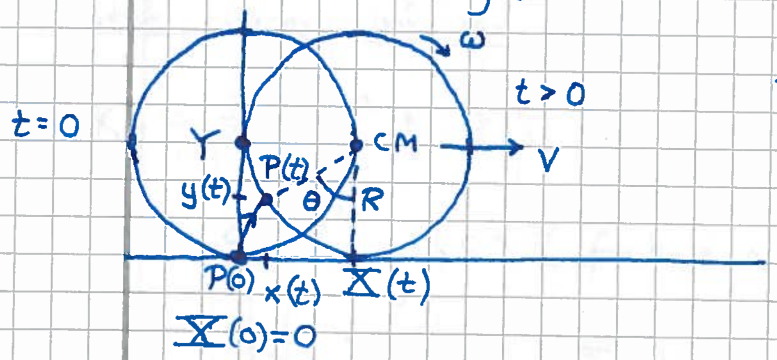
# Ren rulling [YF 10.3 ; LL 6.7]






$P(t) = (x(t), y(t))$

= banen til punkt på periferien; $P(0) = (0,0)$

Vi ser at: $X = R\cdot\theta$, $Y = R$, $x = X - R\sin\theta = R\theta - R\sin\theta$,

$y = Y - R\cos\theta = R - R\cos\theta$

CM: $\vec{R}_{CM} = X\hat{x} + Y\hat{y} = R\theta\,\hat{x} + R\,\hat{y}$

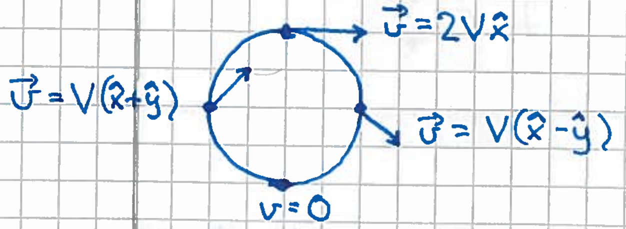
$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM} = R\dot{\theta}\,\hat{x} = R\omega\,\hat{x} = V\,\hat{x}$

$\vec{A} = \dot{\vec{V}} = R\ddot{\theta}\,\hat{x} = R\dot{\omega}\,\hat{x} = R\alpha\,\hat{x} = A\,\hat{x}$

Rullebetingelsene: $\boxed{V = R\omega, \quad A = R\alpha}$

P: $\vec{v} = \dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y} = (R\dot{\theta} - R\dot{\theta}\cos\theta)\,\hat{x} + R\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{y}$

$= \underline{V(1-\cos\theta)\,\hat{x} + V\sin\theta\,\hat{y}}$




**Merk:** $v = 0$ når $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$, dvs når P er i kontakt med underlaget

$\Rightarrow \vec{f}\cdot\vec{v} = 0$

$\Rightarrow$ Null effekttap ved ren rulling!

(selv om statisk friksjon $\vec{f} \neq 0$)

Banen er en sykloide:

## Kinetisk energi ved ren rulling

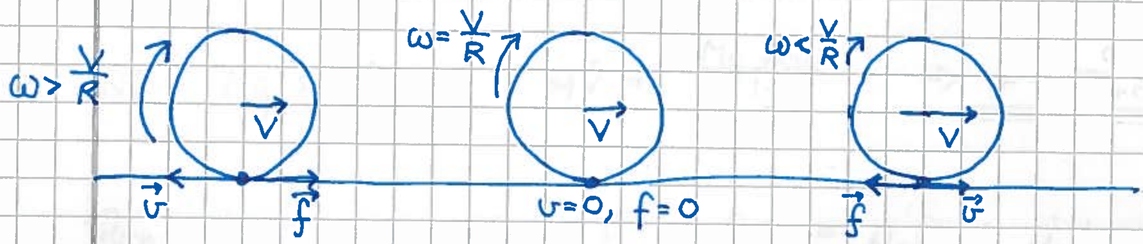
$$K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

$$I_0 = cMR^2 \quad \left(c = \tfrac{2}{5} \text{ for kule osv}\right) \quad ; \quad \omega = \frac{V}{R}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{K = (1+c)\frac{1}{2} M V^2}}$$

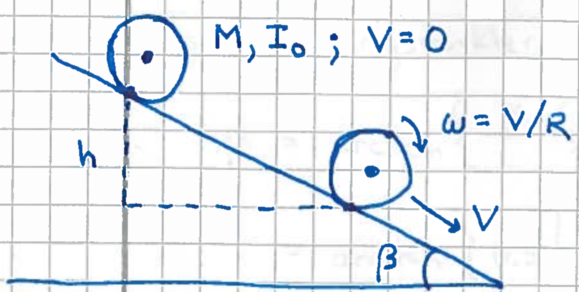
## Sluring [LL 6.7]

Hvis $\omega \neq V/R$, er det en relativ hastighet $v = V - \omega R$ mellom legeme og underlag i kontaktpunktet:




Vi har kinetisk friksjon, $f = \mu_k N$, og taper mek. energi, pr tidsenhet:
$$P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$$

## Eks: Rulling på skråplanet [YF 10.3 ; LL 6.8]




Bestem $V$, $\dot{V}$, $f$, samt minste $\mu_s$ som gir ren rulling.

$I_0 = cMR^2$

Forsøk gir: $V_{\text{kule}} > V_{\text{skive}} > V_{\text{kuleskall}} > V_{\text{hul sylinder}}$

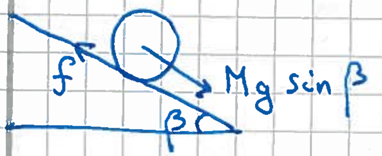
Løsning: Mek. energi bevart

$\Rightarrow \quad Mgh = (1+c)\frac{1}{2}MV^2$ med $h = x\sin\beta$

$$\Rightarrow \quad V(x) = \sqrt{\frac{2gx\sin\beta}{1+c}}$$ , i tråd med forsøk!

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dV}{dx} = V\cdot\sqrt{\frac{2g\sin\beta}{1+c}}\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{g\sin\beta}{1+c}$$

Friksjonskraften $\vec{f}$, retning oppover skråplanet, reduserer $\dot{V}$ med en faktor $(1+c)^{-1}$. [Hvis $f=0$, er $\dot{V} = g\sin\beta$]




N2: $Mg\sin\beta - f = M\dot{V} = \frac{Mg\sin\beta}{1+c} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{c}{1+c}Mg\sin\beta$

Ren rulling bare hvis $f \le f_{max} = \mu_s N = \mu_s Mg\cos\beta$

$$\Rightarrow \quad \frac{c}{1+c}Mg\sin\beta \le \mu_s Mg\cos\beta$$

$$\Rightarrow \quad \mu_s \ge \frac{c}{1+c}\tan\beta$$

Eks: Kuleskall, $c = 2/3$, og $\mu_s = 0.2$ gir ren rulling for helningsvinkler opp til

$$\beta = \arctan\left\{\frac{\mu_s(1+c)}{c}\right\} = \arctan\left\{\frac{0.2\cdot 5/3}{2/3}\right\}$$

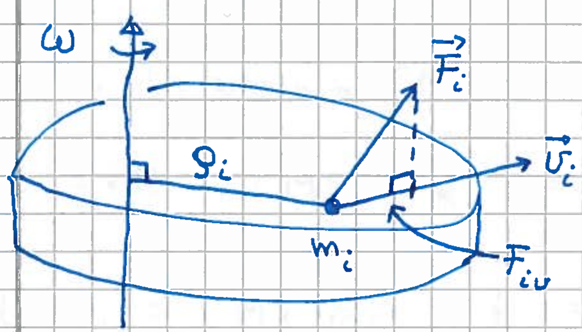
$$= \arctan\{0.5\} \approx 27^\circ$$

# Rotasjonsdynamikk

## Akse med fast orientering

[YF 10.1–10.3 ; LL 6.2]

- Essensielt et endimensjonalt problem
- Dekker det meste vi skal ta for oss (ikke alt)
- Beskriver rotasjonsdelen av legemets totale bevegelse




$v_i = \rho_i \omega$

$F_{iv}$ = komponent av $\vec{F}_i$ langs $\vec{v}_i$

$\Rightarrow \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = F_{iv} \cdot v_i$

Tilført effekt: $P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$

(a) Med N2: $P = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

$$= \frac{d}{dt} \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i \rho_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \frac{d\omega^2}{dt^2} = \frac{1}{2} I \cdot 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dt} = \underline{I \omega \frac{d\omega}{dt}}$$

(b) "Direkte": $P = \sum_i F_{iv} \cdot v_i = \left(\sum_i F_{iv} \rho_i\right)\omega = \underline{\tau \omega}$

$\Rightarrow \boxed{\tau = I \dot{\omega}}$ N2, rot. om akse med fast orientering

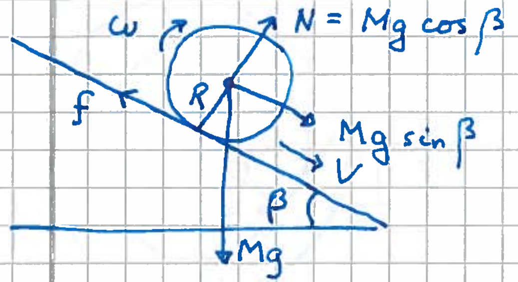
Her er $\tau = \sum_i F_{iv} \rho_i$ = ytre <u>dreiemoment</u> på legemet, mhp rotasjonsaksen

$I = \sum_i m_i \rho_i^2$ = legemets <u>treghetsmoment</u> mhp rot. aksen

Fra $P = \tau\, d\varphi/dt$ og $P = dW/dt$ ser vi at <u>tilført arbeid ved rotasjon</u> er:

$\boxed{dW = \tau\, d\varphi}$ [YF 10.4 ; LL 6.4]

Eks 1 : Rulling på skråplan




$\omega = V/R$, $\dot{\omega} = \dot{V}/R$

$I_0 = cMR^2$

N2, rot. om akse gjennom CM : $\tau = I_0 \dot{\omega}$ ; $\tau = f \cdot R$

$\Rightarrow f \cdot R = cMR^2 \cdot \frac{\dot{V}}{R} \Rightarrow f = cM\dot{V}$

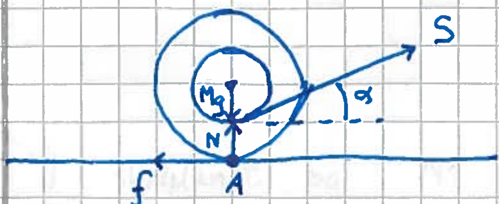
N2, transl. : $Mg \sin\beta - f = M\dot{V}$

$\Rightarrow Mg \sin\beta - cM\dot{V} = M\dot{V} \Rightarrow \underline{\underline{\dot{V} = \frac{g \sin\beta}{c+1}}}$ (som s. 36)

Eks 2: Snelle (på flatt underlag)


Hvilken vei ruller snella ?

Løsn: Velg akse i "kontaktlinja" A :



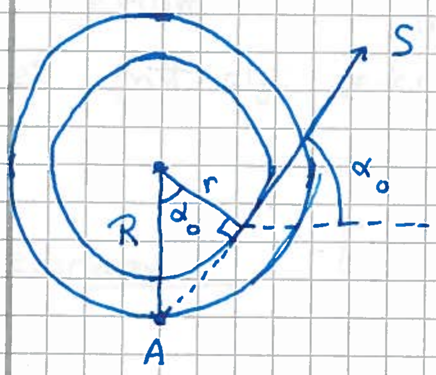

Mg, N og f har <u>ingen arm</u> mhp aksen A

$\Rightarrow$ Kun S kan ha dreiemoment mhp aksen A

Liten α (som i fig) $\Rightarrow$ Rulling mot høyre

Stor α $\Rightarrow$ —— " —— venstre

Statisk likevekt hvis $\vec{S}$ går gjennom A (og S ikke for stor!),
da er $\tau_A = 0$ :

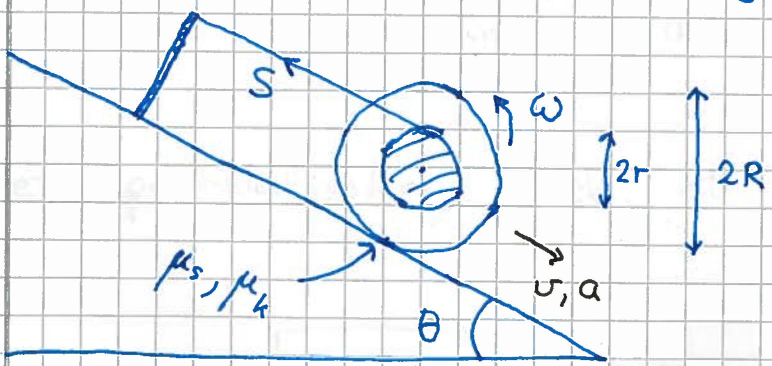



Fra figur: $\cos\alpha_0 = \frac{r}{R}$

Oppg: Vis at snella nå blir liggende i ro dersom

$$S \leq \frac{\mu_s Mg}{\cos\alpha_0 + \mu_s \sin\alpha_0}$$

Eks 3: Snelle på skråplan (baklengs) (Øving 6)




- Ved hvilken $\theta = \theta_0$ vil snella begynne å "skure baklengs" nedover?
- Hva er S og a hvis $\theta > \theta_0$ ?

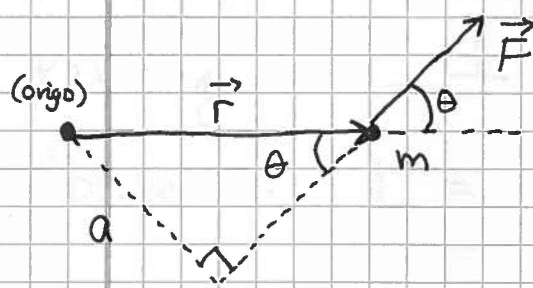
Tips:

- N1 ∥ skråplanet og N1 for rot. om CM gir $\theta_0$ når $f = f_{max} = \mu_s N$
- N2 —— ∥ —— og N2 —— ∥ —— gir S og a ; $f = \mu_k N$

# Rotasjonsdynamikk i 3D ("vektorielt")

NB: Dreiemoment $\vec{\tau}$ og dreieimpuls $\vec{L}$ må beregnes relativt et fritt valgt referansepunkt. Vi velger her origo som ref.punkt.

## Dreiemoment [YF 10.1 ; LL 5.5, 6.4]



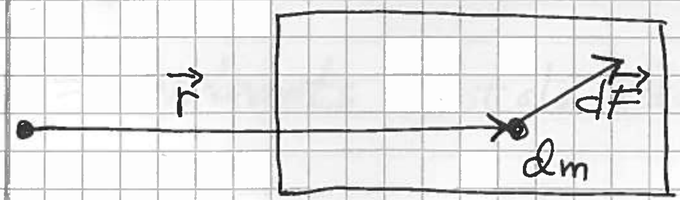

$$\boxed{\vec{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{F}}$$

= dreiemomentet til $\vec{F}$ på m (relativt origo)

Retning: $\vec{\tau} \perp \vec{F}$ og $\vec{\tau} \perp \vec{r}$ (Her: Ut av planet)

Abs.verdi: $\tau = r \cdot F \cdot \sin\theta = a \cdot F$ ("arm × kraft")

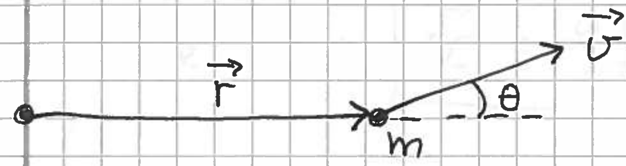
For et partikkelsystem, f.eks. et stivt legeme:




$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{F}$$ = det totale dreiemomentet på systemet

# Dreieimpuls

[YF 10.5 ; LL 6.6]



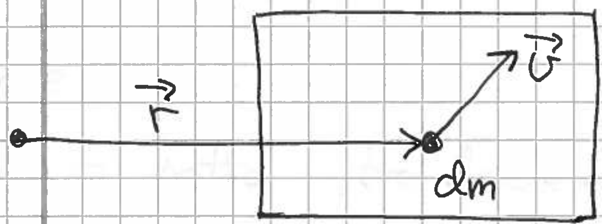

impuls: $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\boxed{\vec{L} \overset{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{p}} = \text{dreieimpulsen til } m$$

Retning : $\vec{L} \perp \vec{r}$ og $\vec{p}$ (Her: <u>Ut</u> av planet)

Abs. verdi: $L = r\,p\,\sin\theta$

För partikkelsystem :




$d\vec{p} = dm \cdot \vec{v}$

$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times d\vec{p} = \int \vec{r} \times \vec{v} \cdot dm$$

$=$ systemets totale dreieimpuls

# N2 for rotasjon [YF 10.5 ; LL 6.6]

Skal vise at: $\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$ ("spinnsatsen")

Ser på punktmasse m:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right) = \underbrace{m \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} \times \vec{v}}_{=0} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\stackrel{N2}{=} \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \qquad \text{(qed)}$$

(For partikkelsystem går beviset helt tilsvarende.)

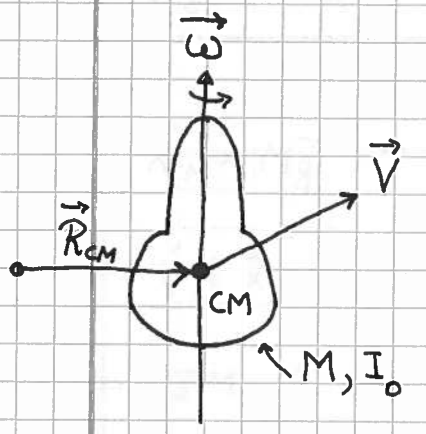
Her er:

$\vec{\tau}$ = netto ytre dreiemoment på systemet

$\vec{L}$ = systemets totale dreieimpuls

# $\vec{L}$ for stivt legeme [YF 10.5 ; LL 6.6]

Anta stivt legeme med refleksjonssymmetri om rotasjonsaksen
[dvs symmetrisk når $\vec{\rho} \to -\vec{\rho}$ ]




$$\boxed{\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{L}_b + \vec{L}_s \\ &= \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} + I_0 \vec{\omega}\end{aligned}}$$

[Se notat for bevis]

Banedreieimpuls: (bidrag pga bevegelsen til CM)

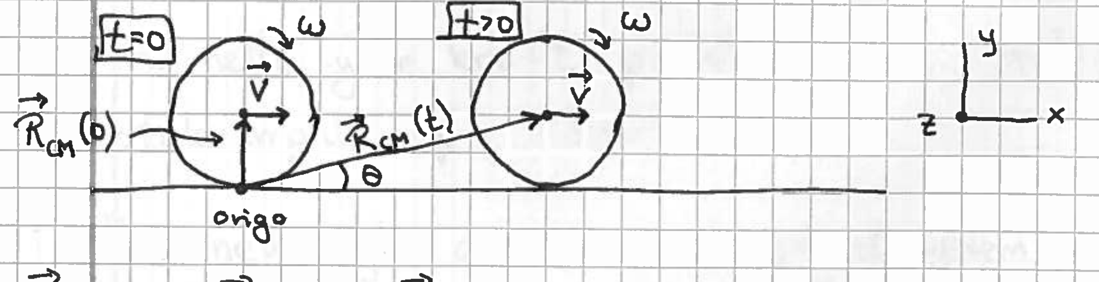
$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}$ ; dvs som punktmasse M i CM med hastighet $\vec{V}$

Indre dreieimpuls: (bidrag pga rotasjon om CM)

$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega}$ ; uavhengig av valg av referansepunkt

---

Eks: Rent rullende kule ; $\vec{L} = ?$




$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$
$(\omega < 0)$

$I_0 = \frac{2}{5} M R^2$

$$\vec{L}_b(0) = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} = -MRV\,\hat{z}$$

$$\vec{L}_b(t) = \vec{R}_{CM}(t) \times M\vec{V} = -R_{CM}(t)\,MV \sin\theta\,\hat{z} = -MRV\,\hat{z}$$

$$\vec{L}_s(0) = \vec{L}_s(t) = I_0 \vec{\omega} = -\frac{2}{5} M R^2 \cdot \frac{V}{R}\,\hat{z} = -\frac{2}{5} MRV\,\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = -\frac{7}{5} MRV\,\hat{z} \quad , \text{ uavh. av } t$$