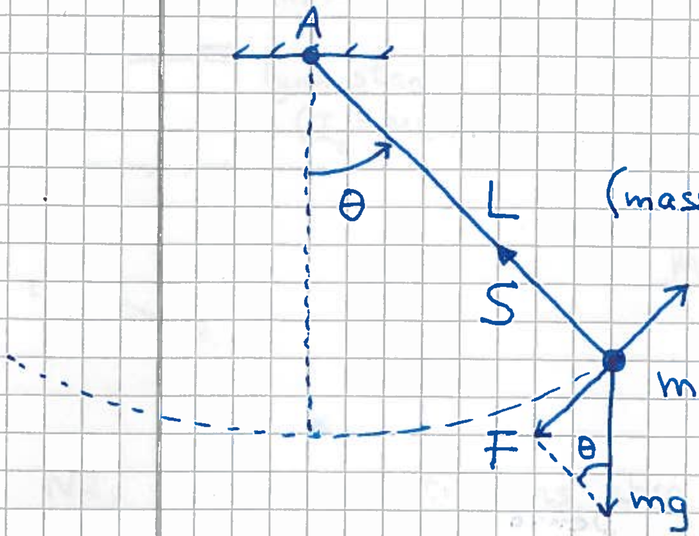
Pendler

Matematisk pendel [YF 14.5; LL 9.6]



(masseløs snor eller stang)

$v = L \cdot \dot{\theta}$

m (punktmasse)

N2 ∥ sirkelbanen:

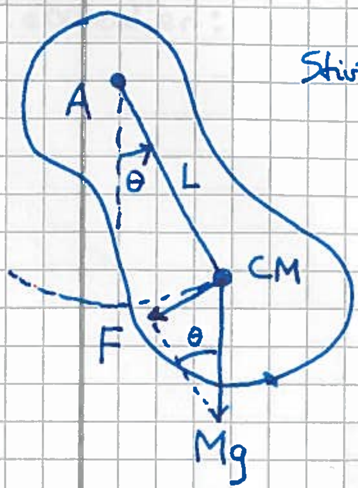
$$\left. \begin{aligned} F &= -mg \sin\theta \\ a &= \dot{v} = L\ddot{\theta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -mg\sin\theta = mL\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Anta små utsving fra likevekt, $|\theta| \ll 1 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$

$\Rightarrow$ Harmonisk oscillator: $\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0 \quad \text{med} \quad \omega_0 = \sqrt{g/L}}$

Fysisk pendel [YF 14.6 ; LL 9.6]



Stivt legeme, masse M, treghetsmoment I mhp aksen A.

N2, rotasjon om A: $\tau = I\ddot{\theta}$

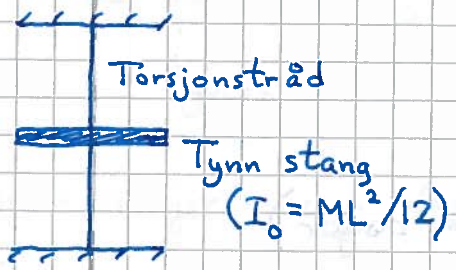
med $\tau = -F \cdot L = -MgL\sin\theta$

[pos. τ som gir rotasjon mot klokka]

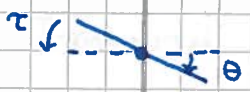
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{MgL}{I}\sin\theta = 0$$

Anta små utsving, $\sin\theta \approx \theta$: $\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0 \quad \text{med} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{MgL}{I}}}$

Torsjonspendel [YF 14.4 ; LL 9.6]



Hookes lov: Tråden motsetter seg vridning og virker på stanga med dreiemoment som er prop. med vridningsvinkelen, $\tau = -\varkappa\,\theta$, med <u>torsjonsstivhet</u> $\varkappa$



N2, rotasjon om trådens akse :

$$\tau = I_0\ddot{\theta} \Rightarrow -\varkappa\theta = I_0\ddot{\theta} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad \text{med } \omega_0 = \sqrt{\varkappa/I_0}}$$

Eks / Exp :

$M = 50\,\mathrm{g}$, $L = 11\,\mathrm{cm}$. Mål $T = 2\pi/\omega_0$ og bestem $\varkappa$.

Løsn:

$$\varkappa = I_0\,\omega_0^2 = \frac{1}{12}ML^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} = \underline{\underline{\frac{ML^2\pi^2}{3T^2}}}$$

Tallverdier: $\varkappa = \dfrac{0.050\,\mathrm{kg}\cdot(0.11\,\mathrm{m})^2\cdot\pi^2}{3\cdot(0.8\,\mathrm{s})^2} = \underline{0.003\ \mathrm{Nm}}$

BØLGER [YF 15, 16, 11.4 ; LL 10, 7.2]

= forplantning av en forstyrrelse fra likevekt, typisk en svingning

Masse svinger men forplanter seg ikke.
Energi svinger og forplanter seg med bølgen.

Transversal bølge (T) : Partikler svinger $\perp$ bølgens forplantningsretning
Longitudinal bølge (L) : —"— —— $\parallel$ —"— ——

Eks:

Streng / Fjær : T - utsving av streng- / fjærelementer
Lyd : L - utsving av molekylene i mediet

Overflatebølger (f.eks. på vann) : T og L utsving av vannet

Elektromagnetiske bølger (lys, IR, UV, radio, røntgen, ...) :
Elektrisk felt $\vec{E}$ og magnetfelt $\vec{B}$ svinger $\perp$ forplantningsretningen

Bølge fenomener :

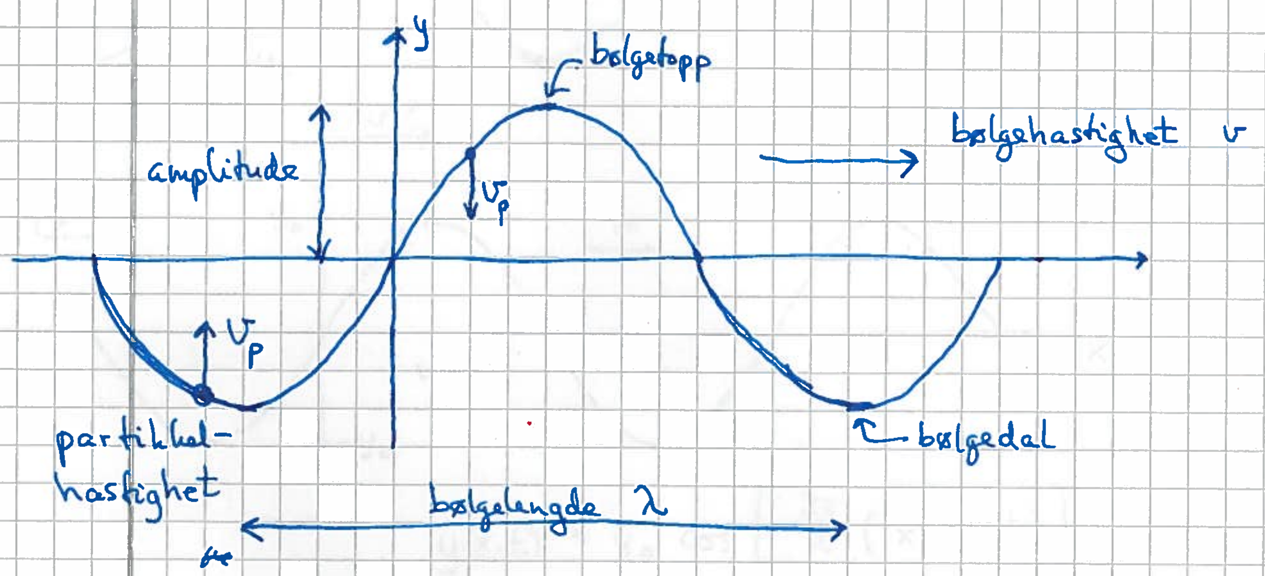
Interferens, diffraksjon
Stående bølger, resonans
Dopplereffekt
Brytning. Dispersjon $\Rightarrow$ Regnbue etc
Sjokkbølger

Harmonisk bølge [YF 15.2, 15.3 ; LL 10.2]

[Vilkårlig "bølgepakke" = sum av harmoniske bølger ; Fourieranalyse]

Anta T-bølge på (∞ lang) streng.

$y = y(x,t)$ = utsving fra likevekt ($y=0$) i pos. x ved tid t



T = perioden = tida det tar for bølgemønsteret å flytte seg en bølgelengde λ

Dermed er bølgehastigheten : $v = \dfrac{\lambda}{T}$ (fasehastigheten)

f = frekvensen = antall svingninger ved en gitt pos. x pr tidsenhet

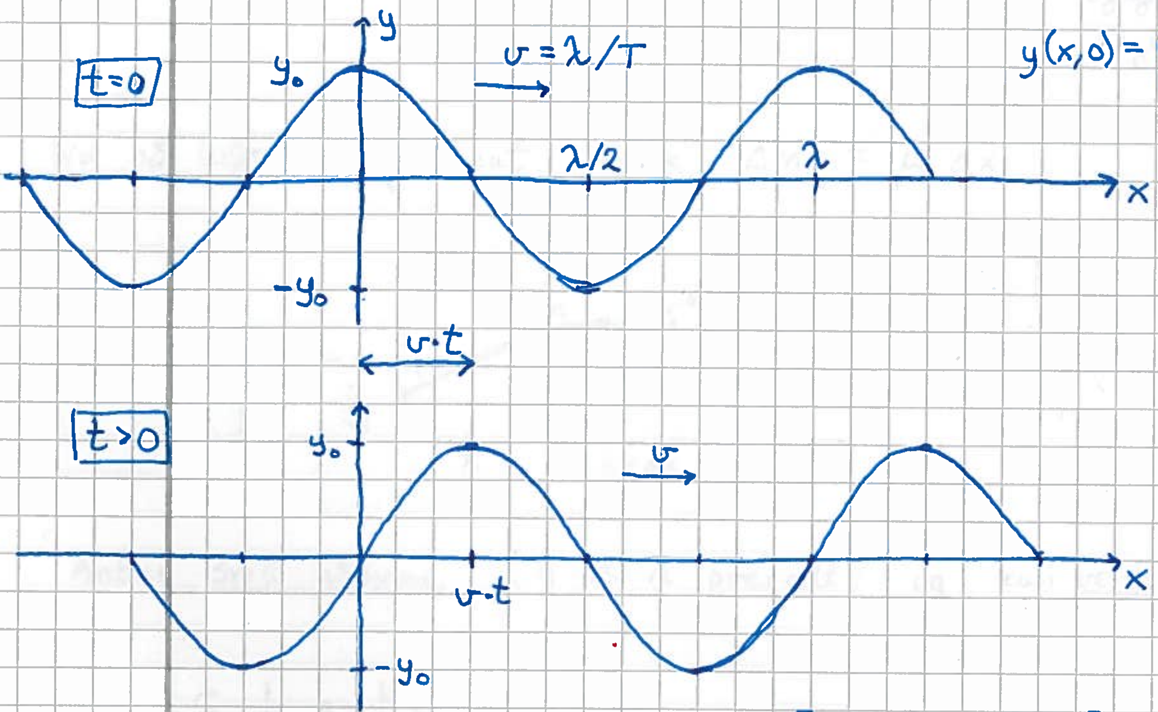
$$\Rightarrow \quad f = 1/T$$

ω = vinkelfrekvensen = bølgens faseendring ved en gitt pos. x pr tidsenhet

$$\Rightarrow \quad \omega = 2\pi/T = 2\pi f$$

Partikkelhastighet : $v_p = dy/dt$

Matematisk beskrivelse av harmonisk bølge :



$$y(x,0) = y_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

$$y(x,t) = y_0 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \lambda \cdot \frac{\omega}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot v$$

Bølgetallet : $k = 2\pi/\lambda$ $\quad [k] = m^{-1}$ $\quad$ [k = faseendring pr lengdeenhet ved gitt tid t]

Dermed :

$$\boxed{y(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t)}$$

Harmonisk bølge som forplanter seg i positiv x-retning, $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$

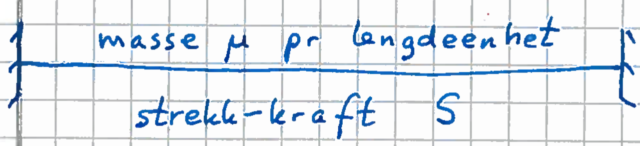
Tilsvarende: $y(x,t) = y_0 \cos(kx + \omega t)$ hvis bølgen forplanter seg i negativ x-retning

Mer generelt :

T-bølge : $\vec{D}(x,t) = \hat{y}\, D_0 \cos(kx \pm \omega t + \varphi)$

L-bølge : $\vec{D}(x,t) = \hat{x}\, D_0 \cos(kx \pm \omega t + \varphi)$

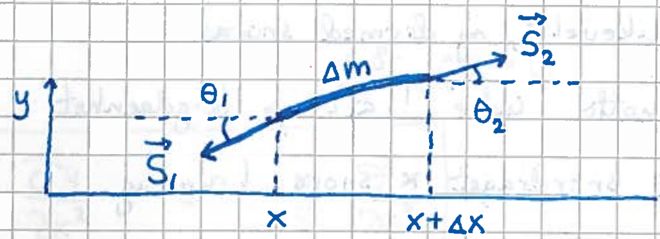
Transversal bølge på streng [YF 15.4 ; LL 10.1]



Likevekt : $y=0$

(Antar at strengens tyngde Mg kan neglisjeres)

N2 på lite strengelement, masse $\Delta m = \mu \Delta x$



["Snor" $\Rightarrow$ ingen bøyningsstivhet]

Antar små utsving ($y \ll \lambda$ overalt) og kun vertikal bevegelse.

$$\Rightarrow \quad |S_{1x}| = |S_{2x}| = S_x \quad \text{og} \quad S_x \approx S$$

N2: $\vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \Delta m \cdot \vec{a}$

Horisontalt: $S_{1x} + S_{2x} = \Delta m \cdot a_x = 0$

$$S_{1x} = -S_1 \cos\theta_1 = -S$$

$$S_{2x} = S_2 \cos\theta_2 = S$$

Vertikalt: $S_{1y} + S_{2y} = \Delta m \cdot a_y = \Delta m \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

$$S_{1y} = -S_1 \sin\theta_1$$

$$S_{2y} = S_2 \sin\theta_2$$

$$\Rightarrow \quad S_2 \sin\theta_2 - S_1 \sin\theta_1 = \Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Divider med S; $\quad S = S_1 \cos\theta_1 = S_2 \cos\theta_2$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{S_2 \sin\theta_2}{S_2 \cos\theta_2}}_{= \tan\theta_2} - \underbrace{\frac{S_1 \sin\theta_1}{S_1 \cos\theta_1}}_{= \tan\theta_1} = \Delta x \cdot \frac{\mu}{S} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Fra figuren: $\tan\theta = \partial y/\partial x$ = strengens helning

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{(\partial y/\partial x)_{x+\Delta x} - (\partial y/\partial x)_x}{\Delta x}}_{= \partial^2 y/\partial x^2 \text{ når } \Delta x \to 0} = \frac{\mu}{S} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{S} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

som er <u>bølgeligningen</u> for små transversale utsving $y(x,t)$ på streng (snor) med snordrag S og masse μ pr lengdeenhet.

Den <u>generelle løsningen</u> er:

$$\boxed{y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad ; \quad v = \sqrt{S/\mu}}$$

der f og g er vilkårlige "glatte" (dvs 2 ganger deriverbare) funksjoner.

[Bevises med $z = x - vt$ og kjerneregel for derivasjon:

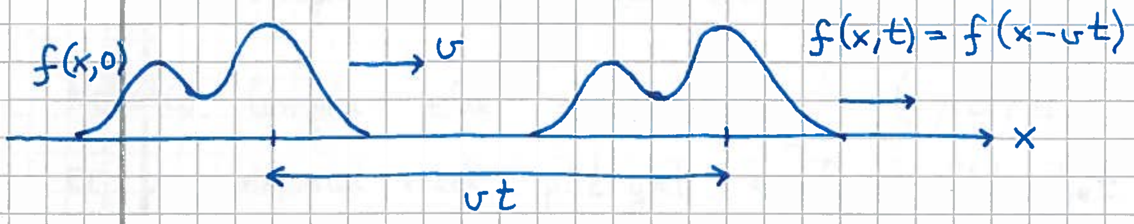
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \;;\; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = (-v)\frac{\partial f}{\partial z} \;;\; \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = (-v)\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

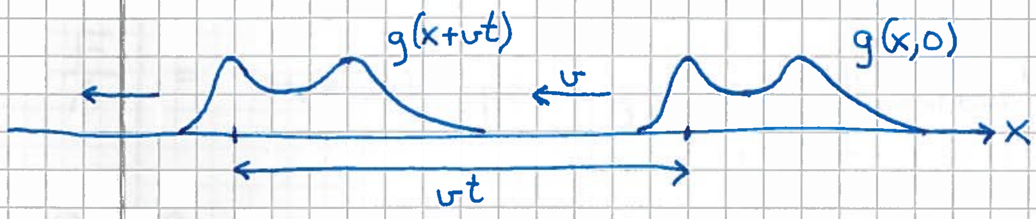
$$\Rightarrow \partial^2 f/\partial x^2 = (1/v^2)\, \partial^2 f/\partial t^2$$

Tilsvarende for g, med $z = x + vt$]

Vi ser at $f(x-vt)$ er en bølge som forplanter seg i positiv x-retning, med hastighet v:



Tilsv. ser vi at $g(x+vt)$ forplanter seg i negativ x-retning:



Eks/Exp: Mål S, $\mu = M/L$ og v med spiralfjær.
Finn ut om $v = \sqrt{S/\mu}$.

Elastisitet [YF 11.4 ; LL 7.2]

Lineær respons (Hookes lov) :

Relativ lengde- eller volumendring ($\Delta L / L_0$ evt $\Delta V / V_0$) er proporsjonal med påtrykt kraft pr flateenhet (F/A).

$$\frac{\Delta L}{L_0} \left(\text{evt } \frac{\Delta V}{V_0}\right) = \text{deformasjon} = \text{"strain"}$$

$$\frac{F}{A} = \text{mekanisk spenning} = \text{"stress"}$$

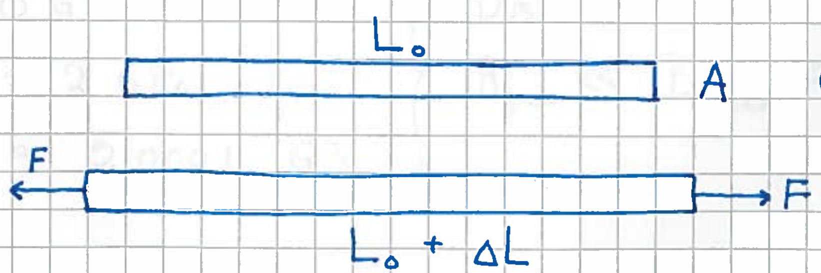
Prop. faktoren er en materialkonstant og kalles <u>elastisk modul</u> :

$$\text{Elastisk modul} = \frac{\text{Mekanisk spenning}}{\text{Deformasjon}} \quad \left(= \frac{\text{Stress}}{\text{Strain}}\right)$$

Tynn stang ; normalspenning :

Likevekt :

Strukket :



(A <u>lite</u>!)

Elastisitetsmodulen (YF : Youngs modul Y) :

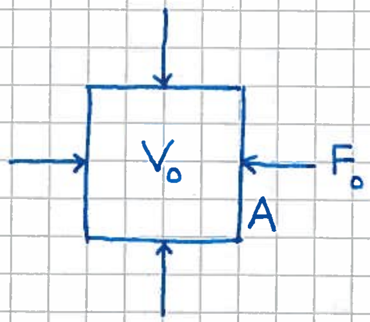
$$E = \frac{F/A}{\Delta L / L_0} \qquad [E] = N/m^2 = Pa \text{ (pascal)}$$

$\Rightarrow$ "Fjærkonstant" $k = F/\Delta L = E \cdot A / L_0$

Eks: Stål: $E \approx 200$ GPa. Grafen: $E \approx 1050$ GPa. DNA: $E \approx 0.3$ GPa

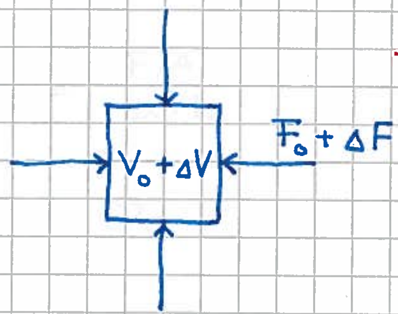
Volumkompressibilitet:

Likevekt:



$p_0 = F_0/A$ = likevektstrykket pga det omgivende mediet

En trykkøkning gir en volumreduksjon:



$p = p_0 + \Delta p$

Bulkmodulen:

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V_0} = -V_0 \frac{\Delta p}{\Delta V} \qquad [B] = N/m^2 = Pa$$

Eks: Stål: $B = 160$ GPa.

Vann: $B \approx 2$ GPa

Luft: $B \approx 0.0001$ GPa

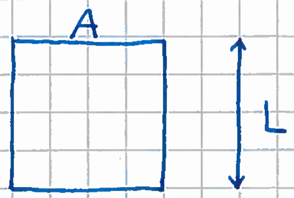
Dvs: $B_{gass} \ll B_{væske} < B_{fast\ stoff}$

Kompressibiliteten:

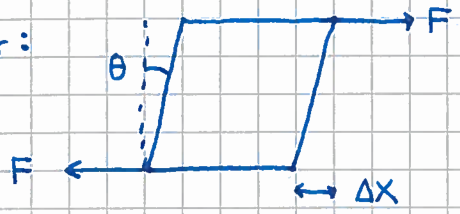
$$\kappa = B^{-1} = -\frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta p}$$

Skjærdeformasjon:

Likevekt:



Med skjærkrefter:



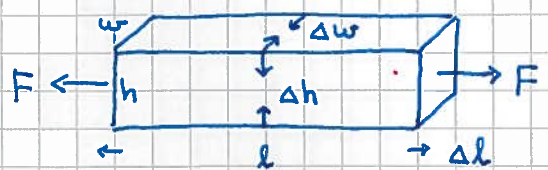
Skjærmodulen: $G = \dfrac{F/A}{\Delta x/L} = \dfrac{F/A}{\tan\theta} \overset{\theta \ll 1}{\approx} \dfrac{F/A}{\theta}$; $[G] = Pa$

Eks: Stål: $G \approx 79$ GPa

For de fleste faste stoffer: $E \sim B > G$

De elastiske modulene er ikke uavhengige av hverandre; normalspenning genererer skjærspenning og omvendt.

Poissontallet:



$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\nu \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

Poissontallet

Teoretiske sammenhenger:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad , \quad B = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$