

Størrelser og enheter [YF 1]

Eks:

Tid ; $t = 10.0 \text{ ms}$

↑ ↑ ↓ ↖

størrelse symbol tallverdi dekadisk forstørelse ($m = \text{milli} = 10^{-3}$)

SI-enhet

$[t] = s$ ("SI-enheten til tid er sekund")

Mekanikk:

lengde $[l] = m$

tid $[t] = s$

masse $[m] = \text{kg}$

Termodynamikk:

temperatur $[T] = K$

stoffmengde $[n] = \text{mol}$

(El. mag: strømstyrke $[I] = A$)

Sammensatte størrelser:

hastighet $[v] = m/s$

akselerasjon $[a] = m/s^2$

impuls $[p] = \text{kg m/s}$ (bevegelsesmengde)

Avledete enheter:

kraft $[F] = \text{kg m/s}^2 = N$

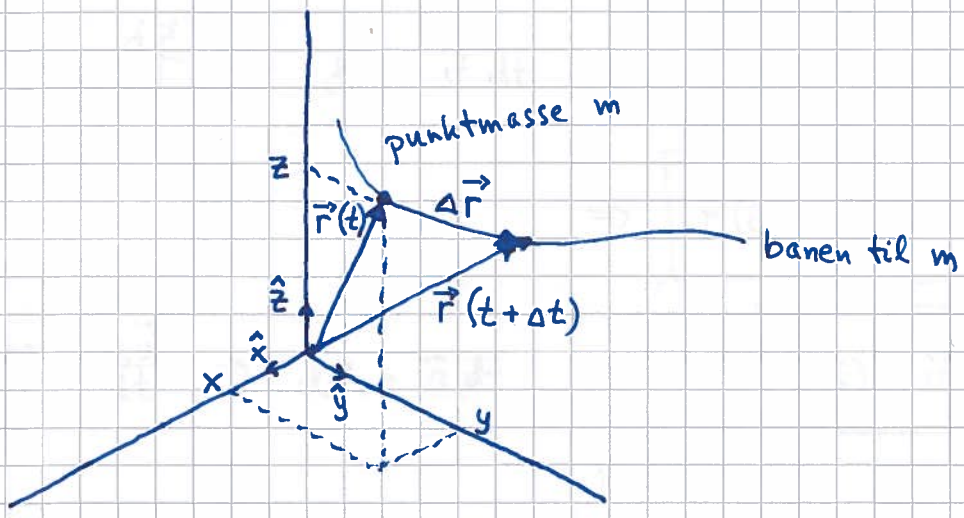
arbeid, energi $[W] = N \cdot m = J$

effekt $[P] = J/s = W$

trykk $[p] = N/m^2 = Pa$

Kinematikk [YF 2, 3 ; LL1]

(om bevegelse som sådan)



Enhetsvektorer:

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1$$

(dimensjonsløse)

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$$

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \dots = 0$$

Posisjon (til m) (ved tid t):

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$

Forflytning (i løpet av Δt):

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Hastighet $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Forflytning pr tidsenhet}$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$\Rightarrow \vec{v} \parallel \Delta \vec{r}$, dvs tangentiell til banen

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} ; \quad \dot{\vec{r}} = \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z}$$

$$\Rightarrow v_x = \dot{x} \quad osv$$

Akselerasjon $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Hastighetsendring pr tidsenhet}$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\Rightarrow a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \quad osv$$

$$\vec{r} \xrightarrow{\text{derivasjon}} \vec{v} \quad \text{og} \quad \vec{v} \xrightarrow{\text{derivasjon}} \vec{a}$$

slik at integrasjon gir \vec{r} fra \vec{v} og \vec{v} fra \vec{a} :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt \Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

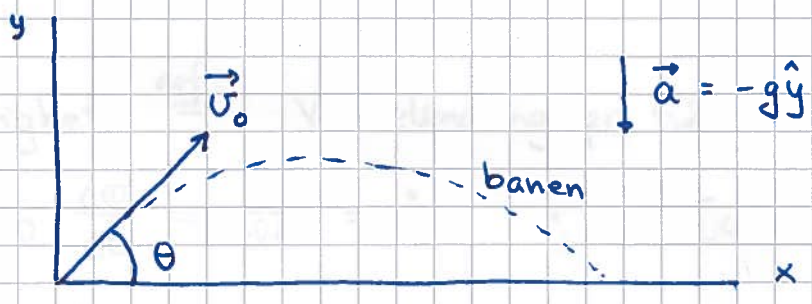
$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t) dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a} dt \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t) dt}$$

Hvis \vec{a} er konstant (og $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$) :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t ; \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

Eks: Skrått kast i tyngdefeltet, med $\vec{r}_0 = 0$



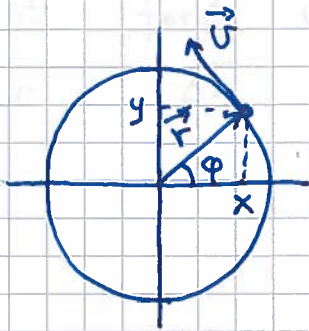
$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 = \hat{x} \underbrace{v_0 t \cos \theta}_x + \hat{y} \left(\underbrace{v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2}_y \right)$$

$$\Rightarrow y(x) = x \tan \theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (\text{parabel})$$

Sirkelberegelse

[YF 3.4 ; LL 1.7, 1.8]

(4)



Polarkoordinater (r, φ) :

r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom (positiv) x-akse og \vec{r}

Fortegn: $\varphi > 0$ mot klokka

Vi ser direkte fra figuren:

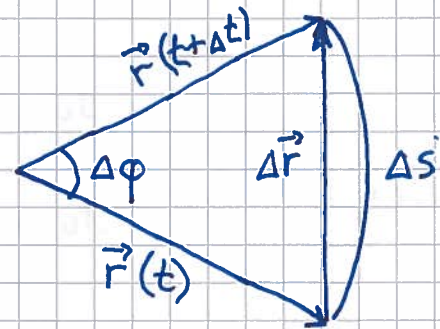
$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \hat{x} r \cos \varphi + \hat{y} r \sin \varphi$$

Vinkel $\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Buelengde}}{\text{radius}}$

$$\Delta \varphi = \Delta s / r$$

$$[\varphi] = 1$$



Vinkelhastighet $\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Vinkelendring}}{\text{pr tidsenhet}}$

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad ; \quad [\omega] = s^{-1}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta r = \Delta s = r \Delta \varphi \quad \Rightarrow \quad v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \Delta \varphi}{\Delta t} = r \omega$$

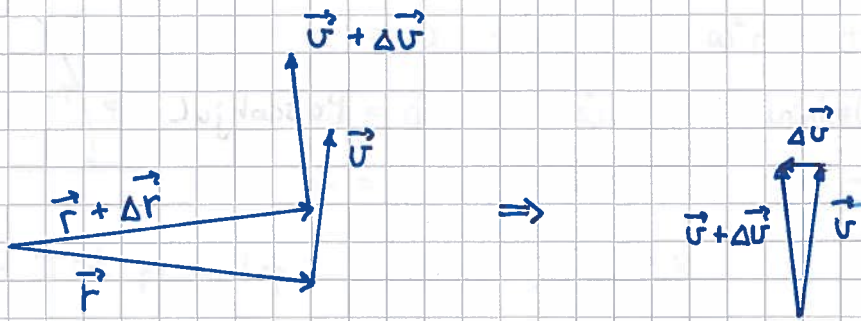
Retning: $\vec{v} \parallel \Delta \vec{r}$, $\Delta \vec{r} \perp \vec{r} \Rightarrow \boxed{\vec{v} \perp \vec{r}}$

(5)

Akselerasjon ved sirkelbevegelse:

Antar først uniform sirkelbevegelse, dvs konstant ω .

Ser at $\Delta \vec{v}$, og dermed \vec{a} , har retning inn mot sentrum:



Vi regner ut \vec{v} og \vec{a} fra $\vec{r}(t) = \hat{x} r \cos \omega t + \hat{y} r \sin \omega t$
(der vi valgte $\varphi(0) = 0$, dvs $\varphi(t) = \omega t$):

$$\vec{v}(t) = -\hat{x} \omega r \sin \omega t + \hat{y} \omega r \cos \omega t$$

$$\vec{a}(t) = -\hat{x} \omega^2 r \cos \omega t - \hat{y} \omega^2 r \sin \omega t = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

som er sentripetal akselerasjonen

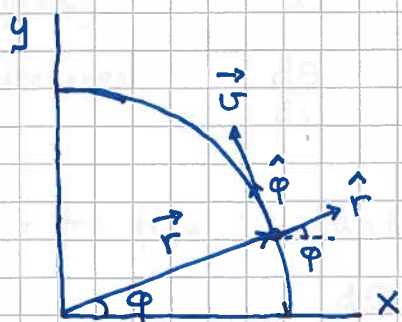
$$\vec{a}_{\perp} = -\omega^2 \vec{r}$$

Hvis også ω , og dermed $v = |\vec{v}|$, endrer seg, har vi i tillegg baneakselerasjon

$$a_{\parallel} = \dot{v} = r \dot{\omega}$$

Sirkelbevegelse, oppsummert:

⑥



$$\vec{r} = \hat{x} r \cos \varphi + \hat{y} r \sin \varphi = r \hat{r}$$

$$\vec{v} = -\hat{x} r \dot{\varphi} \sin \varphi + \hat{y} r \dot{\varphi} \cos \varphi = v \hat{\varphi}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{\perp} + \vec{a}_{\parallel} = -\omega^2 r \hat{r} + r \dot{\omega} \hat{\varphi}$$

$$\omega = \dot{\varphi}, \quad \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = \text{vinkelakselerasjon}; \quad [\alpha] = \text{s}^{-2}$$

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi; \quad \hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$$

Periode = Tid pr omløp: T ; $[T] = \text{s}$

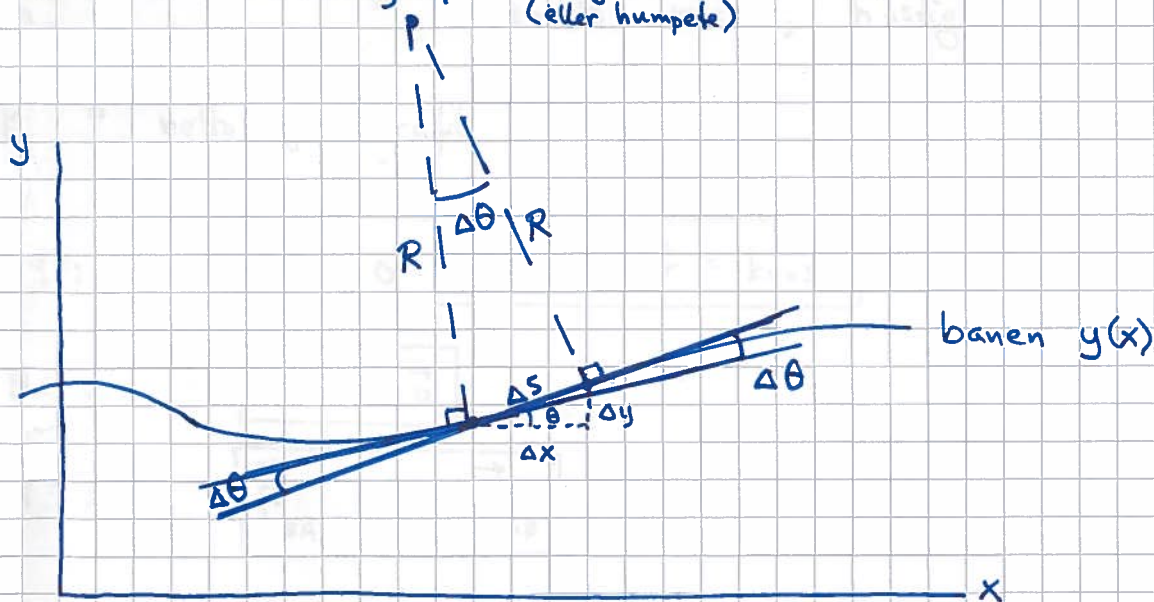
Frekvens = Antall omløp pr tidsenhet: f ; $[f] = \text{Hz} = \text{s}^{-1}$

$$\Rightarrow v = 2\pi r / T, \quad T = 2\pi r / v = 2\pi / \omega, \quad f = 1/T = \omega / 2\pi$$

$$a_{\perp} = \omega^2 r = v^2 / r$$

Krumlinjet bevegelse

(Lab; Bilkjøring på svingete vei osv.)
(eller humpeke)



$$a_{\perp} = v^2 / R, \text{ men hva er } R \text{ nå?}$$

R = radius i "tenkt" sirkel som best tangerer banen $y(x)$;
den såkalte krumningsradien

Anta liten Δs og $\Delta \theta$, slik at $\Delta s \rightarrow ds$ og $\Delta \theta \rightarrow d\theta$

Fra vinkeldef: $ds = R d\theta \Rightarrow R = ds/d\theta$

Pythagoras: $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \Rightarrow ds = dx \cdot \sqrt{1 + (dy/dx)^2}$

Kjernerregel: $\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d\theta}{dx} / \sqrt{1 + (dy/dx)^2}$

Ser fra figur: $\tan \theta = dy/dx \Rightarrow \theta = \arctan(dy/dx)$

$\Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{1 + (dy/dx)^2} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y/dx^2}{1 + (dy/dx)^2}$

Dermed:

$R = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$ (der R velges positiv)

Newtons lover [YF 4, 5 ; LL 2, 3]

m, \vec{v}, \vec{a} = legemets masse, hastighet, akselerasjon

\vec{F} = netto ytre kraft på legemet

N1: $\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \text{konst.}$

N2: $\vec{F} = m\vec{a}$

N3: $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

Dvs: Krefter er vekselvirkning mellom legemer.
Hvis A virker på B med kraft \vec{F}_{AB} ,
virker B på A med kraft $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

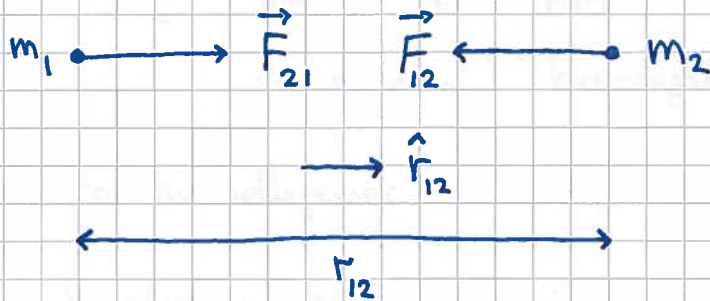
$[F] = \text{kg m} / \text{s}^2 = \text{N}$ (newton)

Fundamentale krefter i naturen [YF 5.5 ; LL 2.1]

8

- Gravitasjon. Svak tiltrekning mellom masser.

Newtons gravitasjonslov :

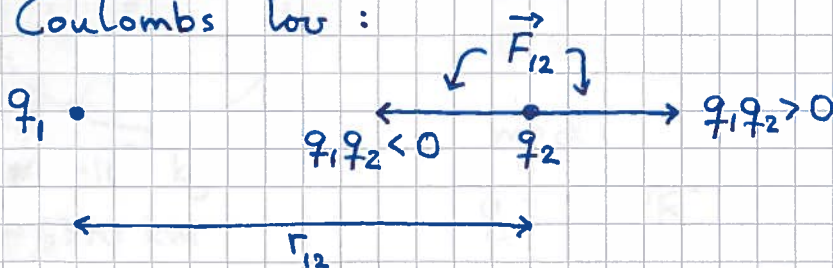


$$\vec{F}_{21} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Gravitasjonskonstanten : $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

- Elektromagnetisk v.v. Tiltrekning/frastøtning mellom ladninger.

Coulombs lov :



$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} ; [q] = C = \text{A} \cdot \text{s} \text{ (coulomb)}$$

Vakuumpemittiviteten : $\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} ; \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$

- Kjernekrefter, svake og sterke. Svært kort rekkevidde.
Relevant for hhv radioaktivitet og stabilitet av atomkjerner.

"Hverdagen" styres av coulombkrefter (F_E) og gravitasjon (F_G). ⑨

Elektron: $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, $q = -e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C

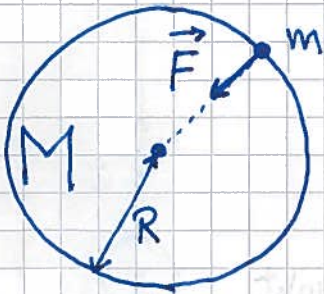
Proton: $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg, $q = e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C

$\Rightarrow F_E \gg F_G$ mellom elementarpartikler, atomer, molekyler, og mellom "hverdagslige" legemer

Mellom to himmellegemer: $F_G \gg F_E$

- Mellom hverdagslig legeme og jorda: $F_G \gg F_E$

Tyngde [YF 4.4 ; LL 2.5]



$M \approx 6 \cdot 10^{24}$ kg

$R \approx 6370$ km

Tyngden på m = gravitasjonskraften på m fra M (jorda):

$$F = G \frac{mM}{R^2} = mg$$

med

$$g = GM/R^2 \approx 9.81 \text{ m/s}^2 = \text{tyngdens akselerasjon (når } m \text{ er nær jordas overflate)}$$

Fritt fall (jf skrått kast):

Hvis tyngden er eneste kraft på m :

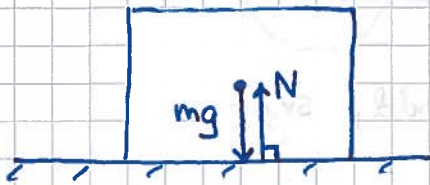
$$mg \stackrel{N2}{=} ma \Rightarrow \underline{a = g}$$

Kontaktkrefter

[YF 4.1 ; LL 3]

(10)

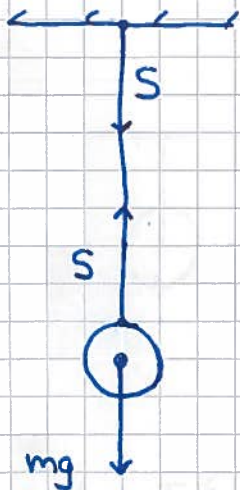
Normalkraft: N = netto frastøtende coulombkraft mellom to legemer i kontakt, vinkelrett på kontaktflaten



Hvis klossen ligger i ro:

$$N = mg \quad (\text{pga } N1)$$

Snorkraft: S = netto tiltrekkende coulombkraft mellom snora og legemet som henger i snora

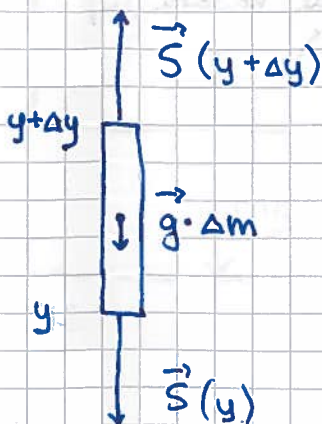


Hvis kula henger i ro:

$$S = mg \quad (\text{pga } N1)$$

S virker oppover på kula og nedover på taket

Inni snora virker snordraget begge veier, på hver lille snorbit:



N2 for snorbitten:

$$\vec{S}(y) + \vec{S}(y + \Delta y) + \vec{g} \cdot \Delta m = \Delta m \cdot \vec{a}$$

Med (tilnærmet) masseløs snor er $\Delta m \approx 0$

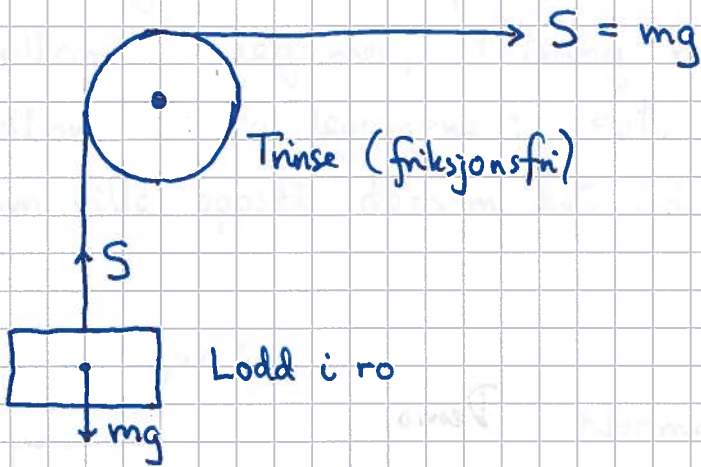
og $|\vec{S}(y)| \approx |\vec{S}(y + \Delta y)|$, dvs

S er konstant langs hele snora

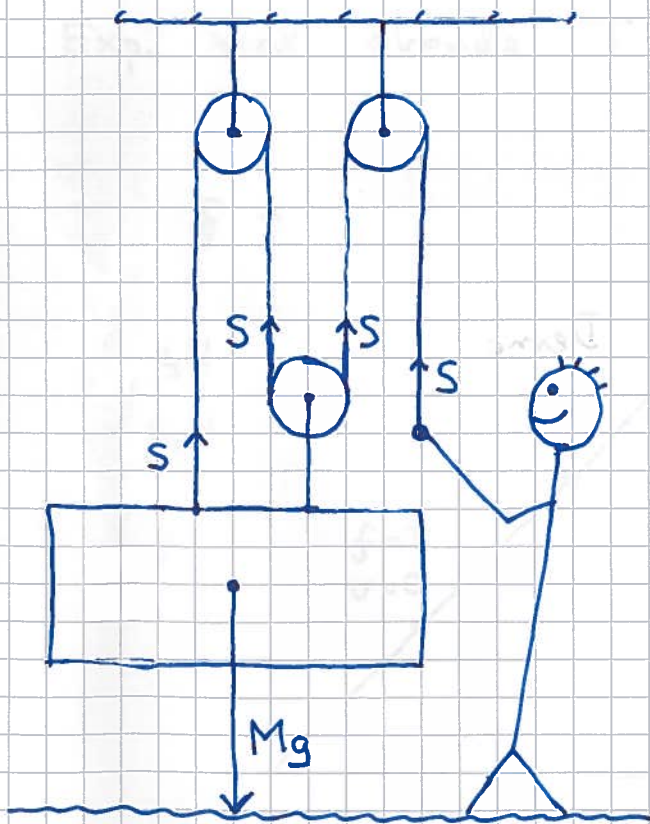
Trinser

endrer retningen på \vec{S} :

(11)



Talje gjør sterk :



N1 anvendt på kassa :

$$3S = Mg$$

$$\underline{S = \frac{1}{3} Mg}$$

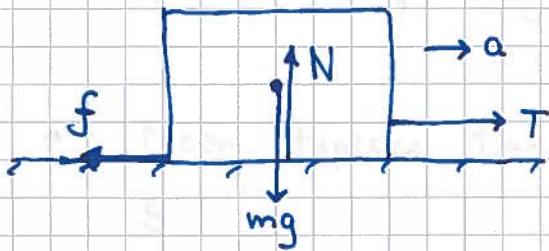
Friksjonskrefter

[YF 5.3 ; LL 3.1]

12

= den tangentielle komponenten av kontaktkraften mellom to legemer, retning mot den relative bevegelsen mellom de to legemene ; evt. mot relativ bevegelse som ville oppstå dersom det ikke var friksjon

Tørr friksjon:



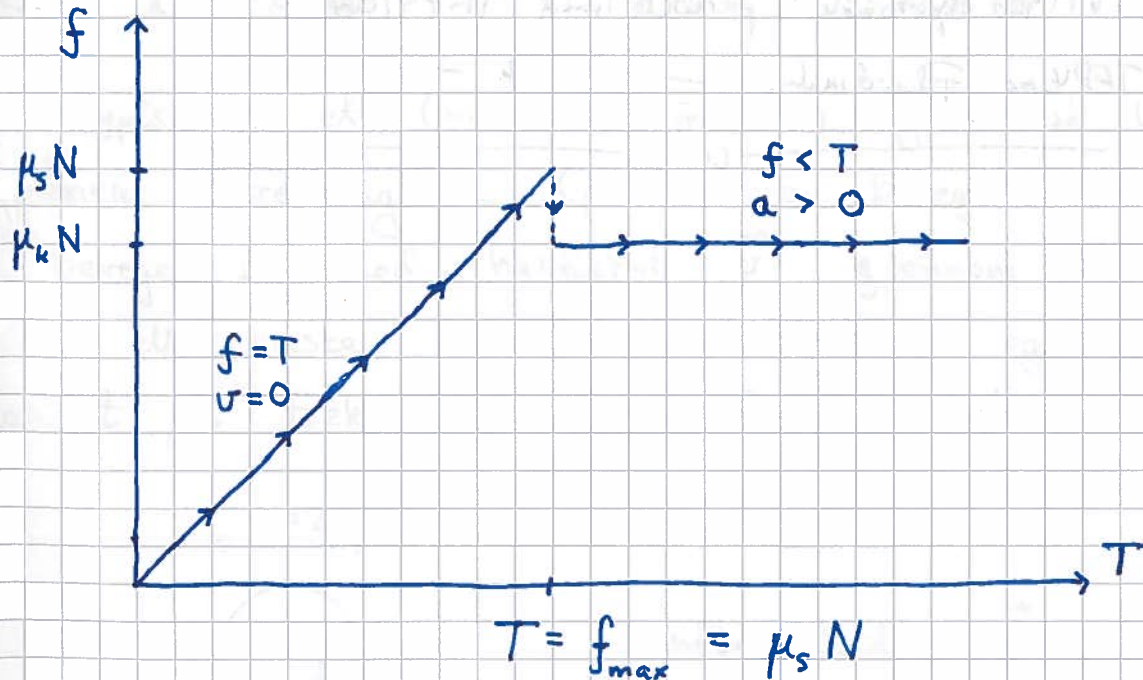
Normalkraft N ($= mg$ her)

Trekk-kraft T

Friksjonskraft f

$$N2 \text{ (horisontalt)} : T - f = ma$$

Exp. med økende T gir :



- Statisk friksjon :
 $v = 0, f = T, f_{max} = \mu_s N; \mu_s = \text{statisk friksjonskoeffisient}$
- Kinetisk friksjon :
 $v > 0, f = \mu_k N; \mu_k = \text{kinetisk friksjonskoeffisient}$
- $\mu_k \leq \mu_s$; ujevnheter i grenseflaten gir best grep
 når $v = 0$; flyter bedre oppå når $v > 0$
- Noen typiske tallverdier :
 Stål mot is $\mu_s \approx 0.03$
 Stål mot plast $\mu_s \approx 0.2$
 Våt svamp mot bordflate $\mu_s > 1$

Friksjon i fluider [YF 5.3 ; LL 8]

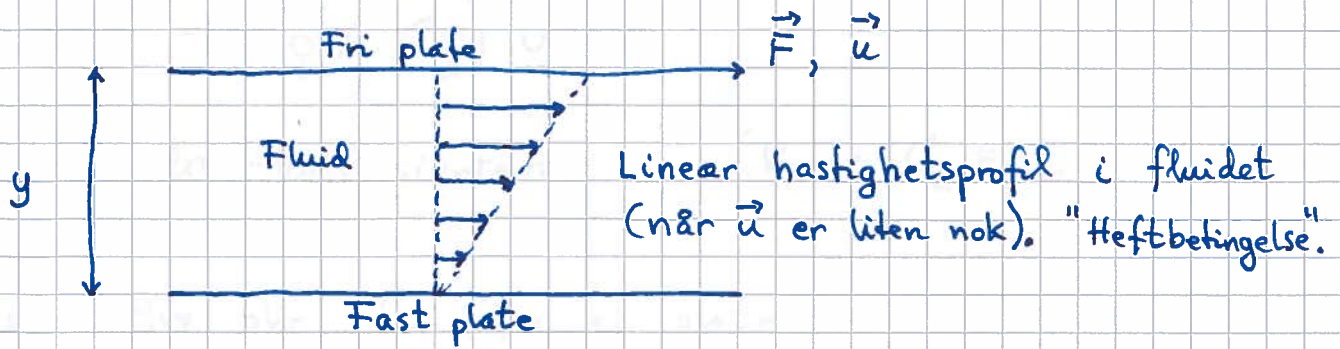
Vi ser typisk på et (mer eller mindre) symmetrisk legeme, med linear utstrekning L (på tvers av bevegelsesretningen), som beveger seg med hastighet \vec{v} gjennom et fluid (dvs gass eller væske) med massetetthet ρ og dynamisk viskositet μ . F.eks. en ball som faller i luft :



"Luftmotstand" : \vec{f}

~~area~~ $A = \pi r^2$

Definisjon og måling av μ :



Exp. gir påkrevd kraft F (for å holde konstant \vec{u}) som er prop. med platearealet A og hastigheten u , samt omvendt prop. med plateavstanden y :

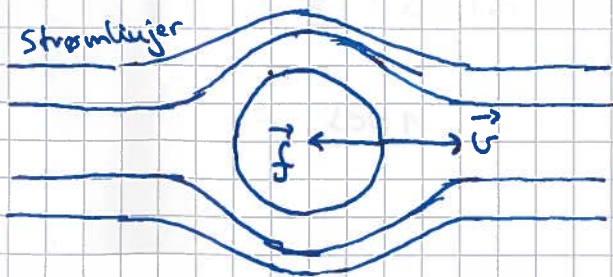
$$F = \mu \cdot \frac{A \cdot u}{y} ; \quad \mu = \text{fluidets dyn. viskositet} ; \quad [\mu] = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$$

Eks ($^{\circ}\text{C}/20^{\circ}\text{C}$):

Luft: $\mu \approx 2 \cdot 10^{-5}$ Vann: 10^{-3} Glyserol: 1 Sirup: 10^2



Laminær (pen, lagdelt) strømning når v er liten nok:



$$\vec{f} = -k \vec{u}$$

Kule med radius r : $k = 6\pi \mu r$ (Stokes' lov)

Turbulent strømming (uordnet) når v er "stor."

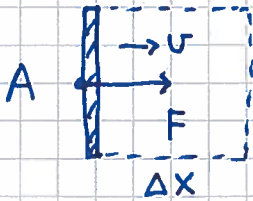
(15)

$$\vec{f} = -\left(\frac{1}{2} \rho A C_d\right) v^2 \hat{v}$$

$$C_d = \text{drag-koeffisienten} \quad (\text{Kule: } C_d \approx 0.5)$$

Eks: Hva blir C_d for ei plate?

Løsn:



Luftmasse foran plate: $\Delta m = \rho \Delta V = \rho A \Delta x$

Må dytte med kraft F på plate for å holde konstant fart v , for massen Δm

endrer sin fart fra null til v i løpet av tid $\Delta t = \Delta x / v$

$$\Rightarrow F = \frac{\Delta m \cdot v}{\Delta t} = \frac{\rho A \Delta x v}{\Delta t} = \rho A v^2 \Rightarrow \underline{C_d = 2}$$

Eks: Hva er luftmotstanden for bilen Revolve når $v = 60 \text{ km/h}$?

Oppgitt: $A \approx 1.1 \text{ m}^2$, $C_d \approx 1.35$

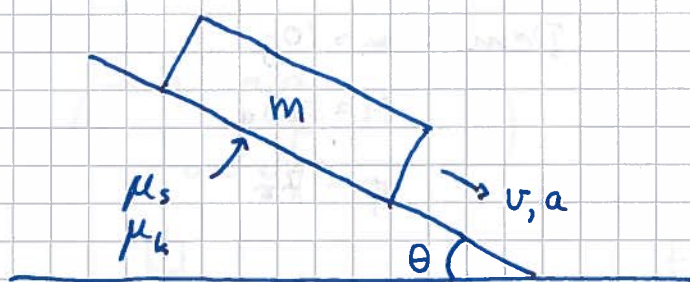
$$\text{Løsn: } f = \frac{1}{2} \rho A C_d v^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1.2 \cdot 1.1 \cdot 1.35 \cdot \left(\frac{60}{3.6}\right)^2 \text{ N}$$

$$\approx \underline{250 \text{ N}}$$

Eks: Kloss på skrån

16



Problemløsningsstrategi: [YF 5 ; LL 3]

- Finner alle ytre krefter på klossen og tegner "fritt-legeme-diagram":



- Velger koordinatsystem og dekomponerer:



$$N = N_{\perp} ; N_{\parallel} = 0 , f = f_{\parallel} ; f_{\perp} = 0$$
$$G_{\perp} = mg \cos \theta ; G_{\parallel} = mg \sin \theta$$

- Bruker N1 ($\sum \vec{F}_i = 0$) eller N2 ($\vec{a} = \sum \vec{F}_i / m$):

$$N1, \perp : N = mg \cos \theta$$

$$N2, \parallel : mg \sin \theta - f = ma$$

$$\text{Hvis kloss i ro: } v=0, a=0 \Rightarrow f = mg \sin \theta$$

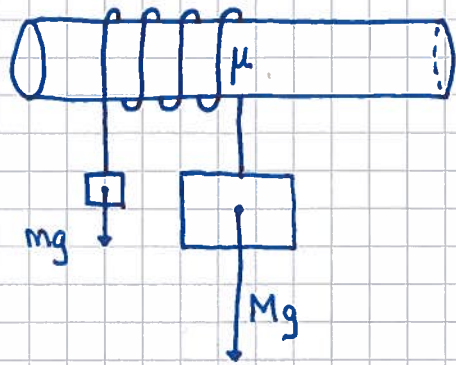
$$f \leq \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta \Rightarrow \tan \theta_{\max} = \mu_s$$

$$\text{Hvis klossen glir: } f = \mu_k N = \mu_k mg \cos \theta$$

$$a = g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$$

Eks : Snorfriksjon

[A.Wahl, "Med livet som innsats", youtube/nrk] (17)



μ = statisk friksjonskoeff.
mellom snor og rør

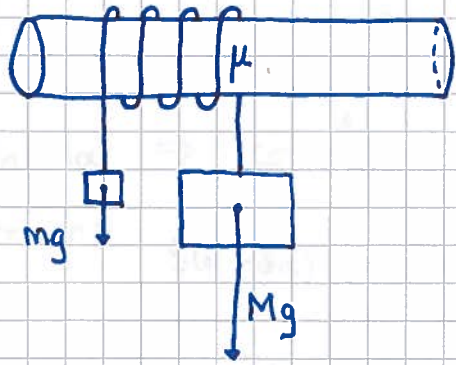
Finn minste m som holder
 M oppe når kontaktvinkelen
mellom snor og rør er φ .
(I figuren er $\varphi = 7\pi$)

Løsn:

Bruker $N1$ på en liten snorbit på lifen vinkel $d\alpha$:

Eks : Snorfriksjon

[A.Wahl, "Med livet som innsats", youtube/nrk] (17)

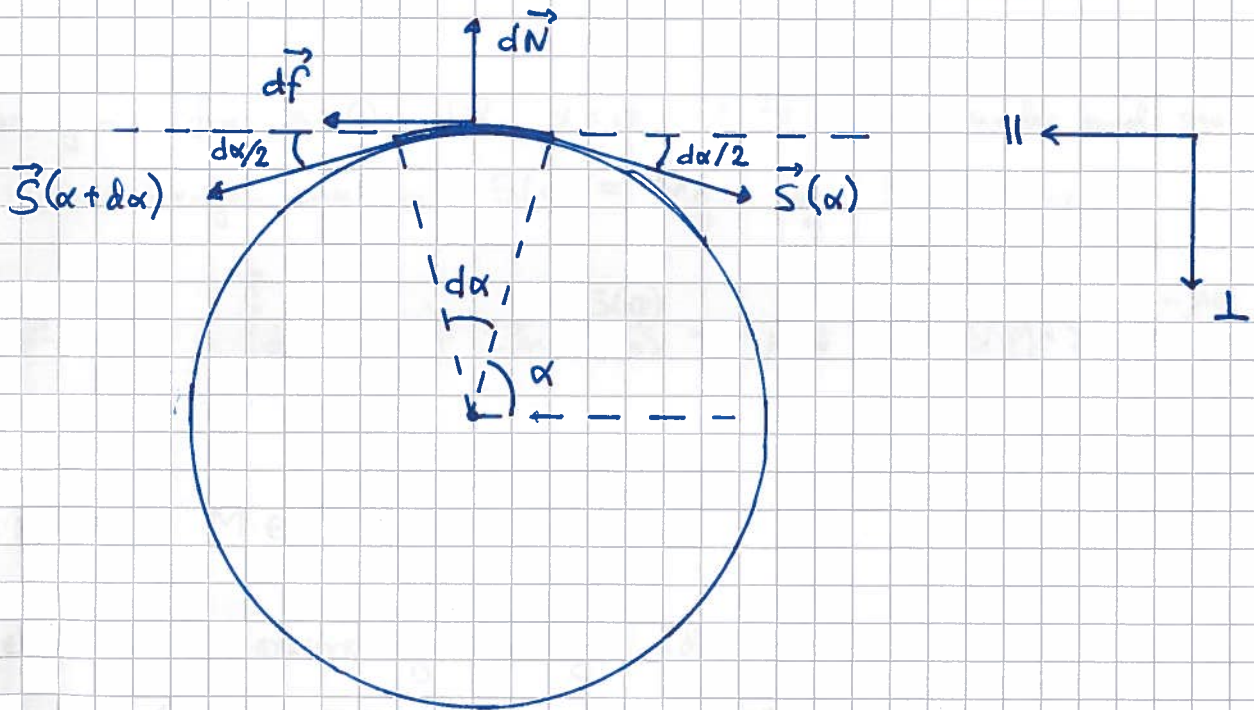


μ = statisk friksjonskoeff.
mellom snor og rør

Finn minste m som holder
 M oppe når kontaktvinkelen
mellom snor og rør er φ .
(I figuren er $\varphi = 7\pi$)

Løsn:

Bruker $N1$ på en liten snorbit på liten vinkel $d\alpha$:



$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{S}(\alpha+d\alpha) + \vec{S}(\alpha) + d\vec{N} + d\vec{f} = 0$$

der \vec{S} = snordraget fra resten av snora

$d\vec{N}$ = normalkraft fra røret

$d\vec{f}$ = friksjonskraft — " —

Minste påkrevde m når $d\vec{f} = d\vec{f}_{\max} = \mu d\vec{N}$

Dekomponerer:

$$\parallel : S(\alpha + d\alpha) \cdot \cos \frac{d\alpha}{2} - S(\alpha) \cdot \cos \frac{d\alpha}{2} + \mu dN = 0$$

$$\perp : S(\alpha + d\alpha) \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} + S(\alpha) \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} - dN = 0$$

$$\text{Liten } d\alpha \Rightarrow \cos \frac{d\alpha}{2} \approx 1, \quad \sin \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$$

$$\text{Videre er: } S(\alpha + d\alpha) - S(\alpha) = dS, \quad S(\alpha + d\alpha) + S(\alpha) = 2S$$

$$\Rightarrow dS = -\mu dN, \quad S d\alpha = dN$$

$$\Rightarrow dS = -\mu S d\alpha \Rightarrow dS/S = -\mu d\alpha$$

Dvs: Relativ reduksjon i snordraget, dS/S , er prop. med kontaktrinkelen $d\alpha$.

Integrasjon, fra $\alpha=0$ til $\alpha=\varphi$ ($= 7\pi$ $\approx 3\frac{1}{2}$ runder med snora)

gir sammenhengen mellom $S(0) = Mg$ og $S(\varphi) = mg$:

$$\int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = -\mu \int_0^{\varphi} d\alpha \Rightarrow \ln \frac{S(\varphi)}{S(0)} = -\mu\varphi \Rightarrow \underline{S(\varphi) = S(0) e^{-\mu\varphi}}$$

$$\text{Dvs: } m = M e^{-\mu\varphi}$$

I eksp. med plasttråd og snor og lødd er

$$\mu \approx 0.17, \quad \varphi = 7\pi \quad \text{og} \quad M = 500g$$

$$\Rightarrow m = 500g \cdot \exp(-0.17 \cdot 7\pi) \approx \underline{12g}$$

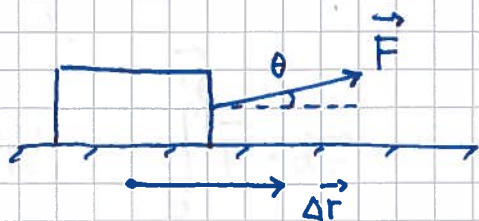
Omvendt: Påkrevd kraft for å heise M opp gitt ved

$$S(\varphi) = S(0) \cdot \exp(\mu\varphi)$$

$$\Rightarrow m = M e^{\mu\varphi} = 500g \cdot e^{0.17 \cdot 7\pi} \approx \underline{21kg}$$

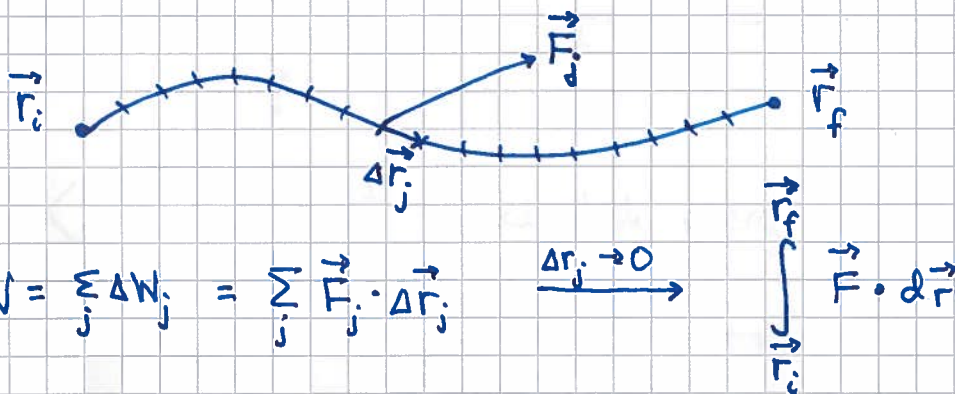
Arbeid og energi [YF 6,7; LL 4]

Arbeid [YF 6.1-6.3 ; LL 4.1]



Kraften \vec{F} utfører et arbeid på klossen, arbeid $\stackrel{\text{def}}{=} \text{kraft} \times \text{forflytning}$
 $\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta$
[W] = N·m = J (joule)

Generelt:



$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \quad \xrightarrow{\Delta r_j \rightarrow 0} \quad \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= totalt arb. utf. av \vec{F} ved forflytn. fra \vec{r}_i til \vec{r}_f

Effekt [YF 6.4 ; LL 4.1]

effekt $\stackrel{\text{def}}{=} \text{arbeid (evt. energi) pr tidsenhet}$

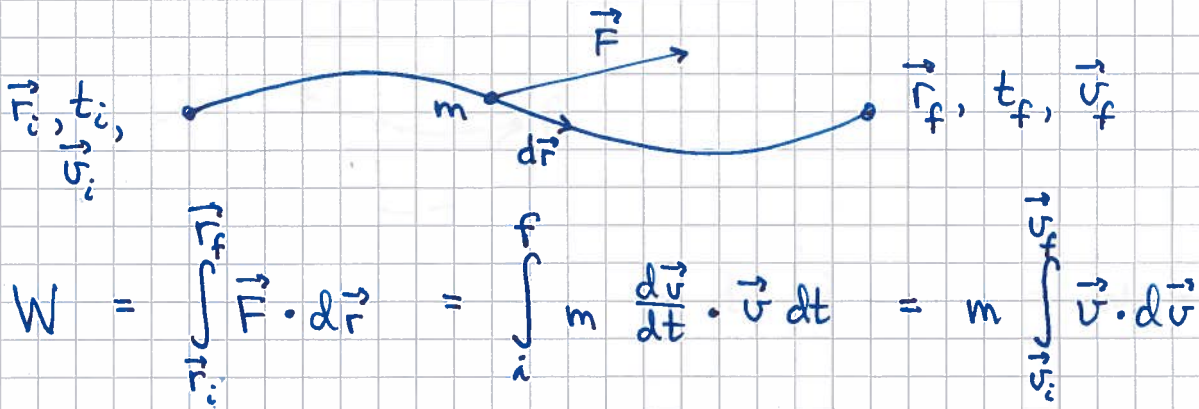
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$[P] = \text{J/s} = \text{W (watt)}$$

$$1 \text{ kWh} = 1000 \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 3600 \text{ s} = 3.6 \cdot 10^6 \text{ J} = 3.6 \text{ MJ}$$

Kinetisk energi [YF 6.2 ; LL 4.2]

(20)


$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{v} \cdot d\vec{v} + d\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(v^2)$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \int_{v_i^2}^{v_f^2} d(v^2) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2 = \text{kinetisk energi}$$

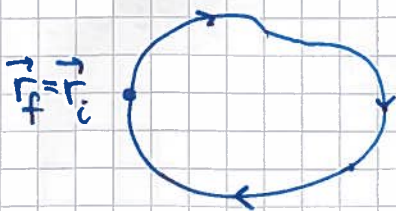
\Rightarrow

$$W = K_f - K_i = \Delta K$$

Dis: Arb. W utført på legemet tilsvører endringen i dets kin. energi, ΔK .

Konservativ kraft [YF 7.3 ; LL 4]

Anta en lukket kurve, dvs $\vec{r}_f = \vec{r}_i$:



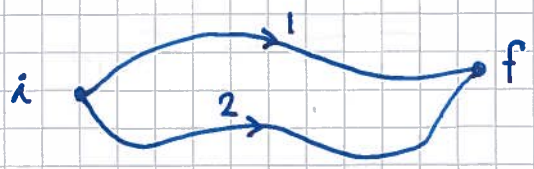
Hvis $K_f = K_i$, dvs $W = \Delta K = 0$,

dvs

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Da er \vec{F} en konservativ kraft.

Arbeidet W er uavhengig av veien for kons. kraft \vec{F} :



$$0 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_1 + \left\{ \int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_2 = W_1 - W_2$$

$$\Rightarrow \underline{W_1 = W_2}$$

Både tyngdekrefter og coulombkrefter er konservative.

Potensiell energi [YF 7.1-7.4 ; LL 4.3-4.4]

Definisjon: $U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ der \vec{F} er konservativ

$U(\vec{r})$ = pot. energi i pos. \vec{r} , med valget $U(\vec{r}_0) = 0$

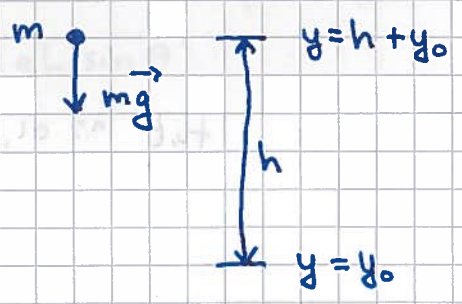
Dvs, kun forskjeller i U har fysisk betydning.

[Fra Matte 2:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \iff \nabla \times \vec{F} = 0$$

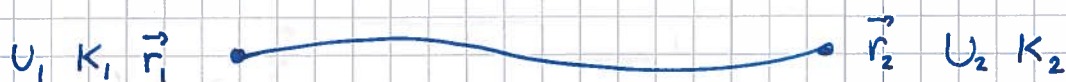
$$U = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \iff \vec{F} = -\nabla U]$$

I tyngdefeltet:



$$\Delta U = U(h+y_0) - U(y_0) = - \int_{y_0}^{y_0+h} mg \cdot (-dy) = \underline{mgh}$$

Bevarelse av mekanisk energi [YF 7.1-7.3; LL 4.5]



$$\Delta K = K_2 - K_1 = W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$U_2 - U_1 = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \left(- \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W$$

$$\Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

\Rightarrow Tot. mek. energi $E = K + U$ er bevart i et konservativt system

Eks: Rullende ring på skrånnet [Jf. Lab. Mer om rulling senere]

En ring som ruller uten å gli har translasjonsenergi $K_{\text{trans}} = \frac{1}{2}mv^2$ og rotasjonsenergi $K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}mv^2$. Hvorfor er rotasjonsfarten lik translasjonsfarten her? Fordi: En hel omdreining tar en tid T .

Da har hele ringen flyttet seg en lengde $2\pi R$ langs skrånnet.

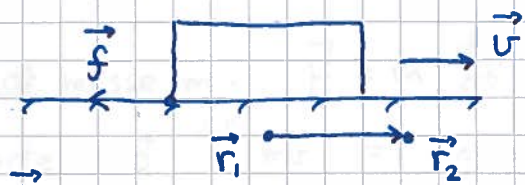
Samtidig har hele ringens masse rotert en lengde $2\pi R$ (= omkretsen).

Følgelig samme fart for translasjon av ringen som for rotasjon omkring sentrum! Dermed: $K = mv^2$. Hvis $K=0$ der

ringen starter, er $K = |\Delta U| = mgL \sin \theta$ når den har rullet lengden L nedover skrånnet, som har helningsvinkel θ .

Dermed: $v = \sqrt{gL \sin \theta}$

Friksjonsarbeid [YF 7.3 ; LL 4.5]



$$W_f = \int_{r_1}^{r_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \quad \text{fordi } \vec{f} \text{ alltid er rettet mot } d\vec{r}$$

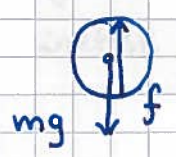
Mek. energi tapes ; omdannes til varme (og lyd etc)

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \Rightarrow \vec{f} \text{ er } \underline{\text{ikke}} \text{ konservativ}$$

[Senere: Ved "ren rulling" utfører den statiske friksjonskraften (ideelt sett) ikke arbeid. Da er mek. energi bevart !]

Eks: Terminalhastighet for bordtennisball, $m = 2.7 \text{ g}$, $r = 20 \text{ mm}$.

Løsn:

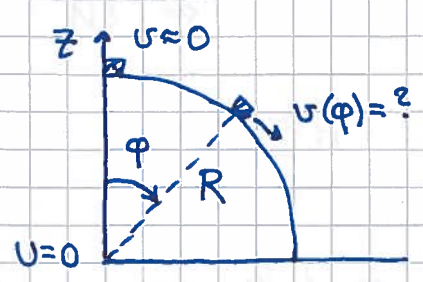


Når hastigheten blir stor nok, blir $f = mg$, og hastigheten endres ikke mer.

Med $f = \frac{1}{2} \rho A C_d \cdot v_t^2$, $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$, $A = \pi r^2$ og $C_d = 0.5$ fås

$$v_t = \left\{ \frac{2mg}{\rho A C_d} \right\}^{1/2} \approx \underline{\underline{8.4 \text{ m/s}}}$$

Eks: Friksjonsfritt kuppelformet tak



$$E = mgR$$

$$K(\varphi) + U(\varphi) = \frac{1}{2} m v(\varphi)^2 + mg z(\varphi) ; z(\varphi) = R \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v(\varphi)^2 + mgR \cos \varphi = mgR$$

$$\Rightarrow v(\varphi) = \sqrt{2gR(1 - \cos \varphi)}$$

[Mister kontakt med underlaget når $N \rightarrow 0$]

Impuls [YF 8 ; LL 5]

(= linear momentum = bevegelsesmengde)

N2 for gitt masse m : $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$

der vi innførte $\vec{p} \stackrel{\text{def}}{=} m\vec{v}$ = massens impuls ; enhet $[p] = \text{kg} \cdot \text{m/s}$

\Rightarrow Hvis $\sum \vec{F}_{\text{ytre}} = 0$, er systemets/legemets impuls bevart

Kollisjoner [YF 8.3, 8.4 ; LL 5.3]

Elastisk støt : Mek. energi er bevart ($\Delta K = 0$)

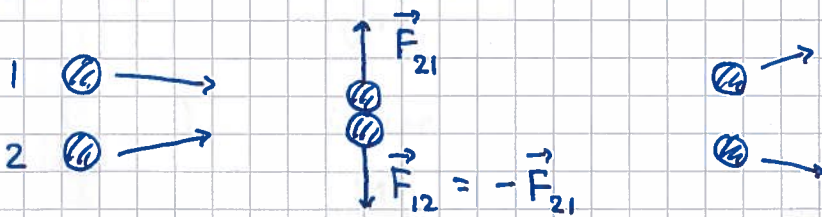
Uelastisk støt : Mek. energi tapes ($\Delta K < 0$)

Fullstendig uelastisk støt : Max energitap. Legemene henger sammen etter kollisjonen, med felles hastighet.

Kortvarige kollisjoner $\Rightarrow \Delta U \approx 0$ i kollisjonen

Tapt kinetisk energi \rightarrow Deformasjon, varme, lyd

Indre krefter endrer ikke systemets totale impuls.



N3 $\Rightarrow \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$

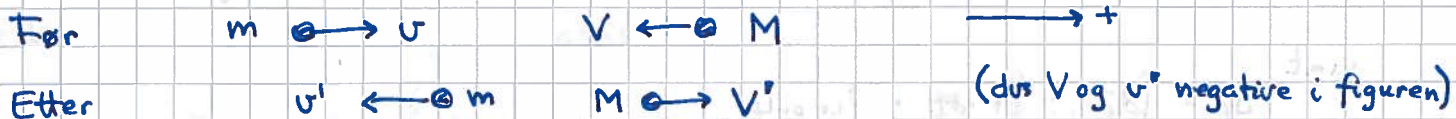
$\stackrel{N2}{\Rightarrow} \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} \{ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst.}$

Sentralt støt [YF 8.2-8.4 ; LL 5.3]

(25)

dvs: kollisjon i en dimensjon



Kortrøng kollisjon \Rightarrow kan se bort fra ytre krefter i løpet av kollisjonen

$$\Rightarrow \Delta p = 0$$

$$\Rightarrow m v + M V = m v' + M V'$$

(a) Fullstendig uelastisk: $v' = V' = \frac{m v + M V}{m + M}$

(b) Delvis uelastisk: 1 ligning, 2 ukjente \Rightarrow Trenger en opplysning til!

(c) Elastisk kollisjon: $\Delta K = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} m v'^2 + \frac{1}{2} M V'^2$

Ligningene fra $\Delta p = 0$ og $\Delta K = 0$, etter litt omskriving:

$$m(v - v') = M(V' - V) \quad (1)$$

$$m(v - v')(v + v') = M(V' - V)(V' + V) \quad (2)$$

(2) dividert med (1) gir:

$$v + v' = V' + V \quad (3)$$

(3) $\cdot M - (1)$ eliminerer V' og gir

$$v' = \frac{M}{m+M} \left\{ 2V + v \cdot \frac{m-M}{M} \right\}$$

Ombytte av små og store symboler må gi tilsvarende løsning for V' :

$$V' = \frac{m}{M+m} \left\{ 2v + V \cdot \frac{M-m}{m} \right\}$$

Eks 1: $m = M$. Ser da at $v^r = V$ og $V^r = v$.

(26)

Legemene bytter hastighet. Kjent fra: 

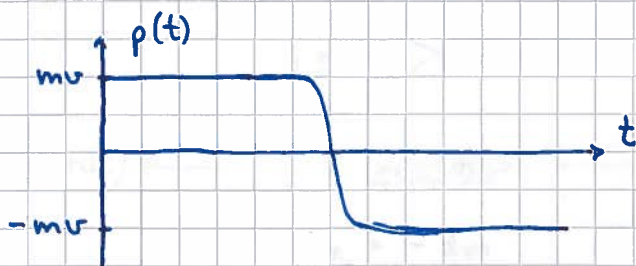
Eks 2: Ball mot vegg, elastisk støt

$m \rightarrow v \parallel V=0, M \rightarrow \infty$ $v^r \leftarrow m \parallel V^r=0$

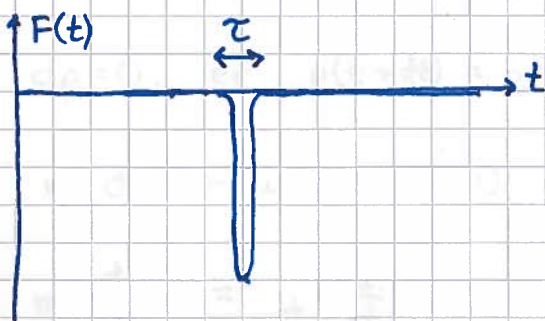
$$v^r = \frac{M}{m+M} \cdot \left\{ 0 + v \cdot \frac{m-M}{M} \right\} = \frac{M}{M} \cdot v \cdot \left(\frac{-M}{M} \right) = -v ; \text{ OK:}$$

$$K^r = \frac{1}{2} m v^r{}^2 = \frac{1}{2} m v^2 = K$$

$p^r = m v^r \neq p = m v$: Veggens får impuls $2mv$; $V^r=0$ men $M=\infty$
 $= -mv$ slik at $MV^r \neq 0$



$$\vec{F}(t) = d\vec{p}/dt \Rightarrow \Delta\vec{p} = \int d\vec{p} = \underbrace{\int \vec{F}(t) dt}_{\text{"kraftstøt" ; "impulse" (eng.)}}$$



Bordtennis : $\tau \sim 2 \text{ ms}$, $\Delta v \sim 50 \text{ m/s}$

$$\Rightarrow \langle a \rangle \sim \frac{50}{0.002} \text{ m/s}^2 = 25 \text{ km/s}^2 \gg g$$

\Rightarrow Kan trygt se bort fra tyngden mg
i selve kollisjonen!

Rakett

[YF 8.6 ; LL 5.4]

(27)



Målt i fast ref. system : v = rakettfarten, v_e = eksosfarten

Eksosfart relativt raketten : $u = v_e - v$; antas konstant ($u < 0$)

Bensinforbruk pr tidsenhet : $dm/dt < 0$

Anta først at $F_{ytre} = 0$. ~~N2~~ gir da $dp/dt = 0$

Vi finner rakettenes fartsøkning mellom t og $t+dt$:

$$m(t) \longrightarrow v(t) \quad p(t) = m(t)v(t)$$

$$v_e(t+dt) \longleftarrow \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \boxed{m(t+dt)} \\ \longrightarrow v(t+dt) \end{array}$$

$\uparrow dm_e = -dm$

$$\begin{aligned} p(t+dt) &= m(t+dt)v(t+dt) + dm_e v_e(t+dt) \\ &= \{m(t) + dm\} \{v(t) + dv\} - dm \{u + v(t) + dv\} \\ &= m(t)v(t) + m dv - u dm \end{aligned}$$

Siden $dp=0$, er $p(t+dt) = p(t) = m(t)v(t)$, slik at

$$m dv - u dm = 0$$

ders

$$m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt}$$

ders

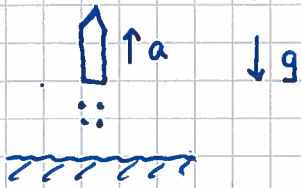
$$m a = F_{skjv}$$

med skjvraft (rekyl) $F_{skjv} = u \dot{m} > 0$

(fordi $u < 0$ og $\dot{m} < 0$)

Etter oppskyting er raketten en stund i tyngdefeltet

$\Rightarrow F_{\text{ytte}} = -mg$ kommer i tillegg



$$\Rightarrow ma = u\dot{m} - mg$$

Total kraft på raketten: $F = u\dot{m} - mg$

Må selvsagt ha $F > 0$, dvs $u\dot{m} > mg$, for å ta av.

Øving:

$$-mg + u \frac{dm}{dt} = m \frac{dv}{dt} \quad / \cdot (dt/m)$$

$$\Rightarrow -g dt + u \frac{dm}{m} = dv$$

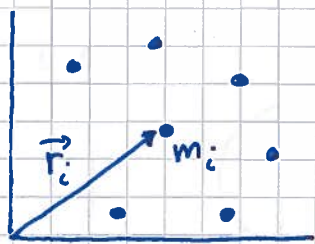
som kan integreres.

Neste: Partikkelsystem. Stive legemer. Rotasjonsdynamikk.

Massesenter

[YF 8.5 og oppg 8.115, 8.116 ; LL 5.6, 5.8, 6.1]

(29)



Massesenter (CM) for N punktmasser

m_1, m_2, \dots, m_N i pos $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$M = \sum_i m_i = \text{systemets totale masse}$$

Med kontinuerlig massefordeling :

$m_i \rightarrow dm$ (masselement) og $\sum_i \rightarrow \int$

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm \quad ; \quad M = \int dm$$

$$3D: dm = \rho dV \quad 2D: dm = \sigma dA \quad 1D: dm = \lambda dl$$

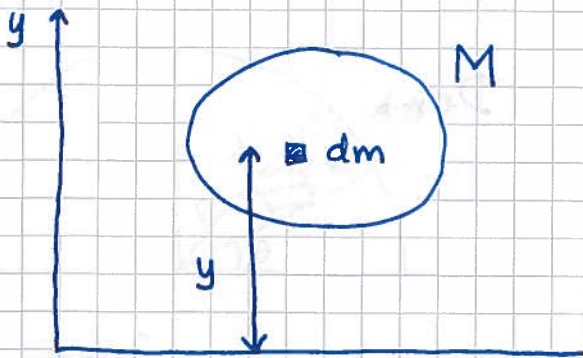
ρ, σ, λ = masse pr hhv volum-, flate-, lengdeenhet

dV, dA, dl = hhv volum-, flate-, lengdeelement

Med uniform massefordeling : $\frac{dm}{M} = \frac{dV}{V}$ osv

Potensiell energi i tyngdefeltet

(30)



Velger $U(0) = 0$

$$U = \int dU = \int g \cdot y \cdot dm$$

Med mindre $y_{\max} - y_{\min} \approx$ jordradien, er $g = \text{konstant}$ for hele systemet.

$$U = g \int y dm = \underline{g \cdot M \cdot Y_{CM}}$$

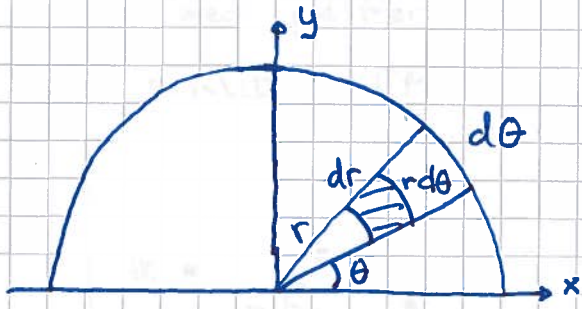
Dvs: Total pot. energi U blir som om hele massen M var samlet i høyden Y_{CM} , f.eks. i massesenteret \vec{R}_{CM}

Tyngdepunktet: Der legemet vil balansere (uten å rotere).

Her er tyngdepunktet samme sted som massesenteret.

Eks 1: \vec{R}_{cm} for halv tynn skive, radius R

(31)



$X_{cm} = 0$ pga symmetri

$$Y_{cm} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{A} \int y dA$$

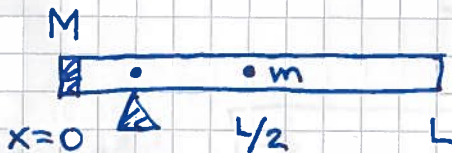
(siden $\frac{dm}{M} = \frac{dA}{A}$)

$$A = \frac{1}{2} \pi R^2, \quad dA = dr \cdot r d\theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y_{cm} &= \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi r \sin \theta \, dr \, r d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\ &= \frac{2}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{3} R^3 \cdot \int_0^\pi (-\cos \theta) = \frac{4R}{3\pi} \approx \underline{0.42R} \end{aligned}$$

[Halvsirkelformet stang: $Y_{cm} = \frac{2R}{\pi}$; Kompakt halvkule: $Y_{cm} = \frac{3R}{8}$]

Eks 2: Rør med lod i enden



$$m = 165g \quad M = 305g$$

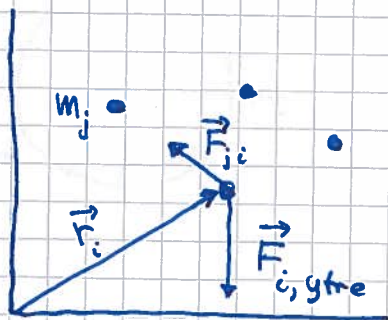
$$X_{cm} = \frac{1}{m+M} \left\{ M \cdot 0 + \underbrace{\int_0^L x \cdot \frac{m dx}{L}}_{= mL/2} \right\} = \frac{mL}{2(m+M)} = \underline{0.18L}$$

Massesenterets bevegelse

[YF 8.5 ; LL 5.8]

(32)

Forsøk med plaststrør tyder på at CM bærer seg som om hele massen var samlet i CM. Bevis:



N2 for m_i :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\vec{F}_{i,ytre}}_{\text{Total ytre kraft p\aa } m_i} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{\text{Total indre kraft paa } m_i}$$

Legger sammen N2 for alle i :

$$\text{V.S.: } \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \sum_i m_i \vec{r}_i \right\} = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ M \vec{R}_{CM} \right\} = M \ddot{\vec{R}}_{CM}$$

$$\text{H.S.: } \sum_i \vec{F}_{i,ytre} = \vec{F}_{ytre} = \text{netto ytre kraft paa hele systemet}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}_{=0 \text{ (N3)}} + \dots + \underbrace{\vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N}}_{=0} = 0$$

Dermed:

$$\boxed{\vec{F}_{ytre} = M \ddot{\vec{R}}_{CM}}$$

Massesenterets (Tyngdepunktets) bevegelse blir som om hele M var samlet i \vec{R}_{CM} og ble utsatt for netto ytre kraft \vec{F}_{ytre}

I tillegg til dette kommer:

For stive legemer: Rotasjon om CM

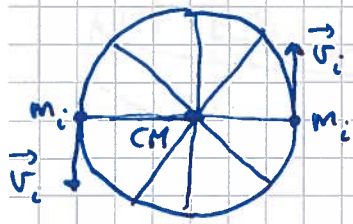
For ikke helt stive legemer: Vibrasjon

Rotasjon

[YF 9,10 ; LL 6 (5)]

(33)

Ren rotasjon (f. eks. om CM)

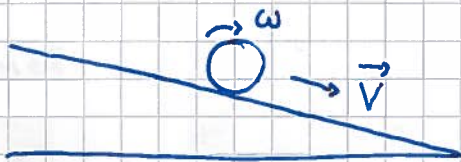


$$K_{\text{trans}} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{\text{CM}}^2 = 0 ; \quad \vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0$$

$$K_{\text{rot}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \neq 0$$

$$\vec{L} \neq 0 \quad (\text{Hjulets dreieimpuls})$$

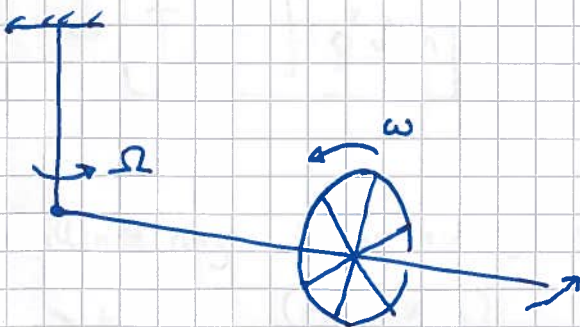
Rulling = Translasjon av CM + Rotasjon om CM



Krefter \parallel skr pnet gir $\dot{v} > 0$

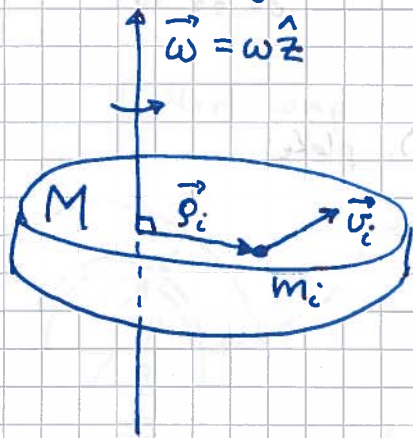
Dreiemoment mhp CM gir $\dot{\omega} > 0$

Komplisert dynamikk



Presesjon. Gyroskop

Rotasjonsenergi og treghetsmoment [YF 9.4; LL 6.4, 6.3] (34)



$\vec{\omega} \parallel$ rotasjonsaksen

$\vec{\rho}_i = \rho_i \hat{\rho}$; $\rho_i =$ avstand fra rot.aksen til m_i

$\vec{v}_i = v_i \hat{\phi}$; $v_i =$ hastigheten til m_i

Fra før : $v_i = \rho_i \omega$

Fra figur : $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$

(Høyrehåndregel!)

Braker her sylinderkoordinater : ρ, ϕ, z (dvs: polarkoord. + z)

Dermed:

$$K = K_{\text{rot}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} I \omega^2}}$$

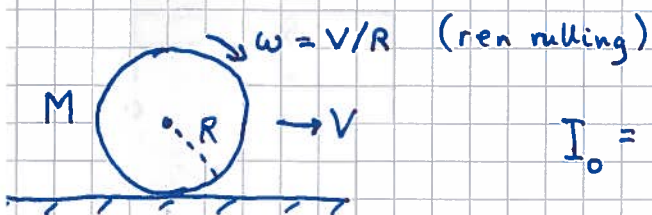
Her er

$I \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i \rho_i^2 =$ legemets treghetsmoment mhp den aktuelle (valgte) aksen

Hvis vi har kontinuerlig massefordeling: $m_i \rightarrow dm$ og $\sum_i \rightarrow \int$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int \rho^2 dm} \quad \rho = \text{avstand fra aksen til } dm$$

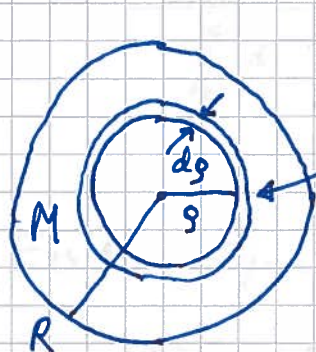
Eks: Rullende ring (eller hul sylinder)



$$I_0 = \int \rho^2 dm = R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$$

$$\Rightarrow K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} MR^2 \cdot \frac{V^2}{R^2} = \underline{\underline{MV^2}}$$

Skive (eller kompakt sylinder)



$$dI_0 = g^2 dm = g^2 M \frac{dA}{A}$$

$$= g^2 M \cdot \frac{2\pi g dg}{\pi R^2} = \frac{2M}{R^2} \cdot g^3 dg$$

$$\Rightarrow I_0 = \int dI_0 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R g^3 dg = \frac{2M}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2} MR^2}}$$

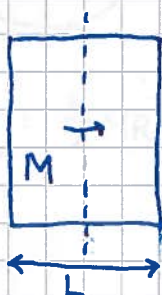
Tynn stang, akse \perp stanga, gjennom CM



$g = x, dm = M \cdot dx / L$

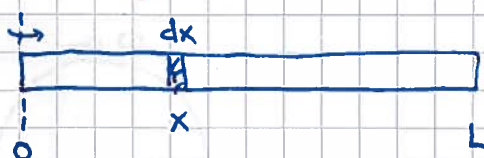
$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot M \cdot dx / L = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{3} x^3 = \frac{M}{L} \cdot \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{24} \right) L^3 = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}}$$

Tilsvarende for tynn plate (f.eks ei dør):



$I_0 = \frac{1}{12} ML^2$

Tynn stang, akse ved stangens ende:



$$I = \int_0^L x^2 M dx / L = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}$$



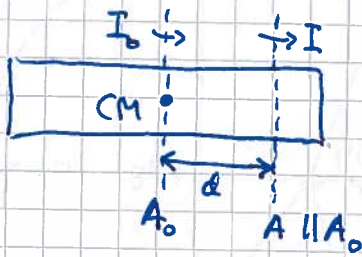
Dør: $I = \frac{1}{3} ML^2$

Kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$

Kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

Steiners sats

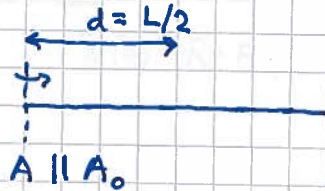
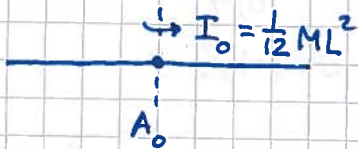
[YF 9.5 ; LL 6.3]



$$I = I_0 + Md^2$$

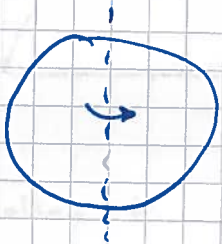
(Se notat for bevis)

Eks 1: Tynn stang

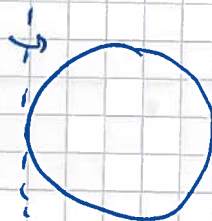


$$\begin{aligned} I &= I_0 + M \cdot (L/2)^2 = \\ &= \frac{1}{12} ML^2 + \frac{1}{4} ML^2 = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}} \\ &\text{(som s 35!)} \end{aligned}$$

Eks 2: Kuleskall



$$I_0 = \frac{2}{3} MR^2$$

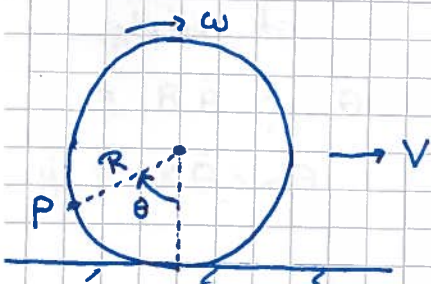


$$d = R$$

$$\underline{\underline{I = \frac{5}{3} MR^2}}$$

Ren rulling

[YF 10.3; LL 6.7]



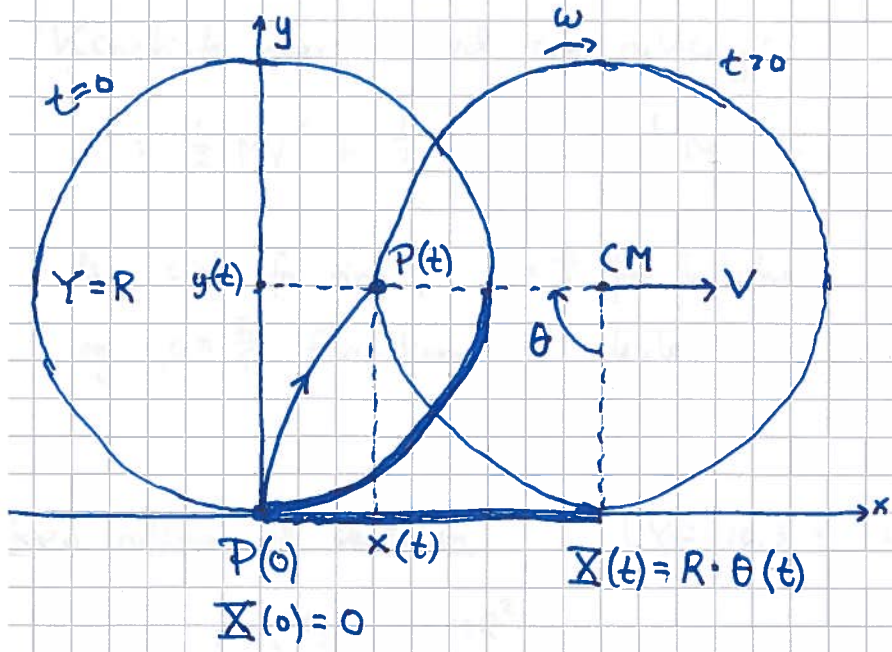
Vi skal vise at $V = \omega R$

ved ren rulling,

samt bestemme hastigheden og

banen til et punkt P

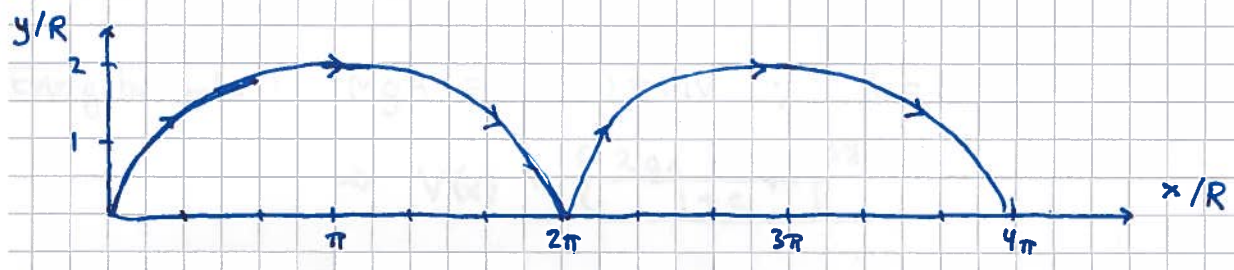
på periferien.



Punkt på periferien, P:
 $x(t), y(t)$ (posisjon)
 $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$ (hastighet)

I figuren er $\theta = \pi/2$. Da har CM flyttet seg $1/4$ av omkretsen langs x-aksen, dvs $X = R \cdot \pi/2$.

Fra figur: $x = X - R \sin \theta = R\theta - R \sin \theta$
 $y = Y - R \cos \theta = R - R \cos \theta$ } Dvs, banen til P er en sykloide



Beregelsen til CM:

$$\vec{R}_{CM} = X \hat{x} + Y \hat{y} = R\theta \hat{x} + R \hat{y}$$

$$\vec{V} = R\dot{\theta} \hat{x} = R\omega \hat{x}$$

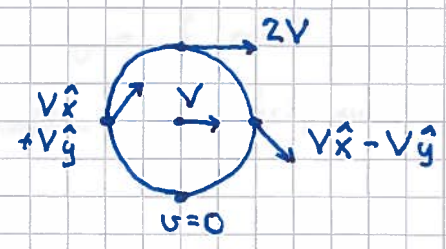
$$\vec{A} = R\ddot{\theta} \hat{x} = R\dot{\omega} \hat{x} = R\alpha \hat{x}$$

Dvs, ulløsbetingelsene er: $V = R\omega, A = R\alpha$

Hastigheten til P:

$$\dot{x} = R\dot{\theta} - R\dot{\theta} \cos \theta = V(1 - \cos \theta)$$

$$\dot{y} = R\dot{\theta} \sin \theta = V \sin \theta$$



Ser at $v=0$ når $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$, dvs når P har kontakt med underlaget. Dermed er $P_f = dW_f/dt = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$, dvs taper ikke mekanisk energi ved ren rulling. (Ideelt sett...!)

Kinetiske energi ved ren rulling:

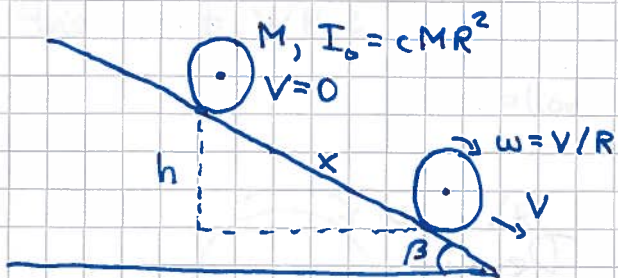
(38)

$$K = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} \cdot cMR^2 \cdot \frac{V^2}{R^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} (1+c) MV^2}}$$

der $c=1$ for ring, $c=\frac{2}{3}$ for kuleskall, $c=\frac{1}{2}$ for kompakt skive, og $c=\frac{2}{5}$ for kompakt kule.

Ren rulling på skrånplan

[YF 10.3 ; LL 6.8]



Finne V , \dot{V} , friksjonskraft f , og minste μ_s (ert største β) som gir ren rulling.

Energibevarelse: $Mgh = (1+c) \frac{1}{2} MV^2$; $h = x \sin \beta$

$$\Rightarrow \underline{\underline{V(x) = \left\{ \frac{2gx \sin \beta}{1+c} \right\}^{1/2}}}$$

$\Rightarrow V(\text{kule}) > V(\text{skive}) > V(\text{kuleskall}) > V(\text{hul sylinder})$ som observert

Akselerasjon:

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=V} = \left\{ \frac{2g \sin \beta}{1+c} \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} \cdot V = \underline{\underline{\frac{g \sin \beta}{1+c}}}$$

Uten friksjon: $F_{||} = Mg \sin \beta \Rightarrow \dot{V} = g \sin \beta$

Med friksjon er $\dot{V} < g \sin \beta \Rightarrow$ Må være friksjon \vec{f} med retning oppover langs skrånplanet

N2 || : $Mg \sin \beta - f = M\dot{V}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f = \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta}}$$

Ren rulling bare hvis $f \leq f_{\max} = \mu_s N = \mu_s Mg \cos \beta$

(39)

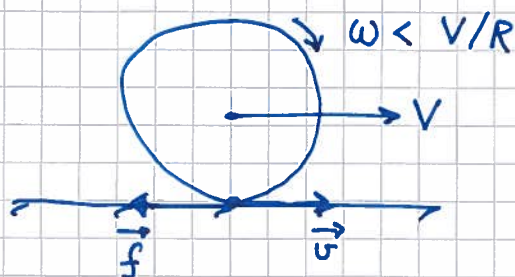
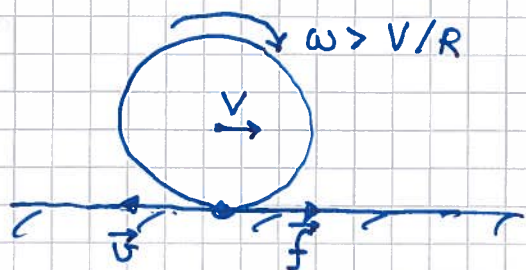
$$\Rightarrow \text{Må ha } \mu_s \geq \frac{c}{1+c} \tan \beta, \text{ ders } \beta \leq \arctan \left\{ \mu_s \frac{1+c}{c} \right\}$$

Eks: Støkkule på plastunderlag. $\mu_s \approx 0.2$, $c = 2/5$

$$\Rightarrow \beta \leq \arctan \left\{ 0.2 \cdot \frac{7/5}{2/5} \right\} = \arctan 0.7 \approx \underline{35^\circ}$$

Sluring [LL 6.7]

Hvis $\omega \neq V/R$: $v = V - \omega R \neq 0$, ders relativ hastighet mellom objekt og underlag i kontaktpunktet



$$\Rightarrow \text{Kinetisk friksjon: } f = \mu_k N$$

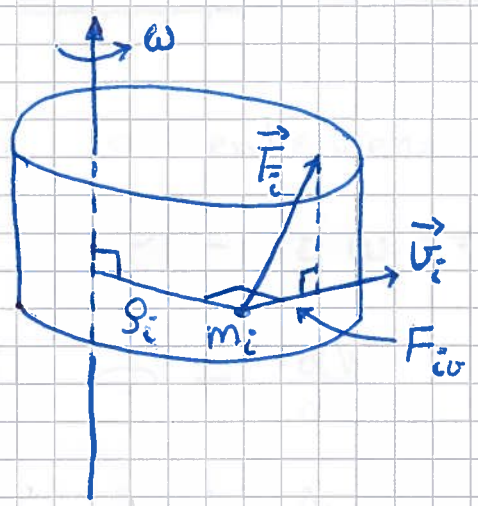
$$\Rightarrow \text{Effekttap: } P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$$

Ders, taper mek. energi lik $|P_f|$ pr tidsenhet.

Krefter og rotasjon: Rotasjonsdynamikk

Akse med fast orientering

- Dekker "det meste" (inkl. labprosjektet)
- Essensielt et 1D-problem
- Vi ser på rotasjonsdelen av den totale bevegelsen



$$v_i = \rho_i \omega$$

$F_{i\tau}$ = komponenten langs \vec{v}_i av ytre kraft \vec{F}_i på m_i

Triks: Regner ut tilført effekt, $P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$, på to måter.

$$P = \sum_i F_{i\tau} v_i = \left\{ \sum_i F_{i\tau} \rho_i \right\} \omega = \underline{\tau \omega}$$

der $\tau = \sum_i F_{i\tau} \rho_i =$ netto ytre dreiemoment på legemet, mhp rotasjonsaksen ("kraft \times arm")

) Bruker N2: $P = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i \stackrel{\text{(ses. 20)}}{=} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_i m_i v_i^2 =$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2 = \frac{1}{2} I \frac{d}{dt} \omega^2 = \frac{1}{2} I \cdot 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dt} = \underline{I \omega \dot{\omega}}$$

$= I =$ legemets treghetsmoment, mhp rot.aksen

Sammenligning av de to uttrykkene for P gir

(41)

$$\tau = I \dot{\omega}$$

Newtons 2. lov for rotasjon om akse med fast orientering.

Sammenlign med N2 for translasjon: $F = m \dot{v}$

Arbeid utført av dreiemomentet [YF 10.4; LL 6.4]

Fra sammenhengene

$$P = \tau \omega = \tau \frac{d\varphi}{dt}$$

og

$$P = \frac{dW}{dt}$$

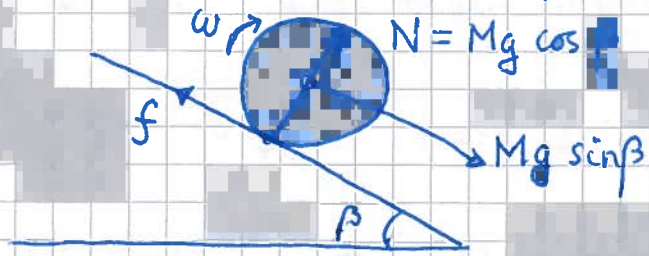
følger det direkte

$$dW = \tau d\varphi$$

= arbeidet utført av dreiemomentet τ i løpet av en liten vinkelendring (en liten rotasjon) $d\varphi$

Sammenlign arbeid utført ved translasjon: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Eks 1: Rulling på skrånplan (se s. 38)



Ren rulling:

τ gjennom CM $\tau = I_0 \dot{\omega}$ $\tau = f \cdot R$

$\Rightarrow CM R^2 \cdot \dot{v}/R \Rightarrow M \dot{v}$

Σ transl. $Mg \sin \beta - f = M \dot{v}$

$\Rightarrow Mg \sin \beta = M \dot{v}$

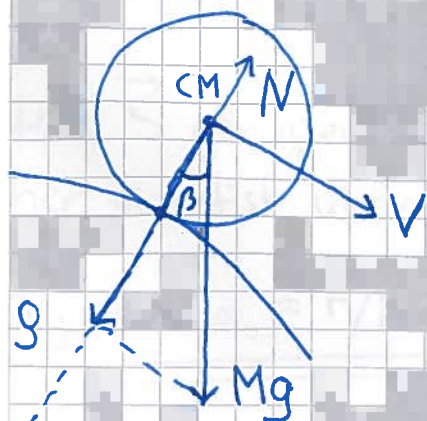
Eks 2 Rulling på krum bane

Med varierende helningsvinkel $\beta(x)$ er akselerasjonene

anene fortsatt $a = \frac{g \sin \beta}{1+c}$, (fra luft-) "ullfrikisjon"

men ikke lenger konstant

Normalkraften N heller konstant, ned krum bane har vi akselerasjon normalt



$\Sigma F_n = M a_n$; $g = \dots$

$\Sigma F_t = M a_t = \begin{cases} Mg \sin \beta \\ N - Mg \cos \beta \end{cases}$; krumning

Kan løse N2 langs banen numerisk med f.eks. eulermetoden:

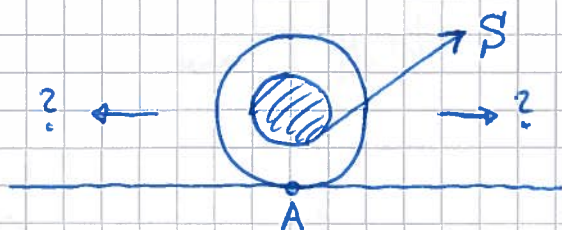
$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{g \sin \beta}{1+c} \Rightarrow \Delta V = \frac{g \sin \beta}{1+c} \Delta t$$

$$V_0 = 0, \quad t_0 = 0 \quad (\text{f.eks.})$$

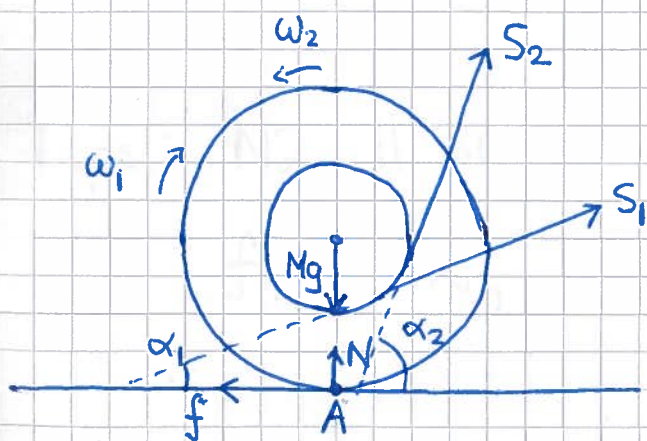
$$V_1 = \frac{g \sin \beta_0}{1+c} \Delta t, \quad \Delta S_1 = \frac{1}{2} V_1 \Delta t = \frac{1}{2} A_0 (\Delta t)^2$$

osv osv. Her må forflytninger (ΔS_i osv) dekomponeres, detaljene tas med løbveileder.

eks 3: Hvilken vei ruller snella?



følger kontaktlinjen mellom snelle og underlag som referanseakse A.



Mg , N og f har null arm mhp aksen A

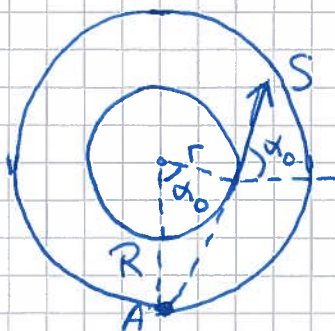
\Rightarrow Kun snordrag S har dreiemoment mhp aksen A

S_1 : Liten $\alpha \Rightarrow$ Mot høyre

S_2 : Stor $\alpha \Rightarrow$ Mot venstre

Hvis \vec{S} går gjennom A, har vi statisk likevekt:

$$\text{Fig} \Rightarrow \underline{\underline{\cos \alpha_0 = r/R}}$$

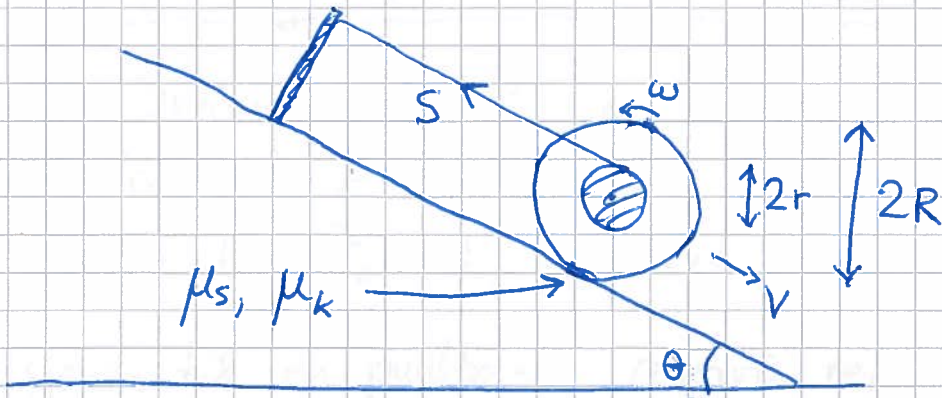


$$\sum \tau_A = 0$$

\Downarrow
Ingen rotasjon!

Øks 4: Snelle på skrånplan (Øving 6)

44



Hva er max vinkel θ_0 uten at snella "slurer baklengs" nedover?

Tips: $N_1 \parallel$ skrånplanet og N_1 for rot. om CM,
 $f = f_{\max} = \mu_s N$

Hvis $\theta > \theta_0$, hva blir snordraget S og akselerasjonen a ?

Tips: $N_2 \parallel$ skrånplanet og N_2 for rot. om CM,

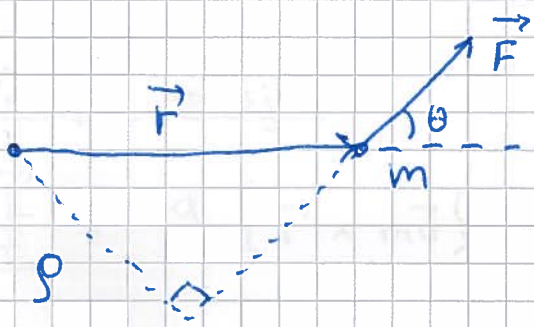
$f = \mu_k \cdot N$, samt "en slags nullbetingelse" $v = \omega r$

Rotasjonsdynamikk i 3D (med vektorer)

Merke: Dreiemoment $\vec{\tau}$ og dreieimpuls \vec{L} beregnes alltid relativt et (felles) fritt valgt referansepunkt \vec{r}_0 .
 Vi velger her $\vec{r}_0 = 0$, dvs ref. punkt er i origo.

Posisjonen til en punktmasse relativt ref. punktet blir da ganske enkelt \vec{r} . Med et annet valg for \vec{r}_0 blir selvsagt massens posisjon relativt ref. punktet $\vec{r} - \vec{r}_0$.

Dreiemoment [YF 10.1 ; LL 5.5, 6.4]



\vec{F} sitt dreiemoment på m :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Retning: $\vec{\tau} \perp$ både \vec{r} og \vec{F} (Her: ut av planet)

Abs.verdi: $\tau = r \cdot F \cdot \sin\theta = \rho \cdot F$ (som s. 40)

For et partikkelsystem:



$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{F} = \text{totalt dreiemoment p\u00e5 systemet}$$

Dreieimpuls [YF 10.5 ; LL 6.6]

(46)



Dreieimpulsen til m : $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$\vec{L} \perp \vec{r}$ og \vec{p} ; $L = |\vec{L}| = r p \sin\theta$

For partikkelsystem:



$d\vec{p} = \vec{v} dm$

$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} dm =$ systemets totale dreieimpuls

N2 for rotasjon [YF 10.5 ; LL 6.6]

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \{ \vec{r} \times m\vec{v} \} = m \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}}_{=\vec{v} \times \vec{v} = 0} + m \vec{r} \times \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{=\vec{a}}$

$\stackrel{N2}{=} \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$

Dvs: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

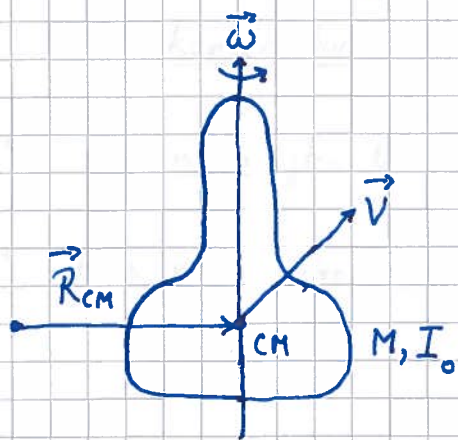
$\vec{\tau}$ = netto ytre dreiemoment på systemet

\vec{L} = systemets totale dreieimpuls

Sammenlign : $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ (N2 for translasjon)

\vec{L} for et stivt legeme [YF 10.5; LL 6.6]

For legeme med refleksjonssymmetri om rotesjonsaksen:
 (symmetrisk når $\vec{g} \rightarrow -\vec{g}$)



$$\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s$$

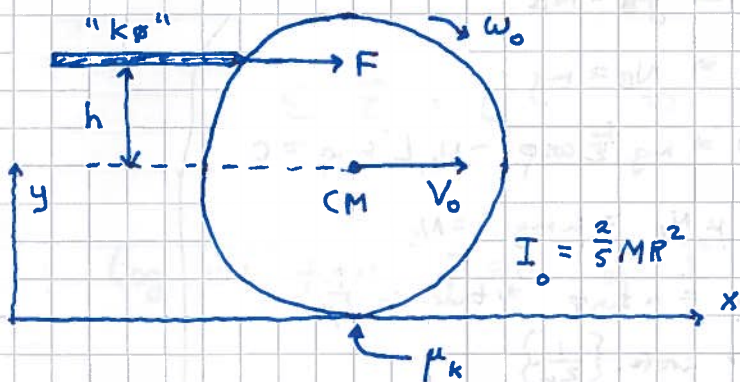
$$= \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} + I_0 \vec{\omega}$$

(Bevis: Se notat)

Banedreieimpuls, pga bevegelsen til CM: \vec{L}_b

Indre dreieimpuls, pga rotesjon om CM: \vec{L}_s ("spinn")

Eks: Snooker [LL 6.7, øving 6]



Bestem kulas bevegelse etter kortvarig støt ($\Delta t \approx 0$) i høyde h over senterlinjen, med kraft F ($F \gg f$; $f = \text{friksjonskraft fra underlaget}$).

N2, transl. $\Rightarrow F \Delta t = \Delta p = M V_0$

N2, rot. $\Rightarrow \tau \Delta t = F h \Delta t = \Delta L = I_0 \omega_0 = \frac{2}{5} M R^2 \omega_0$

\Rightarrow Sluring i starten, med mindre $\omega_0 = V_0/R$, dvs $h = \dots$

Vansett ren rulling etter hvert, med $\omega = V/R$, og med origo (i bordflaten) som ref. punkt

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} = -R M V \hat{z}$$

$$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega} = -\frac{2}{5} M R^2 \cdot (V/R) \hat{z} = -\frac{2}{5} R M V \hat{z}$$

Bevaringslover (oppsummering)

48

- I isolert system (ingen ytre krefter) er total energi E , impuls \vec{p} og dreieimpuls \vec{L} bevart
- I konservativt system er mekanisk energi $K + U$ bevart
- Hvis netto ytre kraft på et system er null, er total impuls \vec{p} bevart
- Hvis netto ytre dreiemoment på et system er null, er total dreieimpuls \vec{L} bevart

Statisk likevekt [YF 11.1-11.3 ; LL 7.1]

Stivt legeme forblir i ro ($\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$)

bare dersom ^{netto} ytre kraft og netto ytre dreiemoment er null:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{konst.}$$

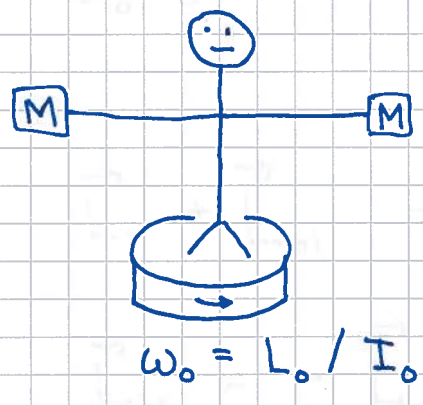
$$\sum_i \vec{\tau}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{konst.}$$

(og da f.eks. $\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$)

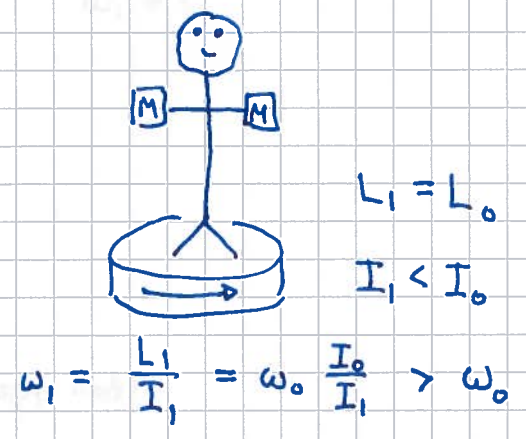
Noen eksempler / demonstrasjoner fra rotasjonsdynamikken:

Eks 1: Piruett [YF 10.6 ; LL 6.5]

Prinsippet er at med $L = I\omega$ vil redusert I gi økt ω dersom L er bevart.



$\tau_{\text{ytre}} = 0 \rightarrow$



Muskelenergi brukes til å gjøre arbeid på de to bøkene (M).

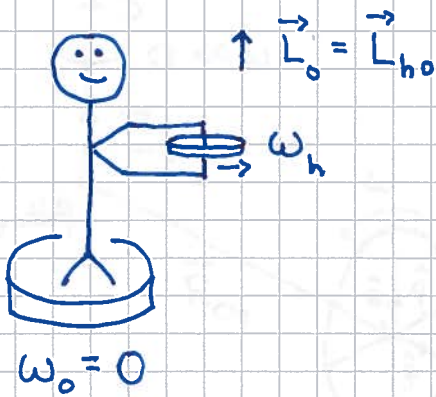
⇒ Kinetisk energi øker:

$$K_0 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2$$

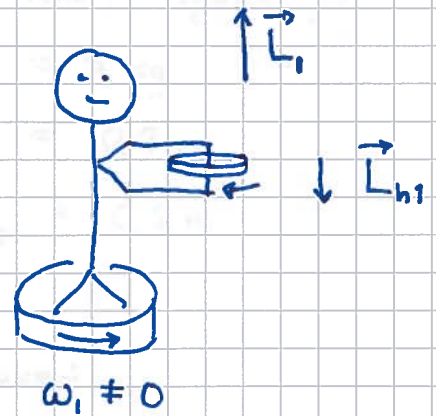
$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0 \omega_1 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 \cdot \frac{I_0}{I_1} = K_0 \cdot \frac{I_0}{I_1} > K_0$$

Eks 2: Bevning av \vec{L} for sykkelhjul og student

(50)



Snu hjulet
 $\tau_{yho} = 0$

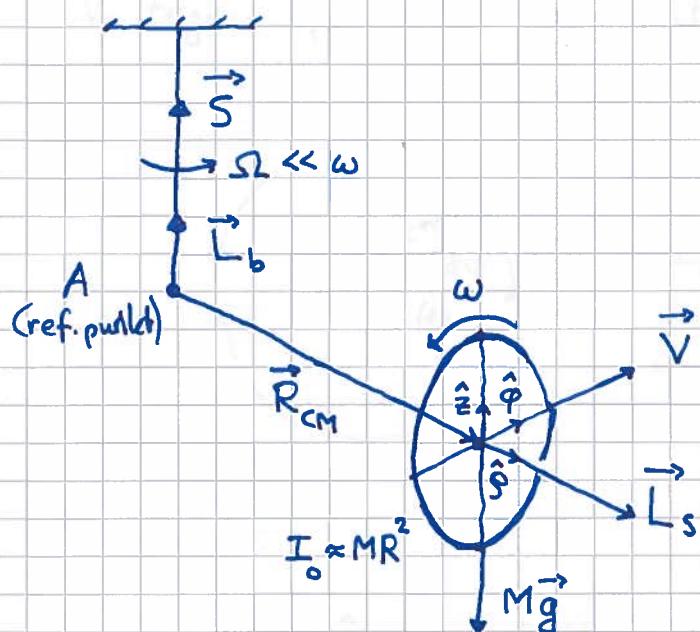


$$\vec{L}_1 + \vec{L}_{h1} = \vec{L}_o = \vec{L}_{ho}$$

$$\vec{L}_{h1} = -\vec{L}_{ho} \quad (\text{hjulet er snudd opp ned})$$

$$\Rightarrow \vec{L}_1 = 2\vec{L}_o$$

og student/stol/hjul roterer med
 vinkelhastighet $\omega_1 \neq 0$



Tallverdier, sykkelhjul:

$$M \approx 5 \text{ kg}$$

$$R \approx 0.3 \text{ m}$$

$$R_{CM} \approx 0.2 \text{ m}$$

Oppgave:

Finn sammenheng mellom

 Ω og ω (når $\Omega \ll \omega$).

Exp: Når hjulet settes i rotasjon for hånd, blir $T_{\Omega} = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 5 \text{ s}$.

Løsning: Vi bruker N2 for rotasjon, med A som ref. punkt.

$$\vec{\tau}_A = d\vec{L}_A / dt$$

Her er

$$\vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} = R_{CM} \hat{g} \times (-Mg \hat{z}) = R_{CM} Mg \hat{\phi}$$

og

$$\vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s$$

med

$$\begin{aligned} \vec{L}_b &= \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} = R_{CM} \hat{g} \times MV \hat{\phi} = R_{CM} MV \hat{z} \\ &= R_{CM} M R_{CM} \Omega \hat{z} = R_{CM}^2 M \Omega \hat{z} \end{aligned}$$

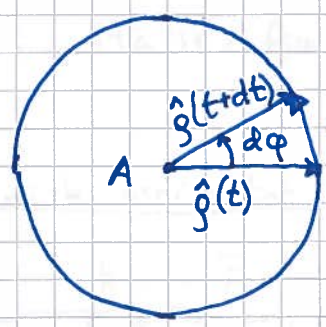
$$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega} = MR^2 \omega \hat{g}$$

Siden $\omega \gg \Omega$, er $L_s \gg L_b$, slik at $\vec{L}_A \approx \vec{L}_s = MR^2 \omega \hat{g}$

Her er M , R og ω konstante størrelser (vi neglisjerer at ω avtar litt) med tiden

$$\Rightarrow d\vec{L}_A/dt = MR^2\omega d\hat{g}/dt$$

Vi tegner opp $\hat{g}(t)$ og $\hat{g}(t+dt)$, sett ovenfra:



$$d\hat{g} = 1 \cdot d\phi \cdot \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{g}}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \hat{\phi} = \Omega \hat{\phi}$$

Dermed:

$$R_{cm} Mg \hat{\phi} = MR^2\omega\Omega \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{R_{cm} g}{R^2 \Omega}$$

Hjulets omløpstid (om sin egen aksling): $T_\omega = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\frac{2\pi}{T_\omega} = \frac{R_{cm} g T_\Omega}{R^2 \cdot 2\pi}$$

$$\Rightarrow T_\omega = \frac{(2\pi R)^2}{R_{cm} g T_\Omega} \approx \frac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10 \cdot 5} \text{ s} \approx 0.36 \text{ s} \approx 0.4 \text{ s}$$

Swingninger

[YF 14 ; LL 9]

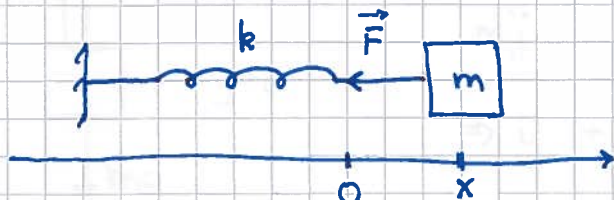
53

Periodisk oppførsel omkring en likevekt

Eks: Masse / fjær. Pendel. Gitarstreng. Atom i molekyl. etc

Harmonisk oscillator

[YF 14.2 ; LL 9.1-9.3]



Likevekt når
m er i pos. $x=0$

x = posisjonen til m

= fjæras forlængelse ($x > 0$)

eller sammenpressing ($x < 0$)

\vec{F} = kraft på m fra fjæra ; virker alltid i retning
tilbake mot likevekt

En ideell fjær følger Hookes lov :

$$\vec{F} = -kx \hat{x}$$

k = fjærkonstanten ; $[k] = \text{N/m}$

N2 : $-kx = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 ; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

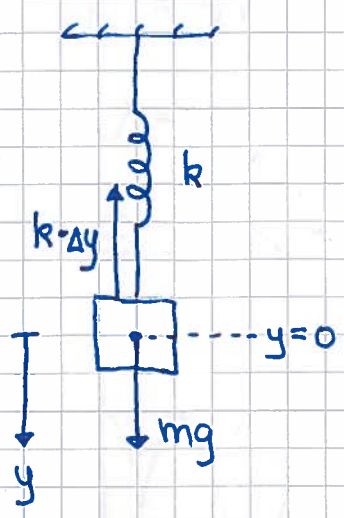
Enkel harmonisk
oscillator i 1D.

Løsning: $x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t$

eller $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Konstantene B og C , evt A og φ , fastlegges med to
initialbetingelser, f.eks $x = x_0$ og $\dot{x} = v_0$ ved tid $t = 0$.

En konstant tilleggskraft endrer likevektsposisjonen, men ikke ligningen:



Lodd i ro når $\Sigma F = 0 \Rightarrow k \Delta y = mg$

Fjæra forlenges med $\Delta y = mg/k$

Anta CM i $y = 0$ i strukket likevekt.

N2, når CM er i pos. y :

$m\ddot{y} = \Sigma F = mg - k(\Delta y + y) = -ky$

$\Rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 ; \omega_0^2 = k/m$

Mange størrelser er kjent fra sirkelbevegelse:

$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) =$ oscillatorens utsving fra likevekt (f.eks. posisjon)

$A =$ amplitude = max utsving fra likevekt ; $[A] = [x]$

$\omega_0 =$ vinkelfrekvens ; $[\omega_0] = s^{-1}$

$T = 2\pi/\omega_0 =$ periode = tid pr hel svingning ; $[T] = s$

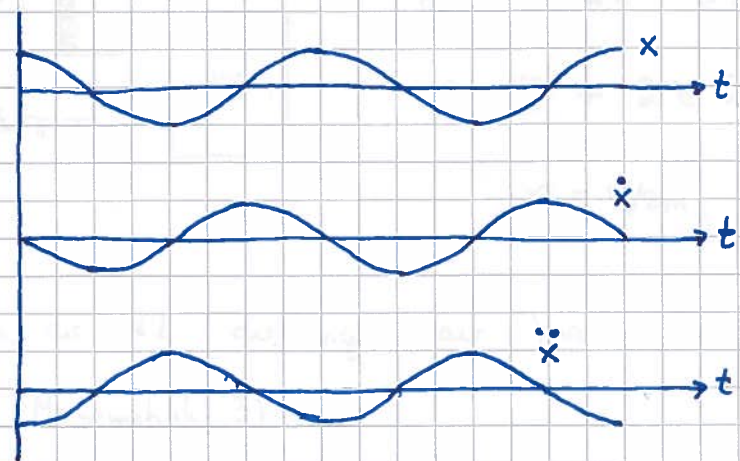
$f = 1/T =$ frekvens = antall svingninger pr tidsenhet; $[f] = s^{-1} = Hz$

$\omega_0 t + \varphi =$ svingningens fase

$\varphi =$ fasekonstant ; $[\varphi] = 1$

$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi) = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2) =$ hastighet

$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi) = \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi) =$ akselerasjon



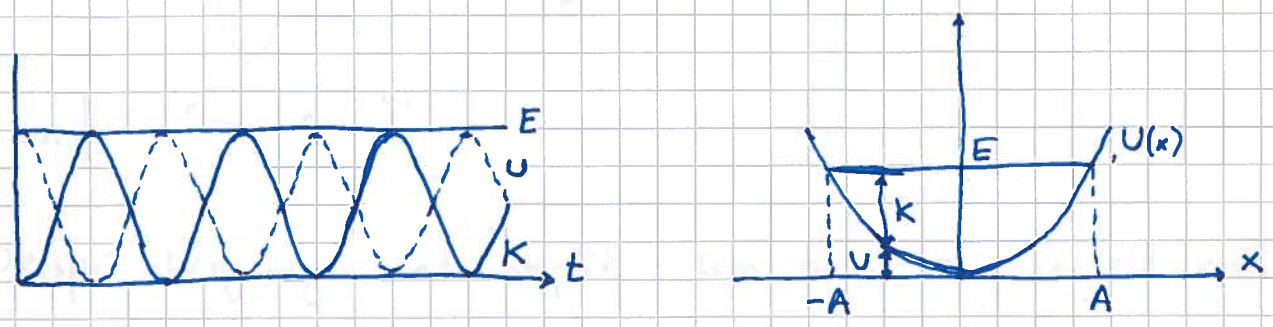
Energi i harmonisk oscillator [YF 14.3; LL 9.4]

Systemet er konservativt, og total mekanisk energi er bevart:

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$U = - \int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 \omega_0 t$$

$$E = K + U = \frac{1}{2} k A^2$$



Dempet fri svingning [YF 14.7; LL 9.7]

Vi antar (for enkelhets skyld!) friksjonskraft p8 formen

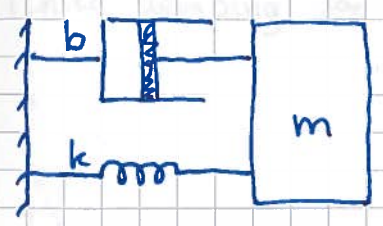
$$f = -b \dot{x}$$

dvs som ved langsom bevegelse i et fluid.

[Alternativ:

Større hastighet i fluid: $f = -D \dot{x}^2$

Torr friksjon: $f = \mu_k N$]



$$N2: -kx - b \dot{x} = m \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

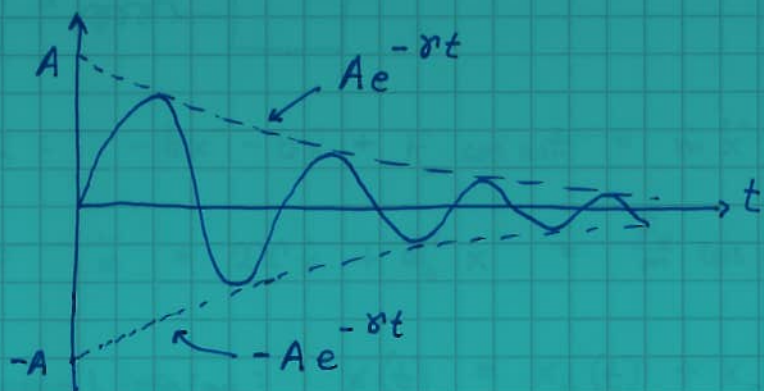
$$\gamma = b/2m, \omega_0^2 = k/m, [\gamma] = [\omega_0] = s^{-1}$$

Løsn. av N2 avhenger av hvor sterk damping vi har.

(Se Matematikk 3)

Underkritisk ("svak") damping, $\gamma < \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



Dempet svingning med amplituda som avtar eksponentielt med t , $A e^{-\gamma t}$; eller tid $1/\gamma$ er amplituden redusert til $\frac{A}{e} \approx 0.37A$.

Overkritisk damping ("sterk" damping), $\gamma > \omega_0$

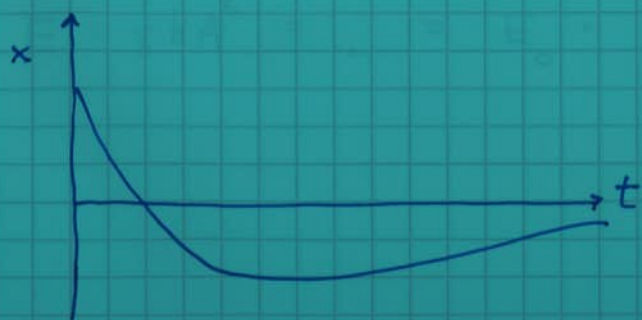
$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}$$

$$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Kritisk damping, $\gamma = \omega_0$ (slik at $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma$)

$$x(t) = (A + Bt) e^{-\gamma t}$$

Minske damping som ikke gir svingninger; fint i støtdempere!

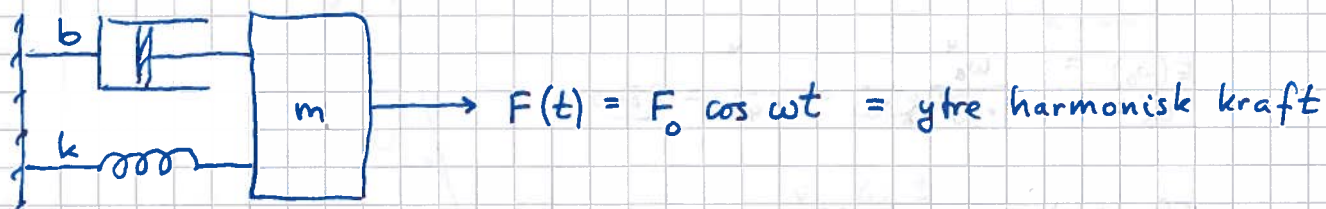


(Her er $x(0) = A > 0$

og $\dot{x}(0) < 0$)

Trungen svingning og resonans [YF 14.8; LL 9.9]

(57)



$$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (2\gamma = \frac{b}{m}, \omega_0^2 = \frac{k}{m})$$

Generel løsning: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Homogen løsning: Løsning av $\ddot{x}_h + 2\gamma\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$

Fra 5.6: $x_h \sim \exp(-\gamma t) \rightarrow 0$ når $t \gg 1/\gamma$

Dvs, x_h er kun relevant for innsvingningsforløpet.

La oss nå anta at $t \gg 1/\gamma$. Da er

$$x(t) = x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

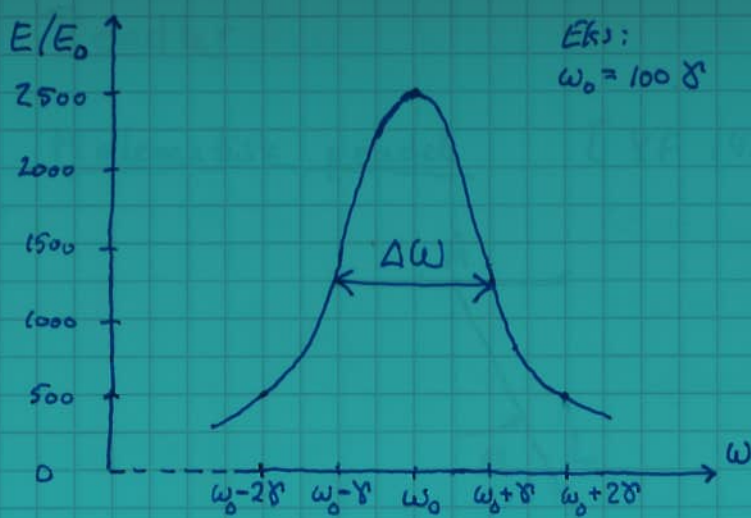
Innsetting av x_p , \dot{x}_p og \ddot{x}_p i N2 gir

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2\}^{1/2}}; \quad \tan \varphi(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}$$

Resonans: Vi ser at A blir stor hvis $\omega \approx \omega_0$ og $\gamma \ll \omega_0$.

Oscillatorens energi:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \dots = E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}; \quad E_0 = \frac{\pi^2}{2k}$$



ω	E/E_0
ω_0	2500
$\omega_0 \pm \delta$	1250
$\omega_0 \pm 2\delta$	500

Resonanskurvens halvverdibredde: $\Delta\omega \approx 2\delta$

Oscillatorens Q -faktor: $Q \equiv \omega_0 / \Delta\omega \approx \omega_0 / 2\delta$

Dvs: Smal resonanskurve \Rightarrow Høy Q -faktor ($Q=50$ ovenfor)

Jo mindre demping δ , jo smalere og høyere resonanskurve.

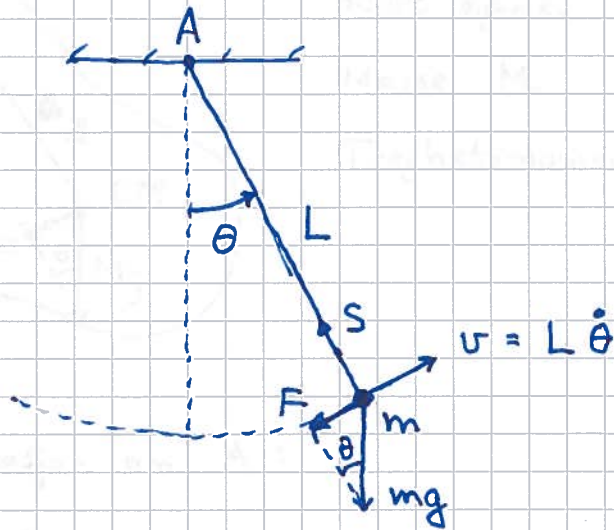
Exp: Stav med messinglodd.

Plotter A^2 som funksjon av frekvens f .

Pendler

59

Matematisk pendel [YF 14.5 ; LL 9.6]



Punktmasse m i
masseløs snor/stang.

N2 || sirkelbanen: $F = ma$ med $F = -mg \sin \theta$ og $a = \ddot{r} = L\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow -mg \sin \theta = mL\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

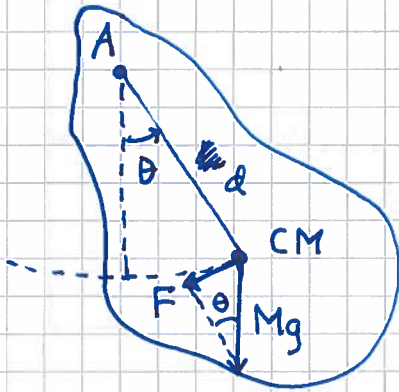
Antar små utsving fra likevekt, $|\theta| \ll 1 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ; \omega_0^2 = g/L$$

Fysisk pendel

[YF 14.6 ; LL 9.6]

60



Stivt legeme.

Masse M.

Tregghetsmoment I mhp aksen A.

N2 for rotasjon om A:

$$\tau = I \ddot{\theta}, \quad \text{med } \tau = -F \cdot d = -Mgd \sin \theta$$

(der vi regner τ som positiv mot klokka)

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I} \sin \theta = 0$$

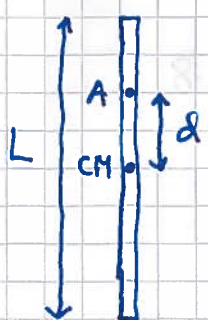
Antar små utsving $\Rightarrow \sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{Mgd}{I}$$

Hvis matematisk pendel ($d=L$):

$$I = ML^2 \Rightarrow \omega_0^2 = g/L \quad ; \quad \text{OK}$$

Hvis tynn stang:



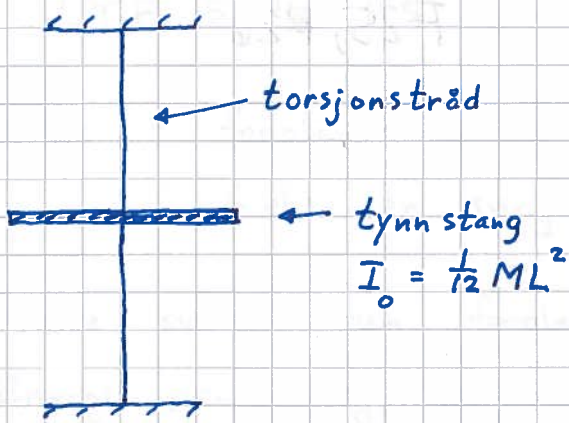
$$I = I_0 + Md^2 = \frac{1}{12} ML^2 + Md^2$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{gd}{d^2 + L^2/12} \Rightarrow T(d) = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{d^2 + L^2/12}{gd}}$$

Torsjonspendel

[YF 14.4 ; LL 9.6]

(61)



Torsjonstråden motsetter seg vridning. Virker på stanga med dreiemoment prop. med vridningsvinkelen,

$$\tau = -\kappa \Theta \quad (\text{Hookes lov})$$

der κ = torsjonsstivheten

[$\kappa = \pi G d^4 / 32 l$; der G , d og l er hhv trådens skjærmodul, diameter og lengde]

N2 for rotasjon om trådens akse:

$$\tau = I_0 \ddot{\Theta} \Rightarrow \ddot{\Theta} + \omega_0^2 \Theta = 0 ; \quad \omega_0^2 = \kappa / I_0$$

Exp : $M = 50 \text{ g}$, $L = 11 \text{ cm}$. Mål svingetida T og bestem κ .

Løsn : $T = 0.8 \text{ s}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \kappa &= I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{2} ML^2 \cdot 4\pi^2 / T^2 = ML^2 \pi^2 / 3T^2 \\ &= (0.050 \cdot 0.11^2 \pi^2 / 3 \cdot 0.8^2) \text{ Nm} \\ &= \underline{0.003 \text{ Nm}} \end{aligned}$$

BØLGEFYSIKK

(62)

[YF 15, 16, 11.4 ; LL 10, 7.2]

bølge = forplantning av forstyrrelse fra likevekt,
f.eks. en svingning

Masse svinger men forplanter seg ikke.

Energi svinger og forplanter seg med bølgen.

Transversal bølge (T) : Masse svinger \perp bølgens forplantningsretning

Longitudinal bølge (L) : — " — " — " — " —

Eksempler:

Streng/snor/fjær : T-utsving av massen i strengen/snora/fjæra

Lyd : L-utsving av molekylar i mediet

Overflatebølger på vann : T- og L-utsving av vannet

Elektromagnetiske (EM) bølger : El. felt \vec{E} og magn. felt \vec{B}

svinger \perp forplantningsretningen (dvs T-bølger)

Bølgefenomener :

Interferens, diffraksjon

Stående bølger, resonans

Dopplereffekt

Brytning. Dispersjon (\Rightarrow Regnbue osv)

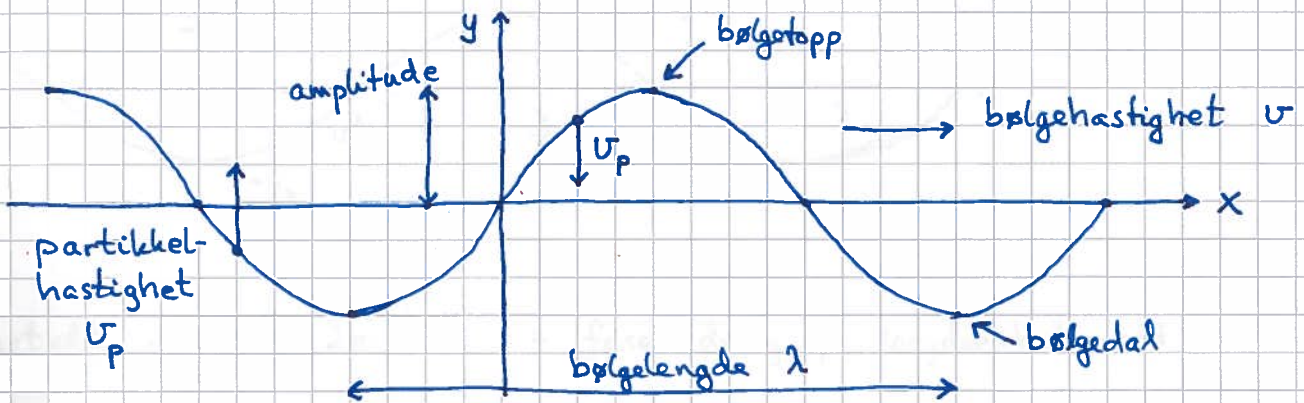
Sjokkbølger

Harmoniske bølger [YF 15.2, 15.3 ; LL 10.2]

Vilkårlig bølgetog /-pakke/-puls kan uttrykkes som en sum av harmoniske bølger ; jf Fourierrekker

Anta (f.eks.) en T-bølge på en ∞ lang streng.

$y(x,t)$ = utsving fra likevekt i pos. x ved tid t



T = periode = tid som bølgemønsteret bruker på å flytte seg en bølglengde λ

\Rightarrow bølgehastigheten er $v = \lambda / T$ (kalles også fasehastigheten)

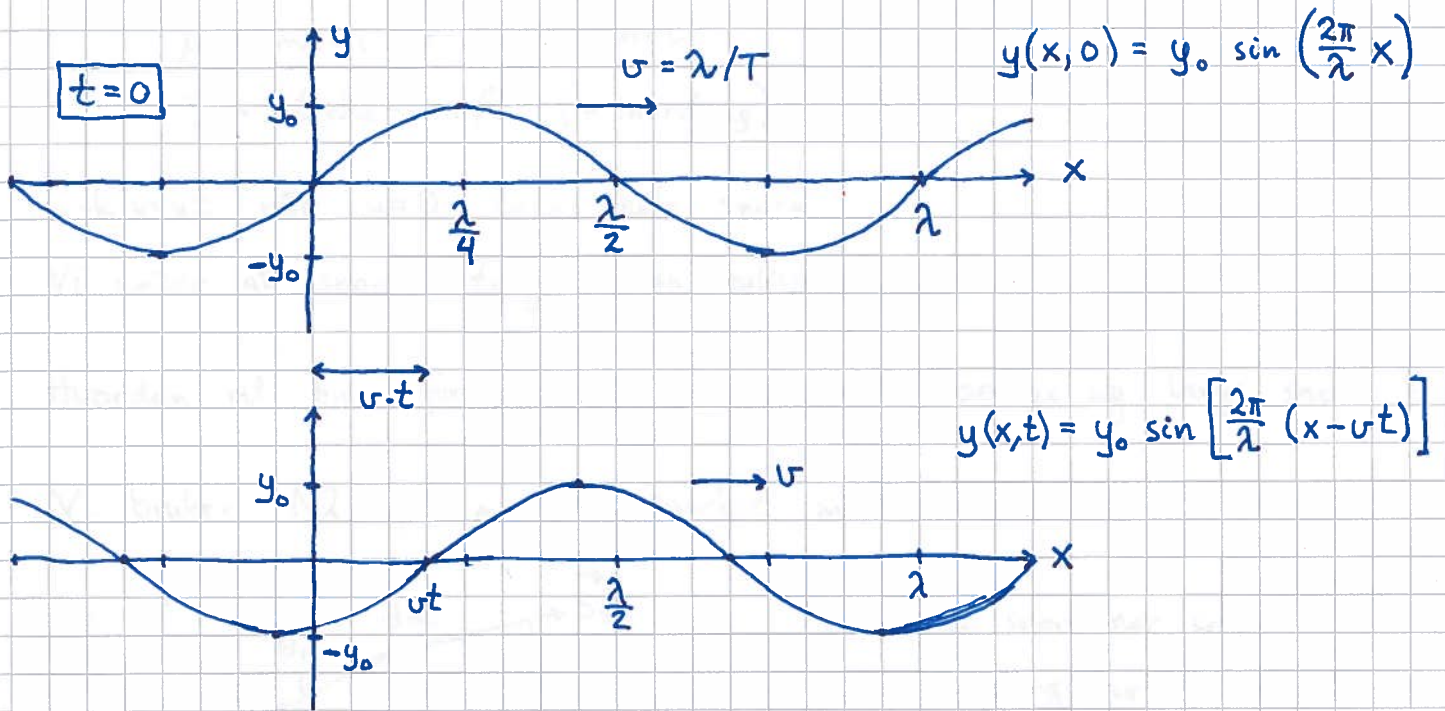
f = frekvens = antall svingninger pr tidsenhet ved gitt posisjon x

$\Rightarrow f = 1/T \Rightarrow v = \lambda \cdot f$

ω = vinkel frekvens = bølgens faseendring pr tidsenhet ved gitt pos. x

$\Rightarrow \omega = 2\pi / T = 2\pi f$

$v_p = dy/dt =$ partikkelhastigheten



Bølgetal : $k = 2\pi/\lambda$ = faseendring pr længdeenhed ved gitt tid t

Dermed : $v = \lambda/T = \lambda f = \lambda \omega/2\pi = \omega/k$

\Rightarrow $y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$ = harmonisk bølge som forplanter

seg i positiv x -retning, med bølgefart $v = \lambda/T = \omega/k$.

Hvis forplantning i negativ x -retning: $y(x,t) = y_0 \sin(kx + \omega t)$

Mer generelt :

T-bølge, polarisert i y -retning : $\vec{D}(x,t) = \hat{y} D_0 \sin(kx \pm \omega t + \varphi)$

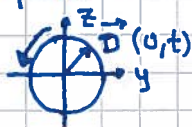
————— " ————— z-retning : $\vec{D}(x,t) = \hat{z} D_0 \sin(kx \pm \omega t + \varphi)$

L-bølge : $\vec{D}(x,t) = \hat{x} D_0 \sin(kx \pm \omega t + \varphi)$

T-bølge, pol. langs $\hat{y} \pm \hat{z}$: $\vec{D}(x,t) = (\hat{y} \pm \hat{z})(D_0/\sqrt{2}) \sin(kx \pm \omega t)$

T-bølge, sirkulærpolarisert : $\vec{D}(x,t) = D_0 \{ \hat{y} \cos(kx - \omega t) - \hat{z} \sin(kx - \omega t) \}$

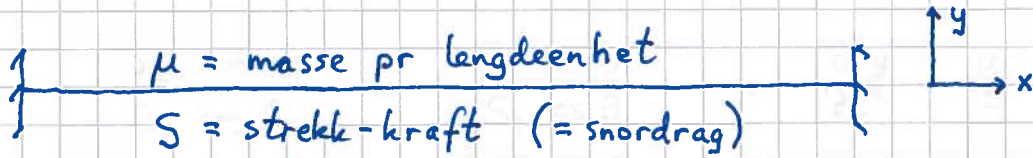
Ved $x=0$:



$$\vec{D}(0,t) = D_0 \{ \hat{y} \cos \omega t + \hat{z} \sin \omega t \}$$

Transversale bølger på snor/streng [YF 15.4; LL 10.1]

(65)

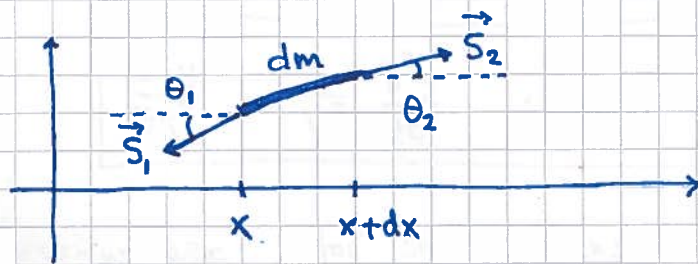


Likevekt når $y=0$ langs hele snora.

Vi antar at snoras tyngde kan neglisjeres.

Hvordan vil en "forstyrrelse" fra likevekt bevege seg langs snora?

Vi bruker N2 på en liten snorbit med masse $dm = \mu \cdot dx$:



Ei snor har ingen bøyningstivhet, så \vec{S} er overalt tangentiell til snora.

Vi antar små utsving fra likevekt: $|y| \ll \lambda$ overalt

Vi antar kun vertikal bevegelse av masse.

$$\Rightarrow |S_{1x}| = |S_{2x}| = S_x \approx S$$

$$\text{N2: } \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \vec{a} \cdot dm$$

$$\text{Horisontalt: } S_{1x} + S_{2x} = a_x \cdot dm = 0$$

$$S_{1x} = -S_1 \cos \theta_1 = -S$$

$$S_{2x} = S_2 \cos \theta_2 = S$$

$$\text{Vertikalt: } S_{1y} + S_{2y} = a_y \cdot dm = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot dm$$

$$S_{1y} = -S_1 \sin \theta_1$$

$$S_{2y} = S_2 \sin \theta_2$$

$$\Rightarrow S_2 \sin \theta_2 - S_1 \sin \theta_1 = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot \mu \cdot dx$$

Dividerer med S og utnytter at $S = S_1 \cos \theta_1 = S_2 \cos \theta_2$: (66)

$$\underbrace{\frac{S_2 \sin \theta_2}{S_2 \cos \theta_2}}_{\tan \theta_2} - \underbrace{\frac{S_1 \sin \theta_1}{S_1 \cos \theta_1}}_{\tan \theta_1} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot \frac{\mu}{S} \cdot dx$$

Ser fra fig: $\tan \theta = \partial y / \partial x =$ snoras helning [Jf banens helning på løb!]

$$\Rightarrow \frac{(\partial y / \partial x)_{x+dx} - (\partial y / \partial x)_x}{dx} = \frac{\mu}{S} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

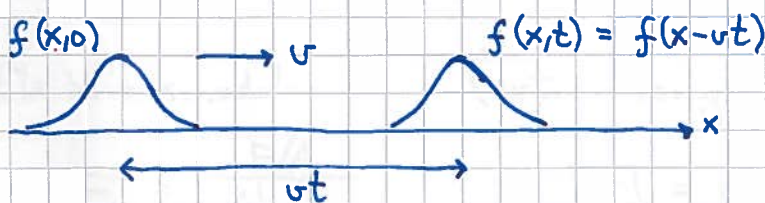
$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} ; v = \sqrt{S/\mu}}$$

Bølgligningen for små transversale utsving $y(x,t)$ på snor/streng med snordrag S og masse μ pr lengdeenh.

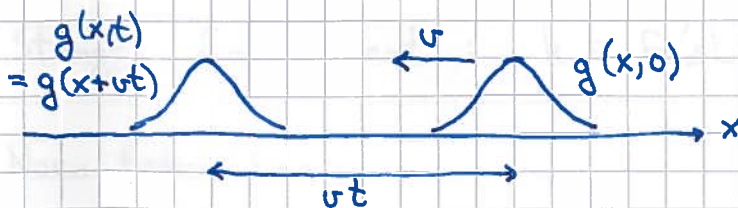
Generell løsning:

$$\boxed{y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt) ; v = \sqrt{S/\mu}}$$

[Bevis: Innfør $z = x \pm vt$ og bruk kjernerregel for derivasjon; se 2017, s. 60]



Bølge/Forskyrrelse som forpl. seg i pos. x-retn. med fart v



Forpl. i neg. x-retn. med fart v

Elastisitet

[YF 11.4 ; LL 7.2]

(67)

[Nødvendig for å beskrive mekaniske bølger i fluider og faste stoffer.]

Vi antar hele tiden linear respons, dvs at Hookes lov gjelder.

Da er relativ lengde- eller volumendring, $\Delta L/L_0$ eller $\Delta V/V_0$ (= deformasjon = "strain") prop. med påtrykt kraft pr flateenhet, F/A (= mekanisk spenning = "stress").

$$\Rightarrow \text{Elastisk modul} = \frac{\text{Mek. spenning}}{\text{Deformasjon}} = \frac{\text{Stress}}{\text{Strain}}$$

||
en (temperaturavhengig) materialekonstant

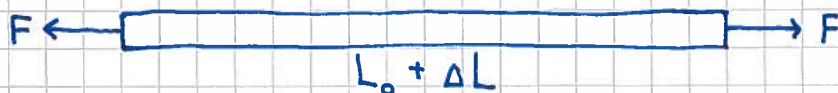
Normalspenning :

Tynn stang med lengde L_0 og tverrsnitt A forlenges når den strekkes.

Likerekt :



Strukket :



Elastisitetsmodulen (evt. Youngs modul Y) :

$$E = \frac{F/A}{\Delta L/L_0} ; [E] = \text{N/m}^2 = \text{Pa} \text{ (pascal)}$$

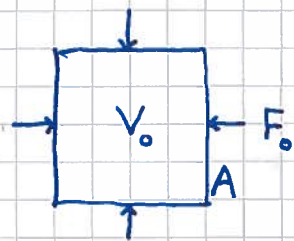
Stangas fjærkonstant : $k = F/\Delta L = E \cdot A/L_0$

Noen tallverdier :

Stål: $E \approx 200 \text{ GPa}$; Grafen: $E \approx 1050 \text{ GPa}$; DNA: $E \approx 0.3 \text{ GPa}$

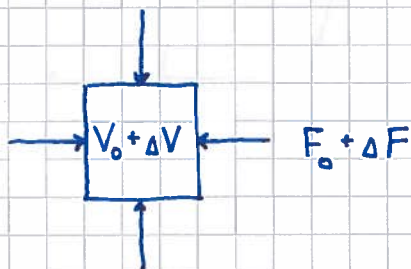
Volumkompressibilitet:

Likevekt:



$p_0 = F_0/A =$ likevektstrykket fra det omgivende mediet

Trykkøkning \Rightarrow volumreduksjon:



$p = p_0 + \Delta p$

Bulkmodulen:

$$B = - \frac{\Delta p}{\Delta V/V_0} = -V_0 \frac{\Delta p}{\Delta V} \quad (= -V \frac{\partial p}{\partial V})$$

$[B] = N/m^2 = Pa$

Kompressibiliteten: $\kappa = B^{-1} = - \frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta p} \quad (= - \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p})$

Tallverdier:

Stål: $B = 160 \text{ GPa}$

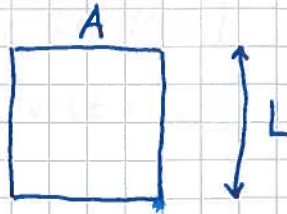
Vann: $B \approx 2 \text{ GPa}$

Luft: $B \approx 0.0001 \text{ GPa}$

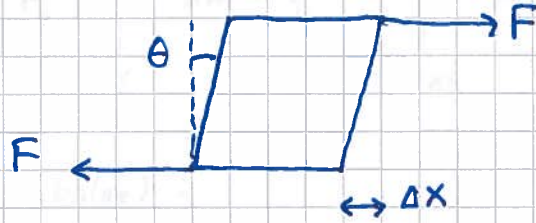
Dvs: $B_{\text{gass}} \ll B_{\text{væske}} < B_{\text{fast stoff}}$

Skjærdeformasjon:

Likerekt:



Med skjærkrefter:



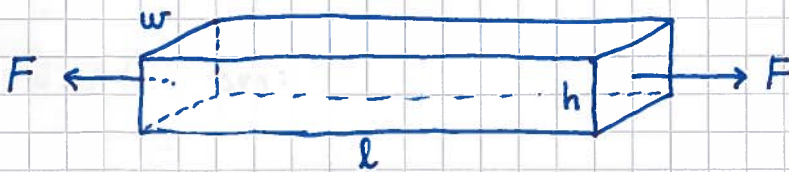
Skjærmodulen:

$$G = \frac{F/A}{\Delta x/L} = \frac{F/A}{\tan \theta} \stackrel{\theta \ll 1}{\approx} \frac{F/A}{\theta} ; [G] = Pa$$

Tallv: Stål: $G \approx 79 \text{ GPa}$

Som regel, for faste stoffer: $E \sim B > G$

Normalspenning skaper skjærspenning, og omvendt.



$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\nu \cdot \frac{\Delta l}{l} ; \nu = \text{poisson tallet}$$

Teoretiske sammenhenger mellom de elastiske modulene:

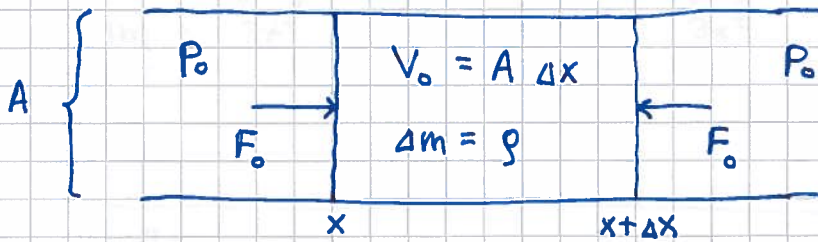
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} ; B = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Longitudinale bølger. Lyd

(70)

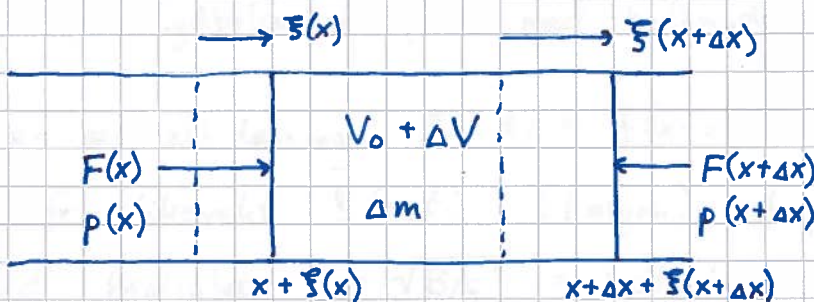
[YF 16.1, 16.2 ; LL 10.6]

Fluid i rør. Likevekt:



ρ = masse pr volumenet

Forstyrrelse (bølge):



$$\Delta p(x) = p(x) - p_0, \quad \Delta p(x+\Delta x) = \cancel{p(x+\Delta x)} - p_0$$

dvs Δp = avvik fra likevektstrykket p_0

$\xi = \xi(x, t)$ = midlere utsving fra likevekt for molekyler med likevektsposisjon x

N2 for Δm :

$$\begin{aligned} \Delta m \cdot \ddot{\xi} &= F(x) - F(x+\Delta x) \\ &= [p(x) - p(x+\Delta x)] \cdot A \\ &= [\Delta p(x) - \Delta p(x+\Delta x)] \cdot A \end{aligned}$$

Fra s. 68:

$$B = - \frac{\Delta p}{\Delta V / V_0} \quad \Rightarrow \quad \Delta p = -B \frac{\Delta V}{V_0}$$

$$\text{Her er: } \Delta V = A \cdot [\xi(x+\Delta x) - \xi(x)] = A \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = V_0 \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \Delta p(x) - \Delta p(x + \Delta x) = -B \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} \right] \quad (71)$$

$$= B \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\Delta m}_{\rho V_0} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = B \cdot \underbrace{\Delta x \cdot A}_{V_0} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} ; \quad v = \sqrt{B/\rho}}$$

Bølgelign. for lydbølger i fluid med bulkmodul B , massefylte ρ

Som s. 66 er generell løsning $\xi(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$, dvs forstyrrelsen fra likevekt $\xi(x,t)$ (bølgen) forplanter seg gjennom fluidet med hastighet $v = \sqrt{B/\rho} =$ lydhastigheten i fluidet.

Tallverdier:

Fluid	ρ (kg/m ³)	B (Pa)	v (km/s)
Luft	1.29	$1.42 \cdot 10^5$	0.33
Vann	1000	$2.2 \cdot 10^9$	1.5

Mekaniske bølger i faste stoffer:

Tynn stang: Longit. bølger, der B erstattes av E , dvs

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} ; \quad v = \sqrt{E/\rho}$$

Stål: $\rho = 7.8 \cdot 10^3$ kg/m³ ; $E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Pa $\Rightarrow v \approx 5.1$ km/s

Generelt, siden normalspenning skaper skjærspenning, og omvendt, vil en forstyrrelse fra likevekt gi opphav til både long. og transv. bølge:

(72)

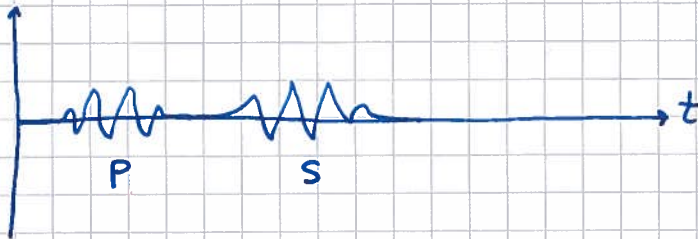
$$L: v_p = \sqrt{(B + \frac{4}{3}G)/\rho}$$

$$T: v_s = \sqrt{G/\rho}$$

Eks: Jordskjelv og seismiske bølger

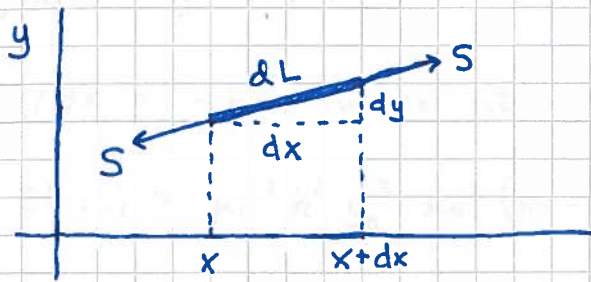
Primærbølge (L) $v_p \sim 5.5 - 13.7$ km/s

Sekundærbølge (T) $v_s \sim 3.0 - 7.3$ km/s



Kan lokalisere et jordskjelv (sted og tidspunkt) ved å måle P- og S-bølgen på ulike steder.

Ser på transv. bølge på snor/streng:



Likerekt:

$$y = 0 \text{ overalt}$$

$$K = 0, U = 0$$

$$\mu = dm/dx$$

Forstyrrelse fra likerekt gir snorbitten en hastighet $\partial y/\partial t$ og en forlengelse $dL - dx$

$$\Rightarrow dK = \frac{1}{2} dm v_y^2 = \frac{1}{2} \mu dx (\partial y/\partial t)^2$$

$$dU = S \cdot (dL - dx) \quad (= \text{arbeid utført av } S \text{ p\u00e5 snorbitten})$$

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + (dy/dx)^2} \approx dx [1 + \frac{1}{2} (\partial y/\partial x)^2]$$

$$\Rightarrow dU = \frac{1}{2} S dx (\partial y/\partial x)^2$$

Vi har fra f\u00f6r at $y(x,t) = y(x \pm vt)$; da er $\frac{\partial y}{\partial t} = \pm v \frac{\partial y}{\partial x}$.

Dessuten er $v = \sqrt{S/\mu}$, slik at $S = \mu v^2$

Dermed; mekanisk energi pr lengdeenhet:

$$\begin{aligned} \epsilon = dE/dx &= dK/dx + dU/dx = \frac{1}{2} \mu (\partial y/\partial t)^2 + \frac{1}{2} S (\partial y/\partial x)^2 \\ &= \mu v^2 (\partial y/\partial x)^2 = \mu (\partial y/\partial t)^2 = \pm \mu v (\partial y/\partial t) (\partial y/\partial x) \end{aligned}$$

Siden $y = y(x \pm vt)$, er ogs\u00e5 $\partial y/\partial t$ og $\partial y/\partial x$ funksjoner av $x \pm vt$, dvs $\epsilon = \epsilon(x \pm vt)$. Men da m\u00e5 ϵ oppfylle b\u00f8lgehgn.

$$\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2},$$

som betyr at b\u00f8lgeenergien forplanter seg med b\u00f8lgen, med hastighet lik b\u00f8lgefarten. (Her: $v = \sqrt{S/\mu}$)

For harmoniske bølger er vi som regel mest interessert i
middelverdier (= gjennomsnittsverdier):

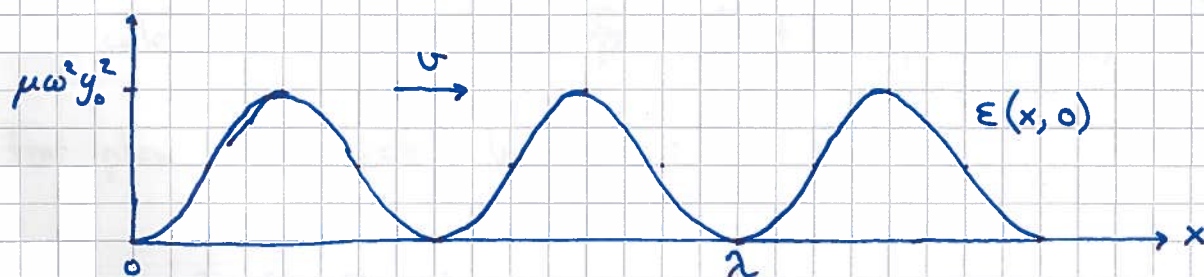
$$y(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t) ; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

$$\partial y / \partial x = -k y_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\Rightarrow \epsilon(x,t) = \mu v^2 k^2 y_0^2 \sin^2(kx - \omega t) = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

Øyeblikksbilde (f.eks. $t=0$) : $\epsilon(x,0) = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2 kx$

Ved gitt sted (f.eks. $x=0$) : $\epsilon(0,t) = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2 \omega t$



Enten vi midler i rom eller tid blir middelverdien av både $\sin^2 kx$ og $\sin^2 \omega t$ lik $1/2$ (som vi også ser fra figuren).

Dvs: Romlig middelverdi $\bar{\epsilon} =$ Tidsmiddel $\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2$

[Mer formelt:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^\lambda \epsilon(x,t) dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \epsilon(x,t) dx$$

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\int_0^T \epsilon(x,t) dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T} \int_0^T \epsilon(x,t) dt]$$

[Merk at siden $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ og $\langle \sin^2 \varphi \rangle = \langle \cos^2 \varphi \rangle$, får vi at $\langle \sin^2 \varphi \rangle + \langle \cos^2 \varphi \rangle = \langle 1 \rangle = 1$ og $\langle \sin^2 \varphi \rangle = \langle \cos^2 \varphi \rangle = 1/2$.

Tilsvarende $\overline{\sin^2 \varphi} = \overline{\cos^2 \varphi} = 1/2$.]

Helt tilsvarende utledninger for en plan longitudinal bølge (lydbølge) i et fluid gir (med $\mu \rightarrow \rho =$ masse pr volumenet)

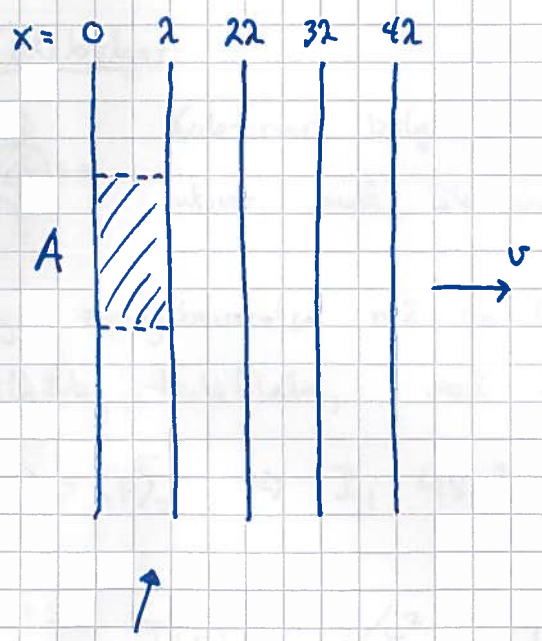
$$\epsilon(x,t) = \rho v^2 (\partial \xi / \partial x)^2 = \rho (\partial \xi / \partial t)^2 = \pm \rho v (\partial \xi / \partial t) (\partial \xi / \partial x)$$

der $\xi =$ longitudinallt molekylforsving (i middel) fra likevekt
 $v = \sqrt{B/\rho} =$ lydfarten i fluidet

Bølgens intensitet [YF 16.3 ; LL 10.5]

I = intensitet = middlere overført effekt pr flateenhet ; $[I] = W/m^2$

For plan harmonisk lydbølge:



Bølgefronter : Flater med samme fase overalt på en gitt bølgefront ; f.eks. bølgetopper

Energi i skravert volum :

$$\bar{\epsilon} \cdot A \cdot \lambda$$

Hele denne energien har passert ved $x=\lambda$ i løpet av tiden T

Dermed blir bølgens intensitet :

$$I = \bar{P}/A = (\bar{\epsilon} A \lambda / T) / A = \underline{\underline{\bar{\epsilon} \cdot v}}$$

(siden $v = \lambda / T$)

Desibel-skalaen

Pga store tallmessige forskjeller i lydintensitet brukes ofte en logaritmisk skala for å tallfeste intensiteten:

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) ; I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

Da er lydtrykksnivået tallverdien av β i "enheten" dB (=desibel).

Eks:

Høregrensen (knappt hørbar lyd): $I = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \Rightarrow \beta = 10 \log 1 = \underline{0 \text{ dB}}$

Smertegrensen: $I = 1 \text{ W/m}^2 \Rightarrow \beta = 10 \log 10^{12} = 10 \cdot 12 \log 10 = \underline{120 \text{ dB}}$

Kulebølger



Kuleformet bølgekilde \Rightarrow Bølge som forplanter seg radieelt utover, med lik intensitet i alle retninger.

Pga energibevarelse må en like stor effekt passere gjennom en vilkårlig kuleflate, ved f.eks. $r = r_1$ og ved $r = r_2 > r_1$:

$$\langle P \rangle_1 = \langle P \rangle_2 \Rightarrow I_1 \cdot 4\pi r_1^2 = I_2 \cdot 4\pi r_2^2 \Rightarrow I_2 / I_1 = r_1^2 / r_2^2$$

Dvs: $I(r) \sim 1/r^2$ for kulebølger; intensiteten avtar med kvadratet av avstanden til bølgekilden

Eks: Målinger gir $\beta = 103 \text{ dB}$ 3.5m fra en kuleformet høyttaler. Hva er da β i avstand 35m fra høyttaleren?

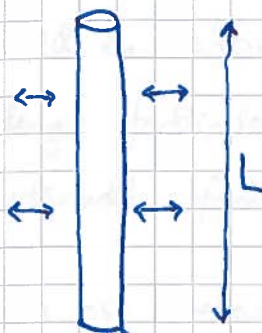
Løsn: $I(35) = I(3.5) \cdot (3.5/35)^2 = I(3.5)/100$
 $\Rightarrow \beta(35) = 10 \log \{ I(3.5)/100 I_0 \} = \beta(3.5) - 10 \log 100 = 103 - 20 = \underline{83 \text{ dB}}$

Sylinderbølger

Sylinderformet bølgekilde genererer bølger med sylinderflater som bølgefronter.

⇒ Like stor effekt gjennom flater med areal $L \cdot 2\pi r$

⇒ $I(r) \sim 1/r$



Plane bølger

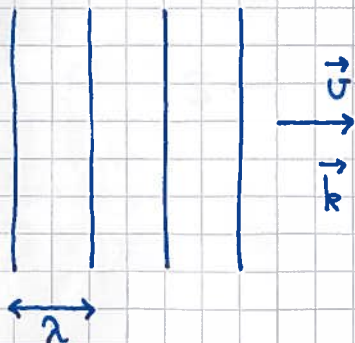
Plan bølgekilde skaper bølger der bølgefrontene er plane flater

⇒ Lik effekt gjennom areal som ikke avhenger av r

⇒ I avtar ikke med r



Plan harmonisk bølge i vilkårlig retning



$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{S}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

\vec{k} = bølgetallsvektoren; peker i bølgens forplantningsretning;

$$k = |\vec{k}| = 2\pi/\lambda;$$

$$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$$

Eks: Uttrykk ^{plan} harmonisk bølge som forplanter seg i positiv y-retning.

Løsn: Nå er $\vec{k} = k_y \hat{y} = k \hat{y}$, slik at $\vec{k} \cdot \vec{r} = k \hat{y} \cdot (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) = ky$

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{S}_0 \sin(ky - \omega t)$$

$$L: \vec{S}_0 = S_0 \hat{y}$$
$$T: \vec{S}_0 = S_0 \hat{x} + S_0 \hat{z}$$

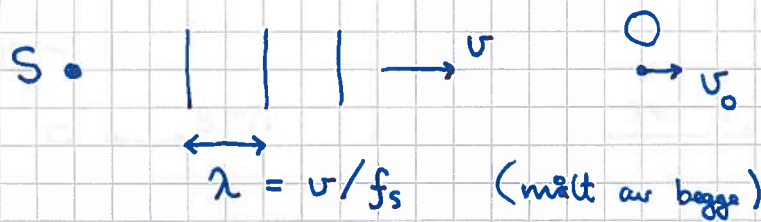
Dopplereffekt [YF 16.8; LL 10.8]

(78)

Med en relativ bevægelse mellem bølgekilde (S) og observatør (O), langs forbindelseslinjen, blir observert frekvens f_0 forskjellig fra utsendt frekvens f_s !

La oss velge positiv retning for v mot høyre.

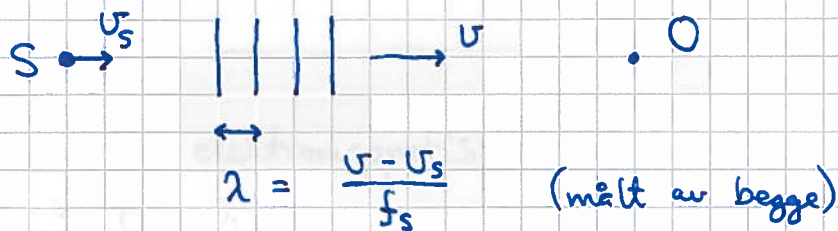
① S i ro, O i bevægelse



Bølgens fart målt av O : $v - v_0$

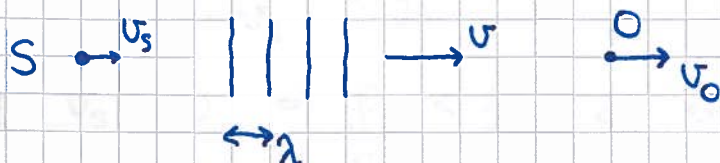
$$\Rightarrow \text{Frekvensen målt av O : } f_0 = \frac{v - v_0}{\lambda} = \frac{v - v_0}{v} \cdot f_s < f_s \text{ når } v_0 > 0$$

② S i bevægelse, O i ro



$$\Rightarrow \text{Frekr. målt av O : } f_0 = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{v - v_s} \cdot f_s > f_s \text{ når } v_s > 0$$

③ S og O i bevægelse



$$\Rightarrow f_0 = \frac{v - v_0}{\lambda} = \frac{v - v_0}{v - v_s} \cdot f_s$$

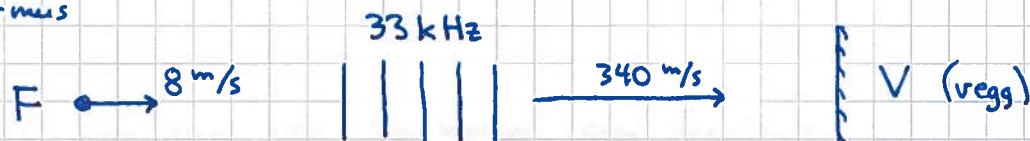
④ I tillegg kan mediet (som bølgen forplanter seg i) være i bevegelse, med hastighet $v_m =$ luft hastigheten (= vindhastigheten)

Da må v erstattes av $v + v_m$:

$$f_o = \frac{v + v_m - v_o}{v + v_m - v_s} \cdot f_s$$

Youtube har div. eksempler med fog, biler etc.

Eks: Flaggermus



Ultraljuden reflekteres fra vegg. Hvilken frekvens hører F at ekkoet har?

Løsn: Først er F kilde og V observatør. For ekkoet er V kilde og F obs.

$$f_v = \frac{v}{v - v_f} \cdot f_f \quad ; \quad f_E = \frac{v + v_f}{v} \cdot f_v$$

$$\Rightarrow f_E = \frac{v + v_f}{v - v_f} \cdot f_f = \frac{348}{332} \cdot 33 \text{ kHz} = \underline{34.6 \text{ kHz}}$$

Dopplereffekt med elektromagnetiske bølger:

$$v = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

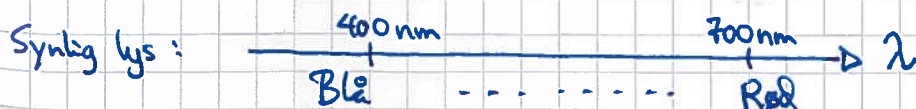
Anta en kilde S i bevegelse, O i ro.



$$\text{Da er } f_o \approx \frac{c}{c - v_s} \cdot f_s$$

Rød-skift: $v_s < 0 \Rightarrow f_o < f_s$, dvs endring mot lavere frekvens

Blå-skift: $v_s > 0 \Rightarrow f_o > f_s$, ——— " ——— høyere ———



Stående bølger [YF 15.7, 15.8, 16.4 ; LL 10.3]

(80)

Harmonisk bølge på streng fastspent i begge ender har mulige bølgelengder gitt ved

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} ; \quad n = 1, 2, 3, \dots ; \quad L = \text{strengens lengde}$$



$$\lambda_1 = 2L$$

grunn-tonen



$$\lambda_2 = L$$

1. overtone



$$\lambda_3 = \frac{2}{3}L$$

2. overtone

osv

Kan oppfattes som sum av to bølger som forplanter seg hver sin vei:

$$y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t) + y_0 \sin(kx + \omega t)$$

$$(\text{slik at } y(0,t) = -y_0 \sin \omega t + y_0 \sin \omega t = 0)$$

Bruker $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$ og får

$$\begin{aligned} \underline{y(x,t)} &= y_0 \{ \sin kx \cos \omega t - \cos kx \sin \omega t + \sin kx \cos \omega t + \cos kx \sin \omega t \} \\ &= \underline{2 y_0 \sin kx \cos \omega t} \end{aligned}$$

Dette er en harmonisk svingning ($\cos \omega t$) med en posisjonsavhengig amplitude ($2 y_0 \sin kx$), en såkalt stående bølge. Merk: Her er det ingen netto energitransport i bølgens forpl.retning.

$$y(L,t) = 0 \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n}$$

Strengens resonansfrekvenser (egenfrekvenser):

$$f = v/\lambda ; \quad v = \sqrt{S/\mu} \Rightarrow \boxed{f_n = \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot \frac{n}{2L}} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Eks: Hvis du vil ha samme stramning i giterens to E-strenger, hva er da forholdet mellom diametrene? Anta samme materiale og samme lengde. $f_E = 82.4 \text{ Hz}$, $f_{E'} = 329.6 \text{ Hz}$

Løsn: $\mu = \rho \cdot A = \rho \cdot \pi d^2 / 4 \sim d^2$; $d = \text{diameter}$
 $f = \sqrt{S/\mu} \sim 1/\sqrt{\mu} \sim 1/d$

$\Rightarrow d_E / d_{E'} = f_{E'} / f_E = 329.6 / 82.4 = \underline{4}$

Stående bølger i lange, tynne rør:

Åpen ende: $p = p_0 = \text{likerektstrykket utenfor røret}$

$\Rightarrow \Delta p = p - p_0 = 0$

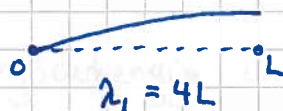
Fra s. 70: $\Delta p = -B \frac{\partial \xi}{\partial x}$; $\xi = \text{utsving fra likerekt}$

$\Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \Rightarrow \text{max utsving for bølgen } \xi(x, t)$

Lukket ende: $\xi = 0$; max amplitude for trykkebølgen $\Delta p(x, t)$

\Rightarrow Med 2 åpne ender (tverrflytete): $\lambda_n = 2L/n$, $f_n = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \cdot \frac{n}{2L}$; $n = 1, 2, 3, \dots$

1 åpen og 1 lukket (klorinett $\sim \sqrt{fL}$): $\lambda_n = 4L/(2n-1)$, $f_n = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \cdot \frac{2n-1}{4L}$; $n = 1, 2, 3, \dots$



osv

Eks: Med 2 åpne ender og max utsvingsamplitude $2 \cdot \xi_0$, hva er $\overset{\text{max}}{(\Delta p)_0}$?

Løsn: $\Delta p = -B \frac{\partial}{\partial x} \{ 2 \xi_0 \cos kx \cos \omega t \} = 2k B \xi_0 \sin kx \cos \omega t$

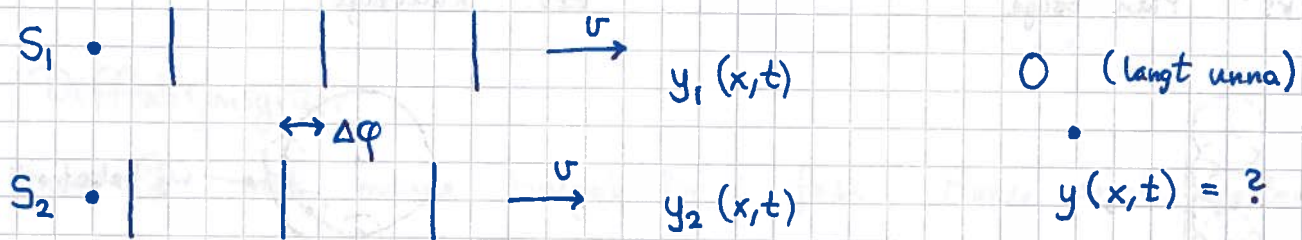
$\Rightarrow \text{max amplitude } (\Delta p)_0 = 2k B \xi_0$ (der $k = 2\pi/\lambda$; $\lambda = 2L/n$)

Interferensfenomener [YF 15.6, 16.6 ; LL 10.7]

82

Skyltes overlagning av to eller flere bølger på gitt sted til gitt tid.

) To bølger, samme retning og frekvens, faseforskjell $\Delta\varphi$



Total bølge ved O :

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t) + y_0 \cos(kx - \omega t + \Delta\varphi)$$

Braker $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$

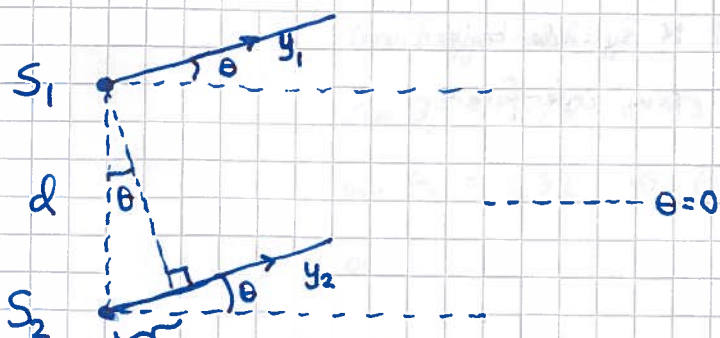
$$\Rightarrow y(x,t) = \underbrace{2y_0 \cos \frac{\Delta\varphi}{2}}_{\text{amplitude som avhenger av } \Delta\varphi} \cos(kx - \omega t + \frac{\Delta\varphi}{2})$$

Konstruktiv interferens: $\Delta\varphi = 0$, dvs y_1 og y_2 i fase ved O

Hvis y_1 alene gir intensitet I_1 , gir $y_1 + y_2$ intensitet $4I_1$

Destruktiv interferens: $\Delta\varphi = \pi$, dvs y_1 og y_2 i motfase; $I = 0$

) Retningsavhengig interferens (S_1 og S_2 i fase)



$d =$ avstanden mellom S_1 og S_2

$\Delta r = d \sin \theta =$ veilengdeforskjellen mellom y_1 og y_2

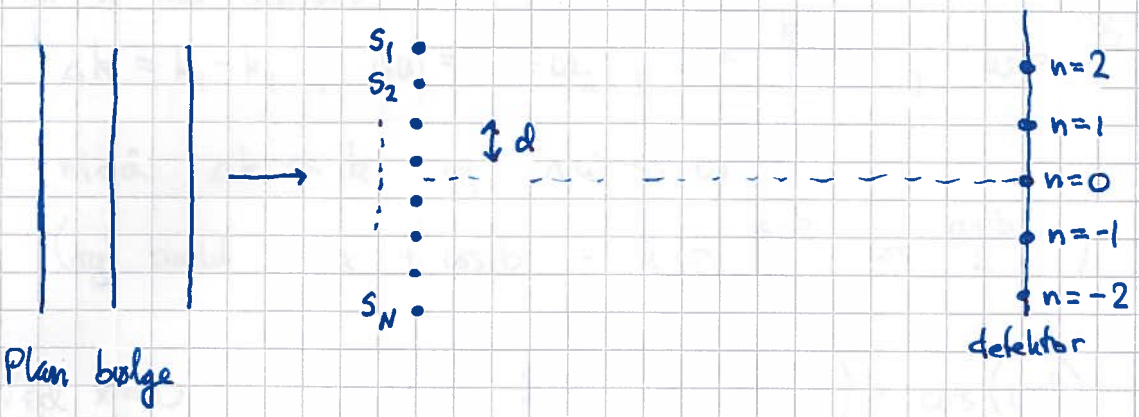
Vi antar at de to bølgene observeres / detekteres i stor avstand L fra kildene (dvs $L \gg d$).

- > Konstruktiv interferens : $\Delta r = d \sin \theta = n\lambda$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)
- Destruktiv " : $\Delta r = d \sin \theta = (n + \frac{1}{2})\lambda$

3) Diffraksjonsgitter

Som ②, med mange bølgekilder i fase. Mange smale spalter med avstand d mellom. Får sylinderbølger på vei mot detektoren. [se s. 83B]

Konstruktiv interferens hvis veilengdeforskjell $\Delta r = d \sin \theta = n\lambda$ mellom nabospalter, og max intensitet. Andre retninger: Delbølgene interfererer med tilfeldige faser $\Rightarrow I \approx 0$.



Laserlys: EM-bølger med skarpt definert λ

- Rød: 650 nm
- Grønn: 532 nm
- Blå: 405 nm

Eks: 300 spalter pr mm $\Rightarrow d = \frac{1}{300} \text{ mm} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-5} \text{ m}$

Grønt lys med $\lambda = 532 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ gir da

$\sin \theta_1 = \lambda / d = 532 \cdot 3 \cdot 10^{-4} = 0.16 \Rightarrow \theta_1 = 9.2^\circ$

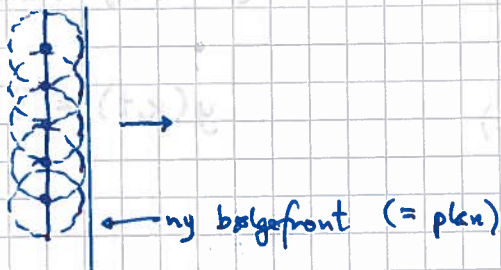
$\sin \theta_2 = 0.32 \Rightarrow \theta_2 = 18.6^\circ$

osv

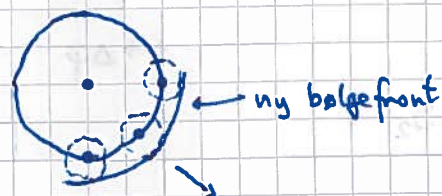
Huygens' prinsipp:

Alle punkter på en bølgefront er kilde til en "liten" kulebølge. Neste bølgefront blir tangent til småbølgene

Eks: Plan bølge



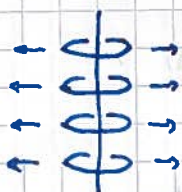
Eks: Kulebølge



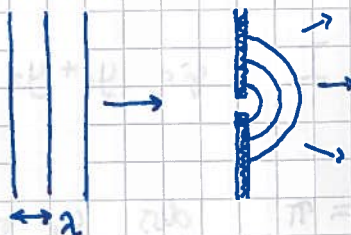
Eks: Diffraksjonsgitter

= mange tettliggende smale spalter

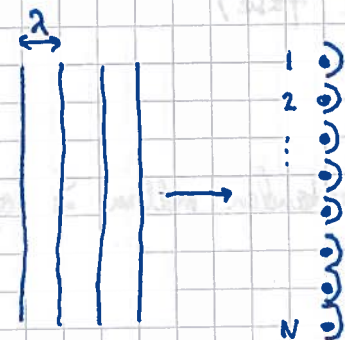
1 spalte er kilde til en sylinderbølge:



Sett ovenfra, med plan bølge inn fra venstre:



Mange spalter (1, 2, ..., N):



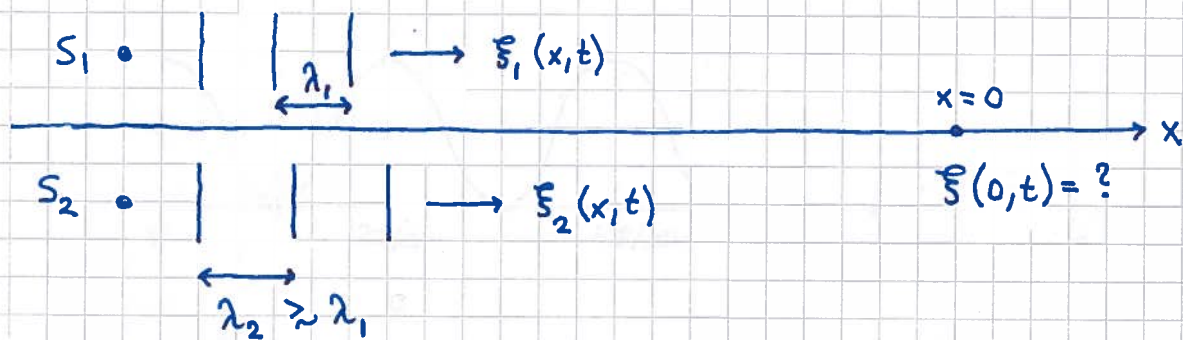
Plan bølge inn

Til høyre for spaltene:
N sylinderbølger
som interfererer

④ Sverming ; interferens i tid [YF 16.7 ; LL 10.7]

84

2 bølgekilder (f.eks lyd) med litt forskjellig frekvens



$$\begin{aligned} E(x,t) &= E_1(x,t) + E_2(x,t) \\ &= E_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + E_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t) \\ &= 2E_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t\right) \cdot \cos(kx - \omega t) \end{aligned}$$

der vi har innført

$$\Delta k = k_1 - k_2, \quad \Delta \omega = \omega_1 - \omega_2, \quad k = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

med $\Delta k \ll k$ og $\Delta \omega \ll \omega$

$$\left(\text{og bruket } \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a-b}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2} \right)$$

$$\text{Ved } x=0 : E(0,t) = 2E_0 \cos\left(\frac{\Delta \omega}{2} t\right) \cdot \cos(\omega t)$$

Intensiteten ved $x=0$: (se s. 75)

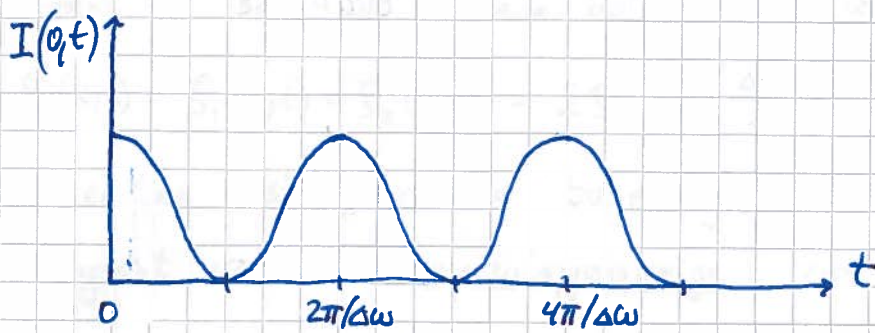
$$\begin{aligned} I(0,t) &= \langle \epsilon \rangle \cdot v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (2E_0)^2 v \cdot \cos^2\left(\frac{\Delta \omega}{2} t\right) \\ &= \rho \omega^2 E_0^2 v \left\{ 1 + \cos(\Delta \omega \cdot t) \right\} \end{aligned}$$

Her har vi midlet energitetheten ϵ over en periode av den raske svingningen, med $T = 2\pi/\omega$. Det er denne som gir tonen, $f = (f_1 + f_2)/2$.

$$\left(\text{og vi brukte } \cos^2(a/2) = \frac{1}{2}(1 + \cos a) \right)$$

$\{1 + \cos(\Delta\omega \cdot t)\}$ \Rightarrow langsom variasjon i intensiteten :

(85)



\Rightarrow Vi hører såkalt svevning ("beats").

Tid mellom påfølgende I_{\max} :

$$T_s = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \text{sveveperioden}$$

$$f_s = \frac{1}{T_s} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \Delta f = f_1 - f_2 = \text{svevefrekvensen}$$

Eks: To stemmegaffer, den ene med litt tape, slik at egenfrekvensen senkes, fra 440 Hz ("kammertonen") til ca 437 Hz.

\Rightarrow Vi hører svevning, med ca 3 svingninger i intensitet pr sekund.

Gruppestighet. Dispersjon [YF 33.4 ; LL 10.7, 10.10]

(86)

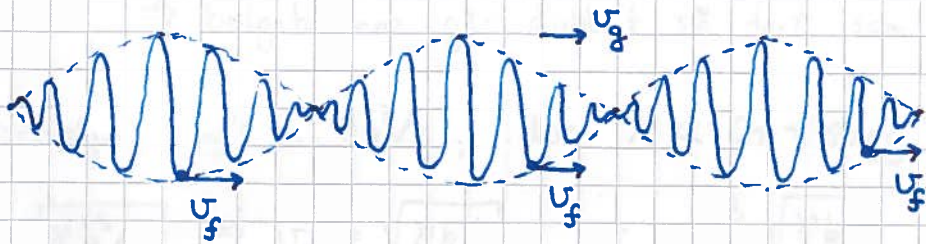
Vi fant at sum av to harm. bølger med litt forskjellig bølglengde er

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) = 2\xi_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right) \cdot \cos(kx - \omega t)$$

Dette er en raskt varierende bærebølge $\cos(kx - \omega t)$ "modulert" med en langsomt varierende modulasjonsbølge $\cos\left(\frac{1}{2}\Delta kx - \frac{1}{2}\Delta \omega t\right)$.

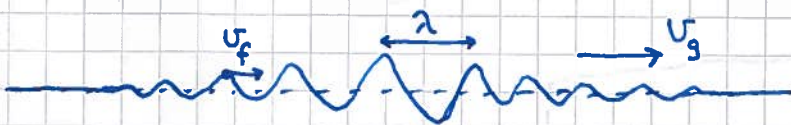
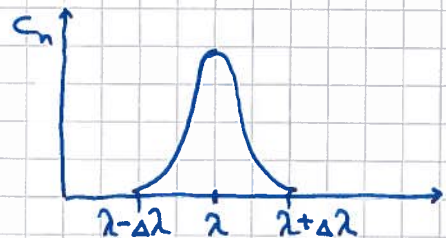
Bærebølgens hastighet: $v = v_f = \frac{\omega}{k} = \underline{\text{fasehastigheten}}$

Modulasjonsbølgens hastighet: $v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk} = \underline{\text{gruppestigheten}}$



En romlig avgrenset bølgepakke med typisk, evt. midlere, bølglengde λ kan beskrives som en sum av mange harmoniske bølger med bølglengder omkring λ :

$$\xi(x,t) = \sum_n c_n \sin(k_n x - \omega_n t)$$



- Bølgepakken og energien forplukter seg med gruppefarten $v_g = d\omega/dk$
- Funksjonen $\omega(k)$ kalles dispersjonsrelasjonen.
- Bølger på streng ($v_f = \sqrt{S/\mu}$), lydbølger i fluid ($v_f = \sqrt{B/\rho}$) og EM bølger i vakuum ($v_f = c$) har fasefart uavhengig av k . Da er $\omega = v_f \cdot k$ lineær i k , og $v_g = d\omega/dk = v_f$.
- Bølger med ikke-lineær dispersjon: EM bølger i materialer som glass og vann. Overflatebølger på vann.

- Overflatebølger på vann:

"Styres" av tyngdekraft og overflatespenning, som på dypt vann (dvs $kD = 2\pi D/\lambda \gg 1$; $D = \text{dybden}$) gir

$$\omega(k) = \sqrt{g \cdot k + \gamma \cdot k^3 / \rho}$$

med $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ og $\gamma = 0.073 \text{ N/m} = \text{overflatespenning}$.

Tyngdebølger, $gk \gg \gamma k^3 / \rho$, dvs $\lambda \gg 2\pi \sqrt{\gamma / \rho g} \approx 17 \text{ mm}$:

$$\omega \approx \sqrt{gk} \Rightarrow v_f \approx \sqrt{g/k}, \quad v_g \approx \frac{1}{2} \sqrt{g/k} = v_f / 2$$

\Rightarrow bølgetoppene går dobbelt så fort som bølgepakken

Kapillærbølger, $gk \ll \gamma k^3 / \rho$, dvs $\lambda \ll 2\pi \sqrt{\gamma / \rho g} = 17 \text{ mm}$:

$$\omega \approx \sqrt{\gamma k^3 / \rho} \Rightarrow v_f = \sqrt{\gamma k / \rho}, \quad v_g = \frac{3}{2} \sqrt{\gamma k / \rho} = \frac{3}{2} v_f$$

\Rightarrow bølgetoppene går langsommere enn bølgepakken

Se notat og filmer på hjemmesiden.

Matlab-animasjoner:

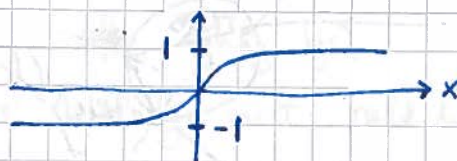
bølgepakke 2. m

bølgepakke mange. m

- Tyngdebølger, på dypt og grunt vann:

$$\omega(k; D) = \sqrt{gk \tanh(kD)}; \quad D = \text{dybden}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



$$|x| \ll 1: \quad \tanh x \approx x$$

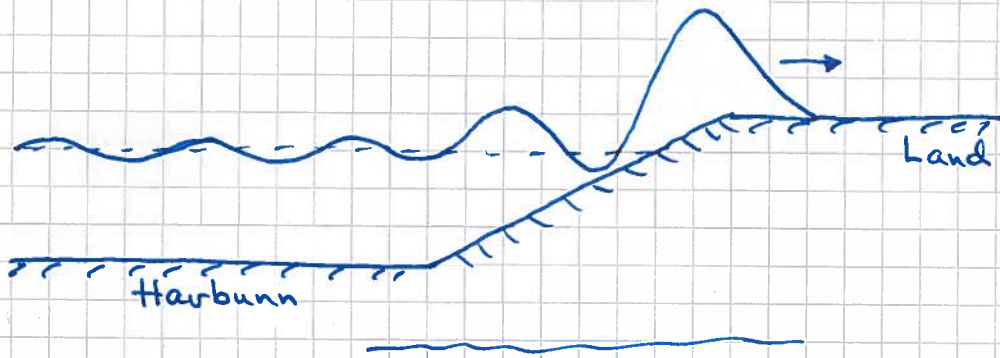
$$x \gg 1: \quad \tanh x \approx 1$$

Dypt vann : $kD = 2\pi D/\lambda \gg 1 \Rightarrow \omega(k) \approx \sqrt{gk}$

Grunt vann : $kD = 2\pi D/\lambda \ll 1$

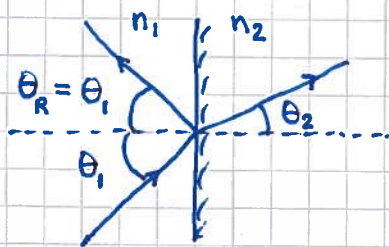
$\Rightarrow \omega(k) = \sqrt{gk \cdot kD} = \sqrt{gD} \cdot k \Rightarrow \underline{v_g (= v_f) = \sqrt{gD}}$

Tsunami : Jordskjelv på havbunnen gir overflatebølger med λ opp mot 100 km og mer. Da er $D \ll \lambda$ overalt, og vi har $v_g = \sqrt{gD}$, som avtar med dybden D inn mot land. Med plane bølger og konstant intensitet $I = \bar{E} \cdot v_g$ vil energitettheten \bar{E} , og dermed amplituden ξ_0 , øke, siden bølgefarten v_g avtar :



- EM-bølger : $v = c/n$; $n =$ brytningsindeksen ; $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s
- Luft (\approx vakuum) : $n \approx 1.0$ Vann : $n \approx 1.34$ Glass : $n \approx 1.52$

Geometrisk optikk:



Reflektert stråle : $\theta_R = \theta_i$

Snells lov : $\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$

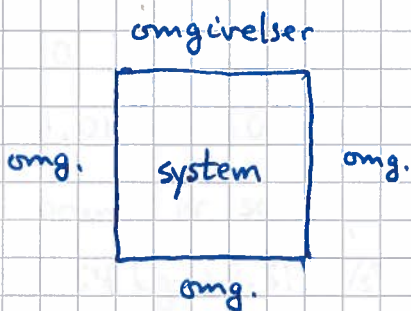
For vann, glass osv øker n med frekvensen for synlig lys, dvs $n(\text{blått}) > n(\text{rødt})$. Dermed brytes blått lys mest, rødt lys minst, når hvitt lys (f.eks. sollys) går fra luft inn i (f.eks) vanndråper.

Gir regnbue!



\Rightarrow Rødt øverst
Blått nederst

System og omgivelser



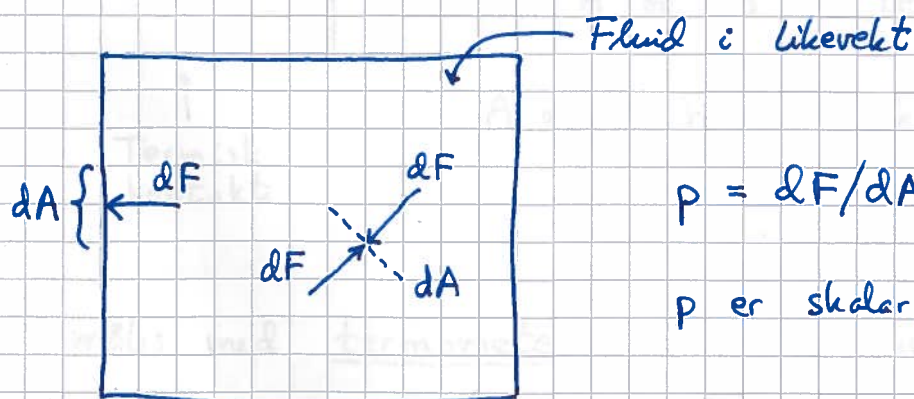
Et system kan utveksle energi og/eller masse med omgivelsene.

Kaffekopp: Utveksler energi (varme) og masse (molekyler) med omgiv. Dvs, termisk kontakt og materielt åpent.

Termos: Termisk isolert og materielt lukket.
(m/lukk)

Sentrale størrelser er trykk og temperatur.

Trykk [YF 11.4, 12.2, 12.3 ; LL 7.2, 8.1-8.4]



$$p = dF/dA = \text{trykket i fluidet}$$

p er skalar og isotrop

$$\vec{dF} = -p d\vec{A} = -p dA \hat{n}$$

Enheter:

$$SI: [p] = N/m^2 = Pa \text{ (pascal)}$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ atm} = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} \approx 1 \text{ bar} \text{ (= normalt lufttrykk)}$$

$$1 \text{ psi} = \text{pound pr square inch}$$

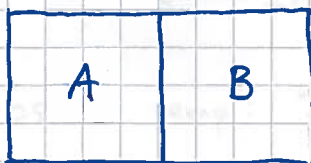
$$= 0.454 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 / (25.4 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 \approx 6.9 \text{ kPa}$$

Partialtrykk: I en blanding av ulike molekyler bidrar hver type med hvert sitt $\frac{1}{2}$ partialtrykk.

Eks: Luft = $N_2, O_2, CO_2, H_2O, \dots$

$$P = P_{N_2} + P_{O_2} + P_{CO_2} + P_{H_2O} + \dots$$

Temperatur og termisk likevekt [YF 17.1; LHL 13.1]



Termisk kontakt

Hvis netto energistrøm mellom A og B er null, er A og B i termisk likevekt.

A og B har da lik temperatur: $T_A = T_B$

T måles med termometer. Diverse fysiske størrelser endrer seg når T endres, f.eks:

- væskevolum
- gasstrykk
- lengde / volum av faste stoffer
- elektrisk motstand (øker med økende T i metall, avtar i halvleder)

Enhet og kalibrering:

91

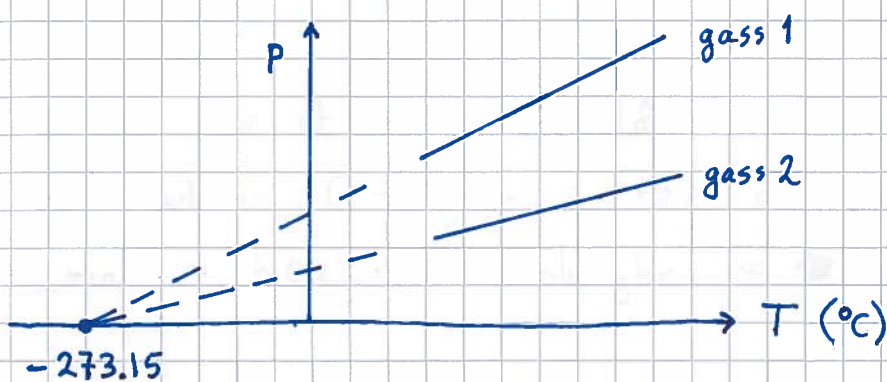
Celsius-skalaen:

$T = 0^\circ\text{C}$: H_2O fryser ved trykk 1 atm

$T = 100^\circ\text{C}$: H_2O koker ——— " ———

Absolutt temperatur:

Hold volumet V konstant og mål $p(T)$ for ulike gasser med lav tetthet. Resultat:



Dvs: p øker lineært med T , og ekstrapolert blir $p=0$ ved -273.15°C for alle gassene

Absolutt temp: $T = 0\text{K} \hat{=} -273.15^\circ\text{C}$; $\Delta T = 1\text{K} \hat{=} \Delta T = 1^\circ\text{C}$

Dvs, H_2O fryser ved 273.15K , koker ved 373.15K ($v/p=1\text{atm}$)

Trippelpunktet for H_2O :

Is, vann og damp i samtidig termisk likevekt.

Inntreffer (kun) ved $T_t = 273.16\text{K} = 0.01^\circ\text{C}$ og damptrykk (dvs: partialtrykket til H_2O) $p_t = 612\text{Pa}$.

Brukt som standard referanse siden 1954.

Tilstandsligning for ideell gass [YF 18.1 ; LHL 13.3]

92

Exp. med gasser (med lav tetthet) gir

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Ideell gass tilstandsligning

Tilstandsvariable :

$$\left. \begin{array}{l} p = \text{trykk} \quad (\text{Pa} = \text{N/m}^2 = \text{J/m}^3) \\ T = \text{temperatur} \quad (\text{K}) \\ V = \text{volum} \quad (\text{m}^3) \\ n = \text{stoffmengde} \quad (\text{mol}) \end{array} \right\}$$

1 mol av et stoff inneholder like mange molekylar (evt. atomer) som det er C-atomer i 12g av isotopen ^{12}C .

$$1 \text{ mol} \approx 6.022 \cdot 10^{23} \text{ molekylar} \approx 6 \cdot 10^{23} \text{ molekylar}$$

$$\text{Avogadros tall: } N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$$

$$\text{Gasskonstanten: } R \approx 8.314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$$

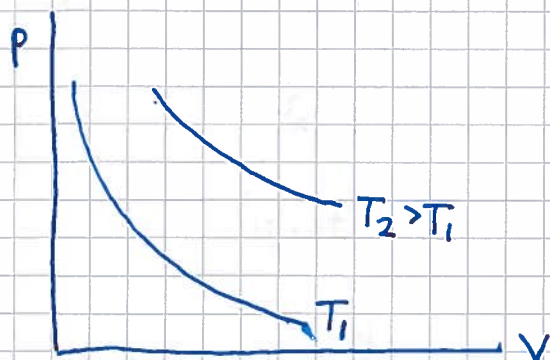
$$\text{Antall molekylar i } n \text{ mol: } N = n \cdot N_A$$

$$\Rightarrow pV = \frac{N}{N_A} RT = N k_B T$$

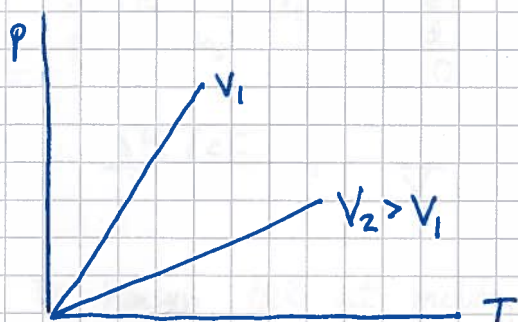
$$\text{Boltzmanns konstant: } k_B = \frac{R}{N_A} = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

Med gitt stoffmengde n blir p , V og T funksjoner av "de to andre". Framstilles grafisk som regel med en tilstandsvariabel holdt konstant.

$$p(V, T) = \frac{nRT}{V}$$

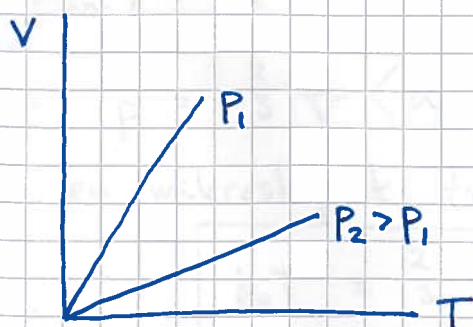


Isothermer : $T = \text{konst.}$



Isokorer : $V = \text{konst.}$

$$V(p, T) = \frac{nRT}{p}$$



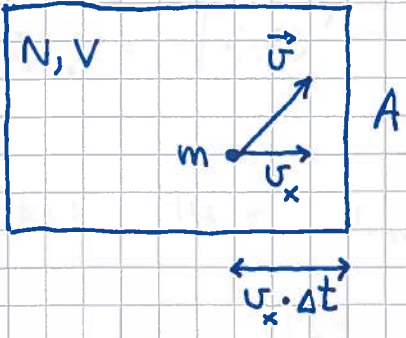
Isobarer : $p = \text{konst.}$

Mikroskopisk tolkning av gasstrykk og temperatur

[YF 18.3; LHL 14.1]

("Kinetisk gassteori")

Antar gass med lav tetthet, isotrope (retningsuavhengige) forhold, samt elastiske kollisjoner mot beholderens vegg.



$$p = F_x / A = \text{gasstrykket}$$

N2: $F_x = \Delta P_x / \Delta t$ der $\Delta P_x = \text{impuls}$ overført fra molekylene til vegg (areal A) i løpet av tid Δt

$$\Delta P_x = \underbrace{2m v_x}_{\text{overført impuls pr molekyl}} \cdot \underbrace{\frac{N}{2}}_{\text{antall med } v_x > 0} \cdot \underbrace{\frac{A \cdot v_x \cdot \Delta t}{V}}_{\text{andel som treffer høyre vegg i løpet av } \Delta t}$$

$$\Rightarrow p = \frac{\Delta P_x / \Delta t}{A} = \frac{N}{V} \cdot m v_x^2$$

Må ta hensyn til at molekylene har en isotrop fordeling av hastigheter:

$$v_x^2 \rightarrow \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle, \text{ fordi } v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \text{ og } \langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$$

$\langle v^2 \rangle = \text{middelverdien av } v^2 \text{ for de } N \text{ molekylene}$

$$\langle K_{\text{trans}} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \text{midlere transkjisjonsenergi pr molekyl}$$

$$\Rightarrow p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle K_{\text{trans}} \rangle, \text{ og sammenligning med } pV = Nk_B T$$

gir en mikroskopisk tolkning av absolutt temperatur:

$$\boxed{k_B T = \frac{2}{3} \langle K_{\text{trans}} \rangle}$$

ders T er et direkte mål for gassmolekylenes midlere transkjisjonsenergi, $\langle K_{\text{trans}} \rangle = \frac{3}{2} k_B T$

Molekylenes midlere hastigheter:

Pga symmetri (isotropi!) er $\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0$

$$\langle v^2 \rangle = 3k_B T / m$$

RMS-hastigheten (Root Mean Square):

$$v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3k_B T / m}$$

Eks: Hva er v_{rms} for CO_2 -molekyler i luft ved $-20^\circ C$?

Løsn: $m = (12 + 2 \cdot 16) \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \approx 7.3 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$

$$\Rightarrow v_{rms} = \sqrt{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 253 / 7.3 \cdot 10^{-26}} \text{ m/s} \approx \underline{379 \text{ m/s}}$$

Termodynamiske koeffisienter [YF 17.4; LHL 13.2]

Lineær utvidelseskoeff. (faste stoffer)

$$\alpha = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta L / L}{\Delta T} \right\}_{p = \text{konst}} = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_p$$

Eks: Stål, $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Kan gi salslyng om sommeren hvis jernbaneskiner ikke legges med nok mellomrom

Volumutvid.koeff.

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad ; \quad \beta = 3\alpha \text{ for faste stoffer (siden } V = L^3)$$

Eks 1: $\beta(\text{glass}) = 2.7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $\beta(\text{etanol}) \approx 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

slk at spritsøylen stiger når T øker

Eks 2: $\beta(H_2O) < 0$ mellom $0^\circ C$ og $4^\circ C \Rightarrow$ størst massefylte ved $4^\circ C$

\Rightarrow innsjøer bunnfryser (som regel) ikke

Isoterm kompressibilitet:

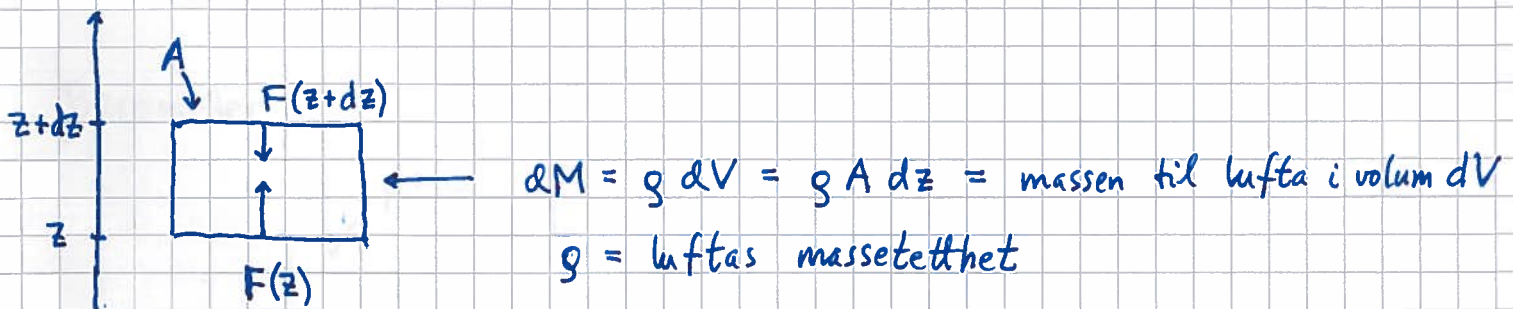
$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{B} ; \quad B = \text{isoterm bulkmodul}$$

Trykk-koeff:

$$\gamma = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

Vi ser at alle slike koeff. måles ved å måle sammenhørende endringer i to termodyn. størrelser.

Trykkvariasjon i atmosfæren (og i fluider generelt)



dM er i likevekt når $F(z) = F(z+dz) + dM \cdot g$

$$F(z) = p(z) \cdot A, \quad F(z+dz) = p(z+dz) \cdot A$$

$$dp = p(z+dz) - p(z) = -\frac{dM \cdot g}{A} = -\rho g dz$$

$$\rho = \langle m \rangle \cdot N/V ; \quad \text{luft: } \langle m \rangle \approx 29 \text{ g/mol} \approx 4.8 \cdot 10^{-26} \text{ kg/molekyl}$$

$$pV = Nk_B T \Rightarrow \frac{N}{V} = \frac{p}{k_B T} \Rightarrow \rho = \frac{\langle m \rangle p}{k_B T}$$

$$\Rightarrow dp = -\frac{\langle m \rangle p g dz}{k_B T}$$

$$\Rightarrow \int_{p(0)}^{p(z)} \frac{dp}{p} = -\int_0^z \frac{\langle m \rangle g}{k_B T} dz$$

Her vil ρ og T variere med z (i store høyder, se øv. 10).

(97)

Antar ρ og T konstante og finner

$$p(z) = p(0) \exp(-z/H) \quad ; \quad H = \frac{k_B T}{\langle m \rangle g} \approx 7.6 \text{ km} \quad \left(\begin{array}{l} \text{med} \\ T = 260 \text{ K} \end{array} \right)$$

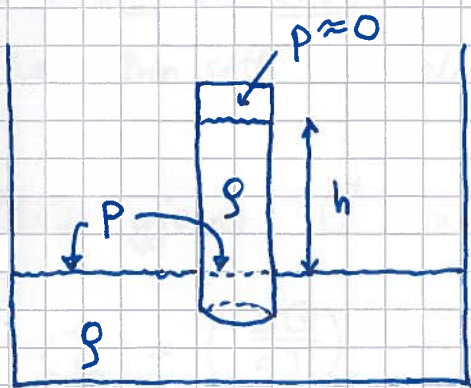


Enklere med væske med $\rho = \text{konst}$:

$$\Delta p = -\rho g \Delta z$$

Δz = høydeforskjellen på væskesøylen

Barometer:



$$h = p / \rho g$$

Hg (kvikksølv): $\rho = 13.6 \text{ g/cm}^3$

$$p = 1 \text{ atm} \hat{=} h = 760 \text{ mm Hg}$$

Vann: $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$

$$p = 1 \text{ atm} \hat{=} h = 10.3 \text{ m H}_2\text{O}$$

Varme og varmekapasitet [YF 17.5; LHL 13.2]

Varme $\stackrel{\text{def}}{=}$ energi som overføres pga temperaturforskjell

Arbeid = andre former for energioverføring

Varmekapasitet = $\frac{\text{tilført varme}}{\text{temperaturøkning}}$

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

Dvs: Et system med stor varmekapasitet C kan motta (og avgir) mye varmeenergi ΔQ uten at temperaturen endres særlig mye (liten ΔT).

Et varmereservoar avgir/mottar varme uten at T endres; har sånn sett uendelig stor varmekapasitet.

Måler gjerne C med p eller V holdt konstant:

$$C_p = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_p ; \quad C_v = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_v$$

Enhet: $[C] = \text{J/K}$

Molar varmekap.: $c_m = C/n$ (J/mol·K)

Pr masseenhet: $c = C/M$ (J/kg·K)

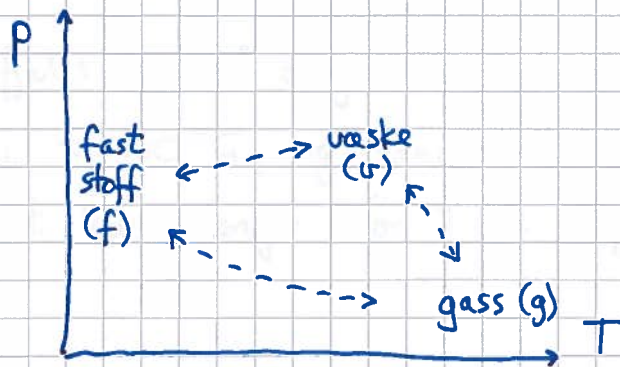
1 cal (kalori) = varmen som øker T fra 14.5°C til 15.5°C
i 1g H_2O ved $p = 1 \text{ atm}$
= 4.184 J

(dvs $c_p = 4.184 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ ved 1 atm og $\approx 15^\circ\text{C}$)

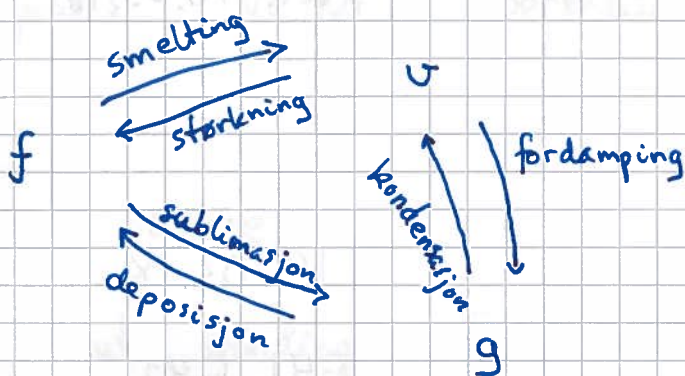
Faseoverganger og latent varme

[YF 17.6, 18.6 ; LHL 13.2, 17.10]

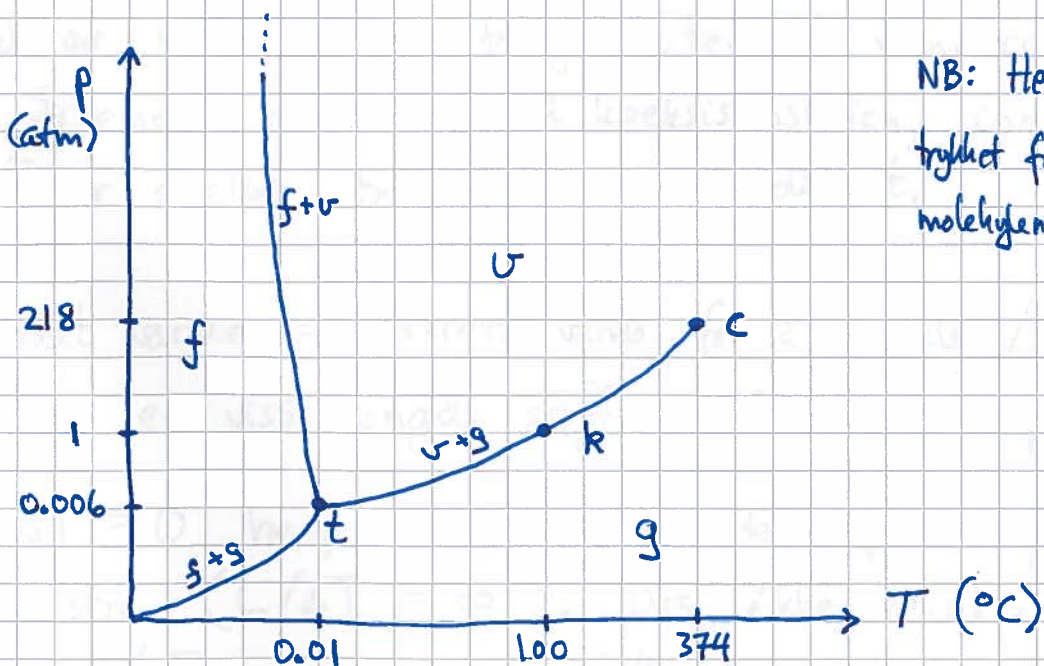
pT - diagram, kvalitativt:



Markerer de ulike faseovergangene med koeksistenslinjer:



H₂O:



NB: Her er p trykket fra H₂O-molekylene.

Koeksistenslinjer (f+v, v+g, f+g): I o fasar i likevekt.
 Trippepunktet (t): Alle 3 fasar i samtidig likevekt.

Kokepunktet (k): Her er damptrykket lik det omgivende trykket, som regel ca 1 atm. Hvis $T > T_k$ inne i væsken, omdannes væske til gass. Vi får gassbobler, og væsken koker. (100)

Høyt til fjells er det omgivende trykket lavere enn ved havnivå. Da er $T_k < 100^\circ\text{C}$, og vannet koker ved lavere temp. enn 100°C . Da må egget kokes lenger for å bli "passé kokt"!

Kritisk punkt (c): Væske/gass koeksistenslinjen ender her. Hvis $p > p_c$ og $T > T_c$, er det ingen forskjell på væske og gass! Vi har et superkritisk fluid.

Latent varme:

Vi må bryte bindinger for å smelte fast stoff eller fordampe væske, eller sublimere fast stoff. Dette krever tilførsel av varme, men foregår uten at temperaturen øker. Systemet holder seg på koeksistenslinjen, inntil alt stoff er smeltet, fordampet eller sublimeret.

L = latent varme = påkrevd varme for å smelte / fordampe / sublimere en viss mengde stoff, ved en gitt temp. T .

Siden $\Delta T = 0$ her, er varmekapasiteten på ~~sett~~ og vis uendelig stor ($L/\Delta T = \infty$). Dvs, ikke hensiktsmessig å bruke $L/\Delta T$, men rett og slett L .

H₂O, i nærheten av trippelpunktet:

(101)

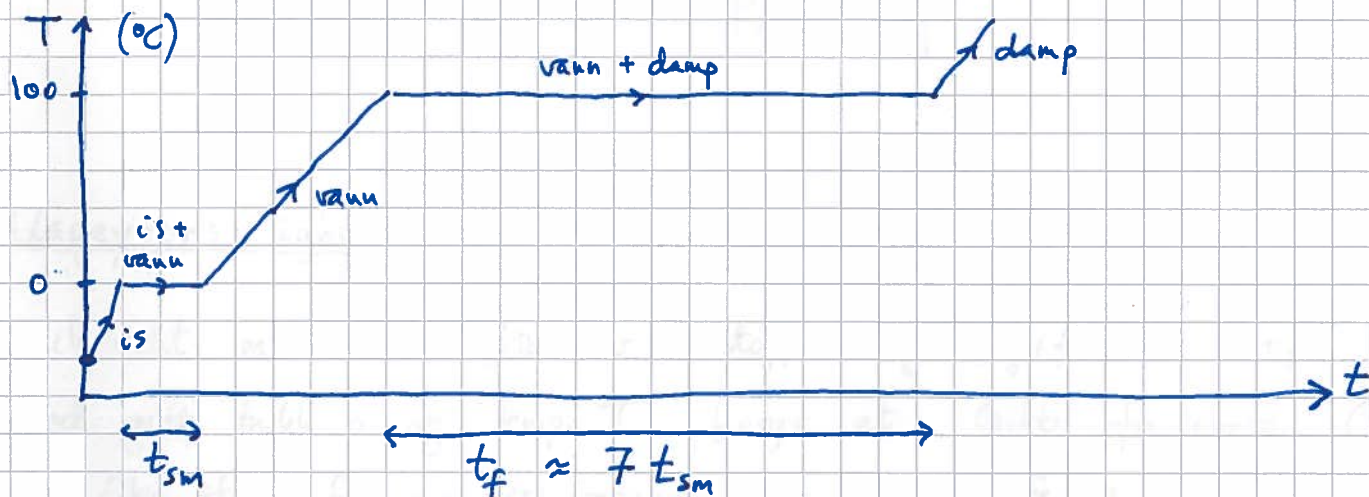
$$L_{sm} \approx 80 \text{ cal/g}, L_f \approx 600 \text{ cal/g}, L_{sub} \approx 680 \text{ cal/g}$$

ders $L_{sub} \approx L_{sm} + L_f$; ikke urimelig!

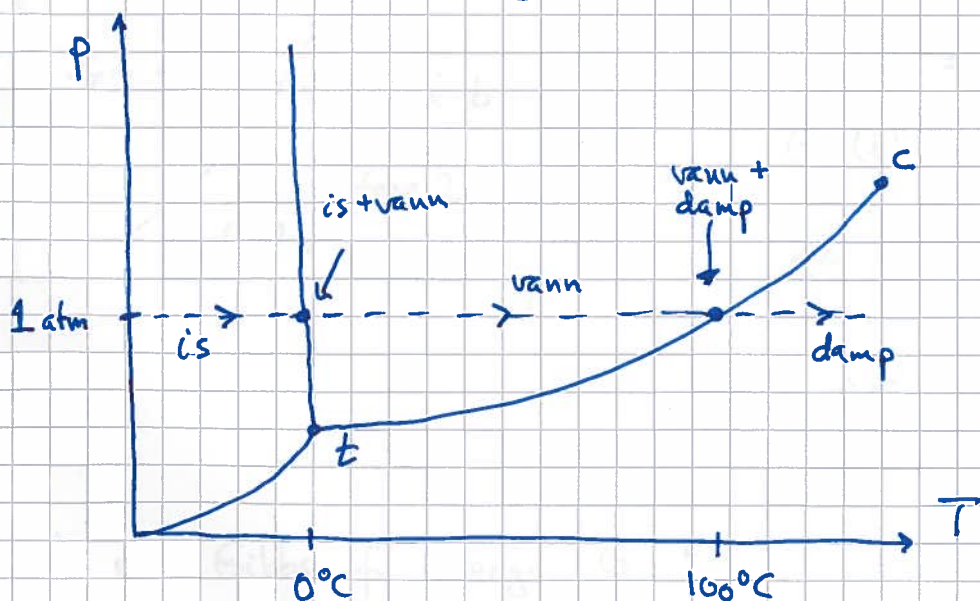
$$\text{Ved 1 atm: } L_f \approx 540 \text{ cal/g}$$

Når $T \rightarrow T_c$: $L_f \rightarrow 0$ (fordi væske og gass er "det samme" når vi passerer kritisk punkt)

Med konstant tilførsel av varmeeffekt:



Proessen i et pT-diagram:



Damptrykk: P_d = partialtrykket til H_2O i termodynamisk likevekt med vann ($T > T_z = 0.01^\circ C$) eller snø/is ($T < T_z$), dvs på $v+g$ eller $f+g$ koeksistenslinjen.

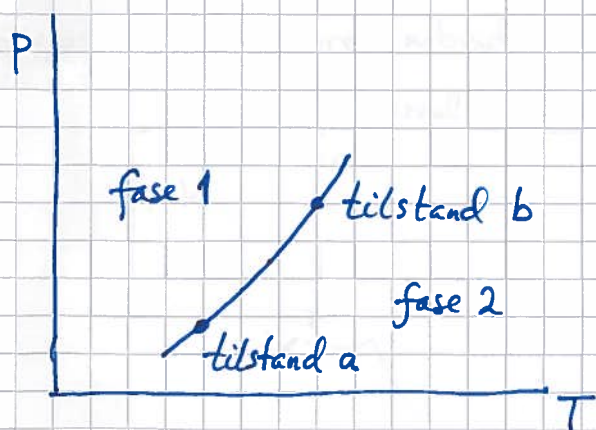
Dvs P_d = max partialtrykk av H_2O ved aktuell T
= metningstrykket; lufta er mettet med vanndamp

Hvis $P_{H_2O} < P_d$ har lufta relativ luftfuktighet

$$\Phi = 100\% \cdot P_{H_2O} / P_d$$

Clapeyrons ligning og damptrykk-kurven

Likevekt mellom to faser av et stoff ($g+v$, $g+f$ eller $v+f$) ved gitt trykk p og temp. T betyr at Gibbs fri energi G er like stor for en viss mengde av de to fasene.



$$G_1(a) = G_2(a)$$

$$G_1(b) = G_2(b)$$

$$dG = G(b) - G(a)$$

$$\Rightarrow dG_1 = dG_2$$

Hva er Gibbs fri energi G ?

$$G = U + pV - TS$$

Her er

U = indre energi = molekylene's totale kinetiske og potensielle energi (hvis ideell gass: kun kinetisk energi)

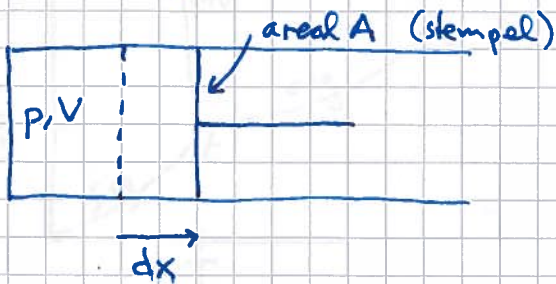
S = stoffets entropi; $\Delta S \stackrel{\text{def}}{=} \Delta Q/T$, dvs systemets entropi øker når varme tilføres ($\Delta Q > 0$); ved en faseovergang er $\Delta Q = L =$ latent varme

Forskjellen i G mellom de to tilstandene a og b (på koeksistenslinjen) kan uttrykkes ved forskjellene i U, p, V, T og S :

$$dG = dU + p dV + V dp - T dS - S dT$$

Energibevarelse: $dQ = dU + dW$, dvs varmen tilført et system, dQ , går med til å øke systemets indre energi, dU , samt til arbeidet dW som systemet utfører på omgivelsene. (Dette er termodyn. 1. lov!)

En gass kan utføre arbeid ved å utvide seg:



$$dW = F dx = p A \frac{dV}{A} = p dV$$

Fra $dS = dQ/T$ følger $dQ = T dS$, slik at energibevarelse kan uttrykkes

$$T dS = dU + p dV$$

Dermed:

$$dG = V dp - S dT$$

Langs en koeksistenslinje endrer G seg like mye for de to fasene : $dG_1 = dG_2$

$$\Rightarrow V_1 dp - S_1 dT = V_2 dp - S_2 dT$$

$$\Rightarrow (V_1 - V_2) dp = (S_1 - S_2) dT$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dT} = \frac{S_1 - S_2}{V_1 - V_2} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L}{T \Delta V}} \quad \text{Clapeyrons ligning}$$

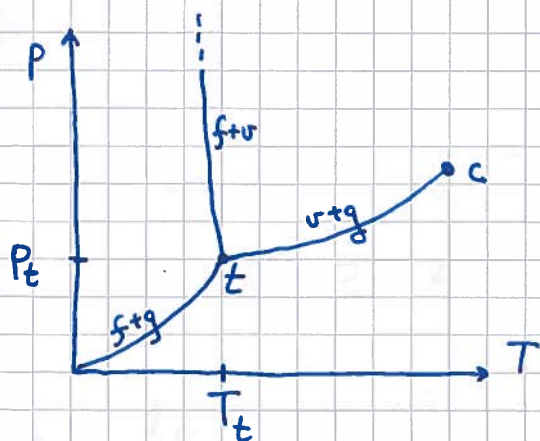
Dvs: Stigningstallet, dp/dT , til koeksistenslinjene er bestemt av den latente varmen L i faseovergangen og volumendringen ΔV i faseovergangen. (og temp. T)

Når is smelter : $\Delta V = V_v - V_f < 0$

$$T > 0$$

$$L = L_{sm} > 0$$

$$\Rightarrow dp/dT < 0 \quad \text{for is/vann - koeksistenslinjen}$$



På is/damp og vann/damp koeks.linjene :

$$\Delta V = V_g - V \approx V_g \quad (\text{da } V_f \ll V_g \text{ og } V_v \ll V_g)$$

Anta videre ideell gass for vandampen: $V_g = nRT/p_a$

Anta også at $L = n \cdot l$ er uavh. av T ($l = \text{molar latent varme}$)

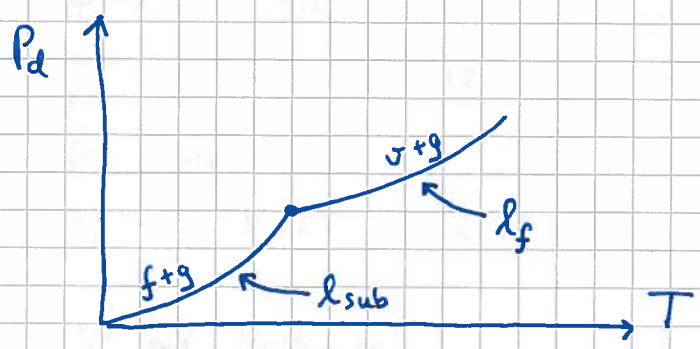
Kan vi beregne damptrykk-kurvene $P_d(T)$:

$$\frac{dp_d}{dT} = \frac{L}{T\Delta V} = \frac{n\ell}{T \cdot nRT/p_d} = P_d \cdot \frac{\ell}{RT^2}$$

$\Rightarrow \int_{P_t}^{P_d} \frac{dp_d}{P_d} = \frac{\ell}{R} \int_{T_t}^T \frac{dT}{T^2}$; der vi velger trippelpunktet som referanse, $T_t = 273.16 \text{ K}$, $P_t = 612 \text{ Pa}$

$$\Rightarrow \ln \left\{ \frac{P_d}{P_t} \right\} = \frac{\ell}{R} \left\{ \frac{1}{T_t} - \frac{1}{T} \right\}$$

$\Rightarrow P_d(T) = P_t \cdot \exp \left\{ \frac{\ell}{R} \left(\frac{1}{T_t} - \frac{1}{T} \right) \right\}$ Damptrykk-kurven(e)



$T < T_t$: $l_{sub} = 678 \frac{\text{cal}}{\text{g}} = 0.678 \frac{\text{kcal}}{\text{g}} \cdot 4.184 \frac{\text{kJ}}{\text{kcal}} \cdot 18 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$
 $\approx 51 \text{ kJ/mol}$

$T > T_t$: $l_f = 598 \frac{\text{cal}}{\text{g}} = \dots = 45 \text{ kJ/mol}$

Eks: Beskern relativ luftfuktighet i luft som er mettet med vann damp ved -5°C , etter oppvarming til $+22^{\circ}\text{C}$.
 Hvor mye vann må nå fordampe for å oppnå $\phi = 50\%$ i et rom på 10 m^2 ?

Løsn: $p_{\text{H}_2\text{O}} = p_d(268\text{ K}) = p_t \exp\left\{\frac{l_{\text{sub}}}{R}\left(\frac{1}{T_t} - \frac{1}{268}\right)\right\} = 0.649 p_t$

$p_d(295\text{ K}) = p_t \exp\left\{\frac{l_f}{R}\left(\frac{1}{T_t} - \frac{1}{295}\right)\right\} = 4.336 p_t$

$\Rightarrow \phi = 100\% \cdot 0.649 / 4.336 = \underline{\underline{15\%}}$

mol H_2O nå ($V = 10\text{ m}^2 \cdot 2.40\text{ m} = 24\text{ m}^3$):

$n_0 = p_{\text{H}_2\text{O}} V / RT = 0.649 \cdot 612\text{ Pa} \cdot 24\text{ m}^3 / 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 295\text{ K} = 3.89\text{ mol}$

$\phi = 50\%$ tilsvarer partialtrykk

$p_1 = 0.50 \cdot 4.336 \cdot 612\text{ Pa} = 1327\text{ Pa}$

som tilsvarer

$n_1 = p_1 V / RT = 12.98\text{ mol}$

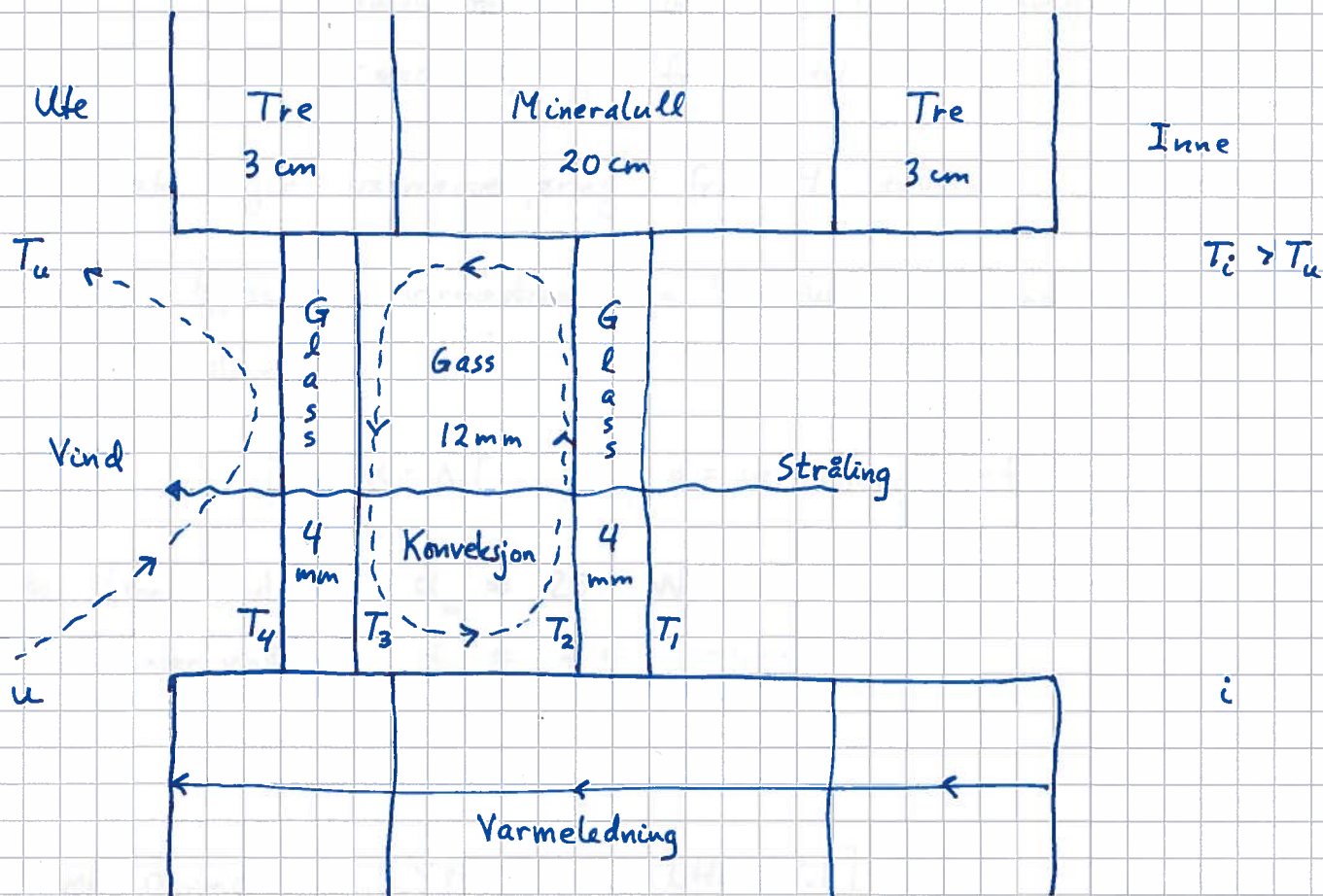
Vi må fordampe

$\Delta n = n_1 - n_0 = 9.09\text{ mol}$

dvs

$m = 9.09\text{ mol} \cdot 18\text{ g/mol} = 164\text{ g} \approx \underline{\underline{1.6\text{ dL}}}$

Husvegg med dobbeltvindu :



Mekanismer for varmeoverføring :

- Konveksjon : Strømning av luft gir varmeoverføring
- Varmeledning : Forplantning av kinetisk energi på mikroskopisk nivå
- Stråling : Objekt med temp. T sender ut energi i form av elektromagnetiske bølger

Varmestrømtetthet = overført varme pr tidsenhet og flateenhet

$$[j] = \text{W/m}^2$$

Konveksjon [YF 17.7; LHL 18.2]

108

$T_2 > T_3 \Rightarrow$ gassen utvider seg og stiger ved 2; avkjøles og trekkes seg sammen og faller ved 3; dvs sirkulasjon og netto varmeoverføring fra 2 til 3

Vind ute gir varmeoverføring fra 4 til u.

En antar typisk at varmestrøm pga konveksjon er prop. med temp. forskjellen:

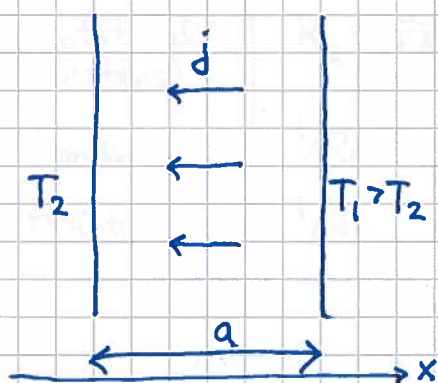
$$j = \alpha \cdot \Delta T ; \quad \alpha = \text{varmeovergangstall}$$

Ute (med vind): $\alpha_u \approx 25 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ (5-6 m/s)

Inne (uten vind): $\alpha_i \approx 7,5$ —" —

Varmeledning [YF 17.7; LHL 18.1]

Ser på stasjonære (tidsuavhengige) forhold i en dimensjon:



- Materiale med tykkelse a (glass, tre, "glava" etc)
- Faste temperaturer T_2 og $T_1 > T_2$ på hver side
- Exp. gir $j \sim \frac{\Delta T}{a}$, som ventet

• Må ha j uavh. av x : I motsatt fall blir det en netto varmestrøm inn i eller ut av tynn skive mellom x og $x+dx$, og T endres der.

• Med j uavh. av x blir $\Delta T/a = dT/dx$, slik at

$$j = -\kappa \frac{\Delta T}{a} = -\kappa \frac{dT}{dx}$$

Fouriers lov; $\kappa =$ materialets varmeledningsevne
[κ] = W/K·m (3D: $\vec{j} = -\kappa \nabla T$)

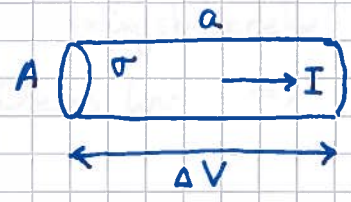
Stoff	Luft	Glava	Vann	Is	Glass	Tre	Stal
λ (W/K·m)	0.026	0.035	0.61	2.2	0.7-1.1	0.1-0.2	43

(Nysnø: 0.06-0.11. Groukornet snø: 0.4-0.5)

Har perfekt analogi mellom Fourniers lov og Ohms lov:

Elektrisk motstand:

$j = I/A, j = \sigma E$ (Ohms lov), $E = \Delta V/a$

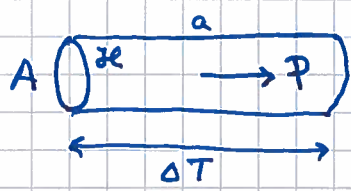


$\Rightarrow \Delta V = I \cdot R; R = \frac{a}{\sigma A}; [R] = \frac{V}{A} = \Omega$

(σ = elektrisk ledningsevne = konduktivitet)

Varmemotstand:

$j = P/A, j = \lambda \Delta T/a$



$\Rightarrow \Delta T = P \cdot R_Q; R_Q = \frac{a}{\lambda A}; [R_Q] = \frac{K}{W}$

	Fourniers lov	Ohms lov
årsak	ΔT (K)	ΔV (V)
strøm	P (J/s = W)	I (C/s = A)
motstand (resistans)	$R_Q = \frac{a}{\lambda A}$ (K/W)	$R = \frac{a}{\sigma A}$ (V/A = Ω)
konduktans	$1/R_Q = \frac{\lambda A}{a}$ (W/K)	$1/R = \frac{\sigma A}{a}$ (A/V = $\Omega^{-1} = S$)
resistivitet	$1/\lambda$ (K·m/W)	$1/\sigma = \rho$ ($\Omega^{-1} m^{-1} = S/m$)

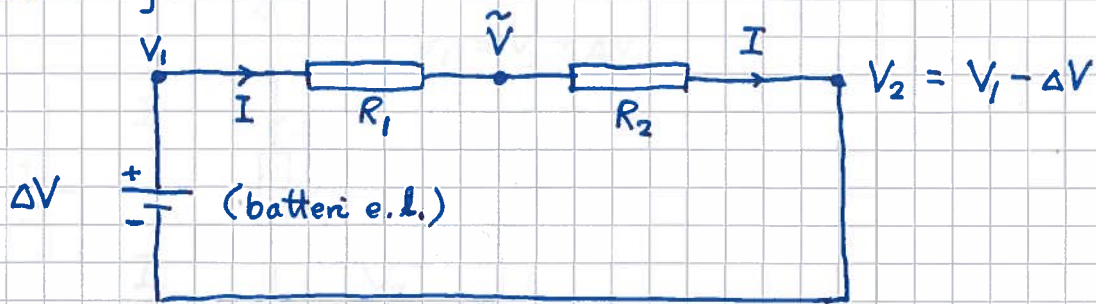
(V = volt, A = ampere, Ω = ohm, S = siemens)

(E = elektrisk feltstyrke, ΔV = spenning)

Vi må ha samme regler for serie- og parallellkobling av varmemotstander som av elektriske motstander.

Seniekobling:

(110)

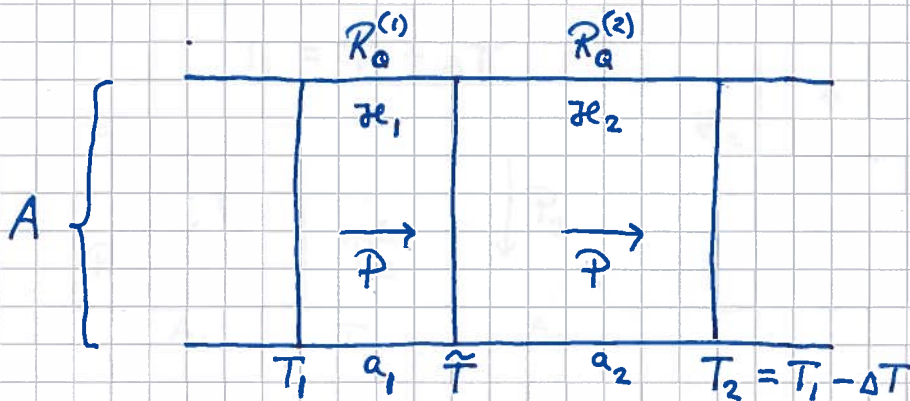


Ladningsbevarelse \Rightarrow samme strøm I gjennom R_1 og R_2

$$\text{Ohms lov} \Rightarrow V_1 - \tilde{V} = R_1 I$$

$$\tilde{V} - V_2 = R_2 I$$

$$\Rightarrow \Delta V = V_1 - V_2 = (R_1 + R_2) I \Rightarrow R = R_1 + R_2$$



Energibevarelse \Rightarrow samme varmestrøm P gjennom begge lag

$$\text{Fouriers lov} \Rightarrow T_1 - \tilde{T} = R_a^{(1)} P$$

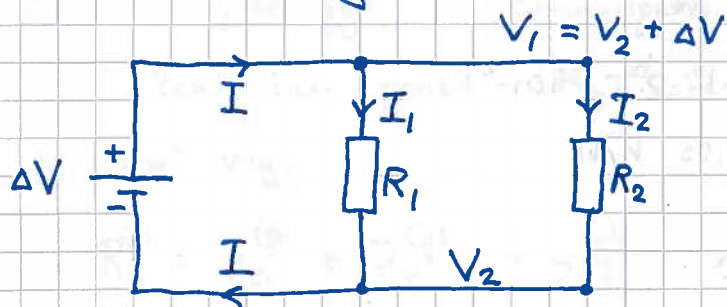
$$\tilde{T} - T_2 = R_a^{(2)} P$$

$$\Rightarrow \Delta T = T_1 - T_2 = (R_a^{(1)} + R_a^{(2)}) P$$

$$\Rightarrow R_a = R_a^{(1)} + R_a^{(2)}$$

Parallellkobling:

(111)

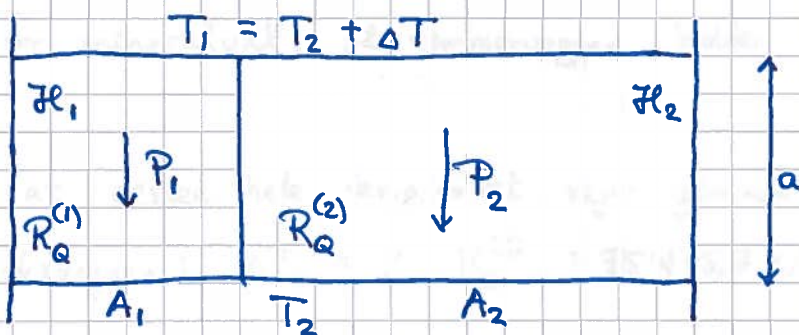


Samme spenning ΔV over R_1 og R_2 og Ohms lov

$$\Rightarrow \Delta V = R_1 I_1 = R_2 I_2$$

Ladningsbevarelse $\Rightarrow I = I_1 + I_2 = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} = \frac{\Delta V}{R}$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad ; \quad R = \text{total motstand}$$



Samme ΔT over begge lag og Fourniers lov

$$\Rightarrow \Delta T = R_Q^{(1)} P_1 = R_Q^{(2)} P_2$$

Energibevarelse $\Rightarrow P = P_1 + P_2 = \frac{\Delta T}{R_Q^{(1)}} + \frac{\Delta T}{R_Q^{(2)}} = \frac{\Delta T}{R_Q}$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_Q} = \frac{1}{R_Q^{(1)}} + \frac{1}{R_Q^{(2)}} \quad ; \quad R_Q = \text{total varmemotstand}$$

Eks: Hyttevegg 10-tommers tømmer vs reisverk og glava

Ante 2cm + 2cm panel ($\lambda_p = 0.12 \text{ W/Km}$) + 20cm glava ($\lambda_g = 0.035$)

og 1 m^2 vegg

$$\Rightarrow R_Q^{(r)} = R_Q^{(p)} + R_Q^{(g)} = \frac{0.04}{0.12 \cdot 1} \frac{\text{K}}{\text{W}} + \frac{0.20}{0.035 \cdot 1} \frac{\text{K}}{\text{W}} \approx \left(\frac{1}{3} + \frac{5.7}{1}\right) = 6.0 \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

$$24 \text{ cm tre: } R_Q^{(t)} = \frac{0.24}{0.12 \cdot 1} \frac{\text{K}}{\text{W}} = 2 \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

Effekttap pr m^2 vegg med $\Delta T = 30 \text{ K}$ (20°C inne, -10°C ute)

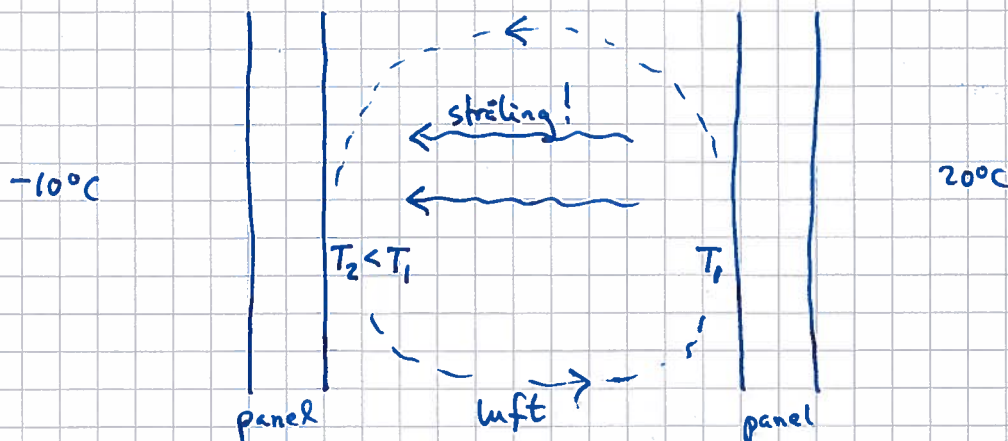
$$P_r = \Delta T / R_Q^{(r)} \approx \frac{5}{1} \text{ W} ; P_t = \Delta T / R_Q^{(t)} = 15 \text{ W}$$

(En fordel med tømmer vs reisverk: Større varmekapasitet for tre enn for mineralull, så tømmerveggen holder lengst på varmen.)

- Merk at nesten hele temp. fallet skjer gjennom isolasjonslaget i reisverksveggen: $\Delta T_g = P_r \cdot R_Q^{(g)} = 5 \text{ W} \cdot 5.7 \text{ K/W} = 28.5 \text{ K}$

- Hvorfor ikke bare luft i stedet for glava? ($\lambda_{\text{luft}} < \lambda_{\text{glava}}!$)

Får da økt varmetap pga konveksjon og stråling:



Stråling [YF 17.7; LHL 18.4]

(113)

- System med temp. T har akselererte ladninger; disse sender da ut (emitterer) e.l. magn. bølger, dvs E.M. stråling (i følge Maxwells ligninger).
- EM stråling inn mot et system vil enten absorberes, reflekteres eller transmitteres, med andeler hhv a , r og t . Dermed: $a + r + t = 1$.
- Svart legeme: en idealisering; $a = 1$. ($\Rightarrow r = t = 0$)
- Legeme i termisk likevekt ved temp. T må emittere og absorbere like mye strålingsenergi for enhver bølgelengde, dvs $e(\lambda) = a(\lambda)$
 $\Rightarrow e = a = 1$ for et svart legeme
- Stefan-Boltzmanns lov for et svart legeme:

$$j = \sigma T^4; \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} \approx 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$$

Reelt legeme med $e < 1$: $j = e \cdot \sigma T^4$; $e =$ legemets emissivitet
[Eks: Asfalt: $e = 0.93$. Rød murstein: $e = 0.93$. Polert rustfritt stål: $e = 0.075$]

- Max Planck (1900): Stråling med frekvens f har kvantisert energi, $E_n = n \cdot hf$; $n = 0, 1, 2, \dots$; $h \approx 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js (Plancks konstant).

Strålingsenergiens frekvensfordeling dj/df blir da

$$j(T) = \int_0^{\infty} \frac{dj}{df} \cdot df; \quad \frac{dj}{df} = \frac{2\pi h f^3 / c^2}{\exp(hf/k_B T) - 1} \quad \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{Hz}} \right)$$

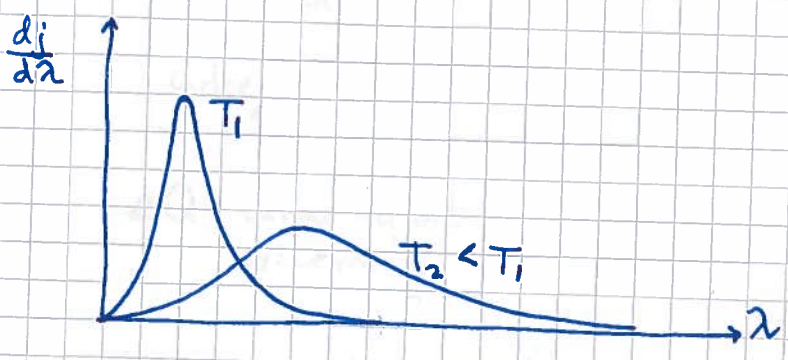
som stemte utmerket med eksperimenter!

- Bølgelengdefordelingen $dj/d\lambda$ blir nå: $f = c/\lambda \Rightarrow df/d\lambda = -c/\lambda^2$
 $\Rightarrow \Delta f = -c d\lambda/\lambda^2$

$$\Rightarrow j(T) = \int_0^{\infty} \frac{2\pi h (c/\lambda)^3 / c^2}{\exp(hc/\lambda k_B T) - 1} \cdot \left(-\frac{c}{\lambda^2} \right) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{dj}{d\lambda} d\lambda \quad \text{med}$$

$$dj/d\lambda = \frac{2\pi h c^2 / \lambda^5}{\exp(hc/\lambda k_B T) - 1} \quad \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{m}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right)$$

- Wiens forskyvningslov : $\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dj}{d\lambda} \right) = 0$ gir maksverdi for $\frac{dj}{d\lambda}$ (for en gitt temp. T) nær $\lambda \cdot T \approx 2.90 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}$.
Tilsvarende har $\frac{dj}{df}$ maksverdi nær $f/T \approx 5.88 \cdot 10^{10} \text{ Hz/K}$



• Eksempler :

- Mørk skyfri himmel har $T \approx 250 \text{ K} \Rightarrow$ maks $\frac{dj}{d\lambda}$ ved ca $12 \mu\text{m}$.
Kan gi så stort strålingstap fra bakkenivå (f.eks. fra frontruta på bilen) at det dannes is, selv med varme grader i lufta.
- Kroppens overflate har $T \approx 303 \text{ K} \Rightarrow \left(\frac{dj}{d\lambda} \right)_{\text{maks}}$ ved ca $10 \mu\text{m}$
- Solas overflate har $T \approx 6 \cdot 10^3 \text{ K} \Rightarrow \left(\frac{dj}{d\lambda} \right)_{\text{maks}}$ ved ca 480 nm (blå-grønt)

U-verdier i byggebransjen

U $\stackrel{\text{def.}}{=}$ varmetap pr m^2 og pr grad temp.forskjell mellom ute og inne

$\Rightarrow j = U \cdot (T_i - T_u)$

Eks : Reisverksveggen s. 112, $j = 5 \text{ W/m}^2$, $\Delta T = 30 \text{ K} \Rightarrow U \approx 0.17 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$

(Byggeforskriftenes krav "Tek10" :

Yttervegg	$U < 0.18$
Tak	$U < 0.13$
Gulv	$U < 0.15$
Vindu	$U < 1.2$

Eks 2: To plan, temp. T_1 og $T_2 = T_1 + \Delta T$; $\Delta T \ll T_1$

$$j = \sigma (T_2^4 - T_1^4)$$

$$= \sigma (T_2^2 + T_1^2) (T_2 + T_1) (T_2 - T_1)$$

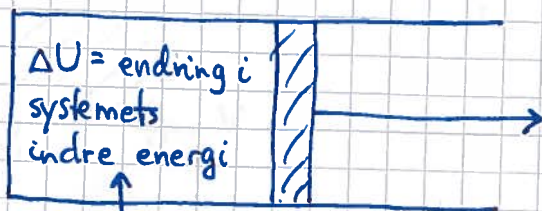
$$\approx 4\sigma T^3 \Delta T \Rightarrow U = 4\sigma T^3$$

$(T = T_1 = T_2)$
 $\approx 5 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$
hvis $T = 280 \text{ K}$

Termodynamikkens 1. lov [YF 19, 20; LHL 15, 13]

(115)

Uttrykker energibevarelse (som allerede nevnt s. 103):

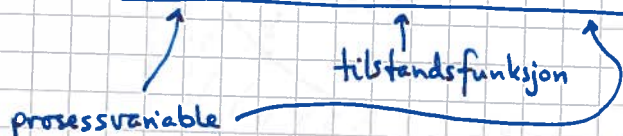


$\Delta W =$ arbeid utført av systemet på omgivelsene

$\Delta Q =$ varme tilført systemet

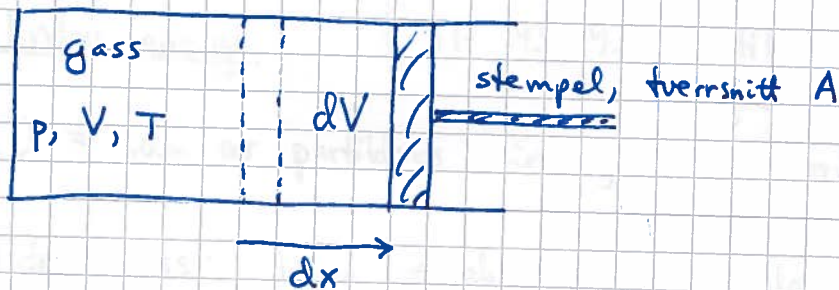
$$\Rightarrow \Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

(evt. $dQ = dU + dW$)



Arbeid [YF 19.2; LHL 13.5] (se s. 103)

Ser på gass som utvider seg mot et ytre trykk p :



Arbeid utført av gassen på omgivelsene når $V \rightarrow V + dV$:

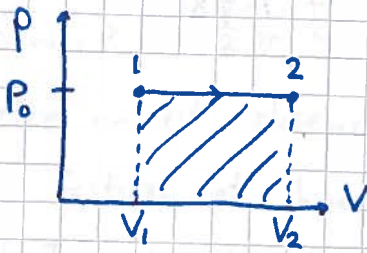
$$\underline{dW} \stackrel{\text{(def)}}{=} F \cdot dx = p \cdot A \cdot \frac{dV}{A} = \underline{p \cdot dV}$$

Merk fortegnet: $dV > 0$ gir $dW > 0$

(TMT 4106 tidlig omvendt!)

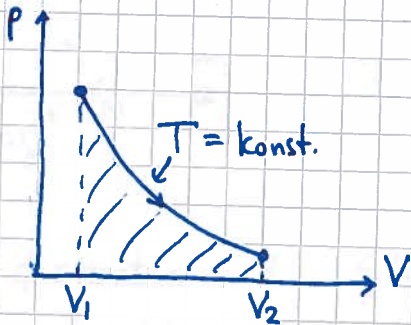
Eks 1: Isobar utvidelse

(116)



$$W = \int_1^2 dW = p_0 \int_{V_1}^{V_2} dV = \underline{p_0 (V_2 - V_1)}$$

Eks 2: Isoterm utvidelse



$$p(V) = Nk_B T / V$$
$$\Rightarrow W = Nk_B T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \underline{Nk_B T \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

Dvs: $W = \text{areal under kurven } p(V)$

Indre energi [YF 19.4, 19.6 ; LHL 13.6] (se s. 103)

$U =$ sum av partikkens kin. og pot. energi

Ideell gass: Ingen vekselvirkninger mellom molekylene

\Rightarrow Ingen pot. energi

$$\Rightarrow U = U(T) = N \cdot \langle K \rangle$$

der $\langle K \rangle =$ midlere kin. energi pr molekyl i gassen

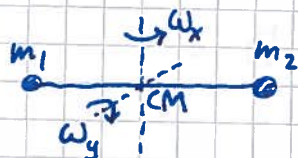
Eks 1: Atomær gass (He, Ne, Ar, ... ; edelgasser)

$$\langle K \rangle = \langle K_{\text{trans}} \rangle = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow \underline{U = \frac{3}{2} N k_B T}$$

$$\langle K_{\text{trans}} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T \quad (\text{s. 94-95})$$

Dette er et eksempel på det mer generelle ekvipartisjonsprinsippet, som fastslår at hvert kvadratiske ledd i energifunksjonen bidrar med $\frac{1}{2} k_B T$ til indre energi pr partikkel. Det gir dermed:

$$\langle K_{\text{rot}} \rangle = \frac{1}{2} I_0 \langle \omega_x^2 + \omega_y^2 \rangle = \frac{2}{2} k_B T \quad \left(\frac{3}{2} k_B T \text{ for ikke-lineare molekyler} \right)$$



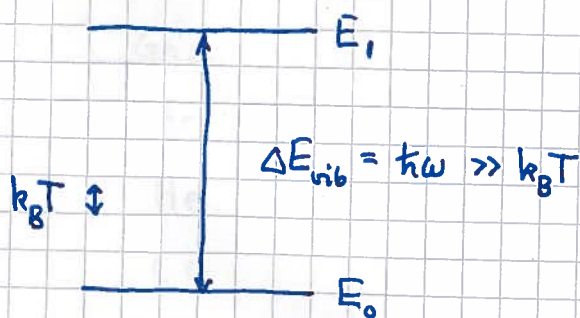
$$I_x = I_y = I_0 ; I_z = 0 \quad (I = \text{treghetsmoment})$$

Vi forventer nå $\langle K_{\text{vib}} \rangle = \frac{2}{2} k_B T$ pga to kvadratiske ledd i energien til en enkel harmonisk oscillator: $\frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

Men kvantemekanikk gir kvantisert vibrasjonsenergi

$$E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots ; \hbar = h/2\pi = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js})$$

med avstand mellom energinivåene $\Delta E_{\text{vib}} = \hbar \omega$, som typisk er mye større enn "tilgjengelig termisk energi" i systemet, $k_B T$.



Siden termisk energi i systemet er for liten til å eksitere molekyler til vibrasjonstilstander med høyere energi enn E_0 , vil stort sett alle molekylene ha vibrasjonsenergi E_0 , uavhengig av T .

$$\text{Dermed: } \underline{U = \frac{5}{2} N k_B T + N \cdot E_0}$$

C_V og C_p for ideell gass [YF 18.4; LHL 15.2, 14.2]

118

Med $V = \text{konst}$: $dW = p dV = 0 \Rightarrow dQ = dU$

$$\Rightarrow C_V = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \frac{dU}{dT}$$

Med $p = \text{konst}$:

$$\begin{aligned} C_p &= \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p = \left(\frac{dU}{dT} \right)_p + p \left(\frac{dV}{dT} \right)_p = \frac{dU}{dT} + p \frac{d}{dT} \left(\frac{Nk_B T}{p} \right)_p \\ &= C_V + Nk_B = C_V + nR \end{aligned}$$

Som ventet er $C_p > C_V$: Med $p = \text{konst.}$ går noe tilført varme med til å gjøre arbeidet $p \Delta V$; med $V = \text{konst.}$ går all tilført varme med til å øke indre energi U , og dermed temperaturen T .

Atomær gass: $U = \frac{3}{2} nRT \Rightarrow C_V = \frac{3}{2} nR, C_p = \frac{5}{2} nR$

Toatomig gass: $U = \frac{5}{2} nRT + \text{konst.} \Rightarrow C_V = \frac{5}{2} nR, C_p = \frac{7}{2} nR$

Stemmer bra med målte verdier :

Gass	C_V / nR
Ar	1.50
He	1.50
CO	2.49
N ₂	2.49
O ₂	2.54

Adiabatiske prosesser [YF 19.8 ; LHL 15.3]

(119)

= prosesser uten tilførsel eller avgivelse av varme,

$$\underline{\Delta Q = 0} \quad \Rightarrow \quad \Delta U = -\Delta W \quad (1. \text{lov})$$

Siden varmeoverføring tar litt tid, er alle tilstrekkelig raske prosesser tilnærmet adiabatiske.

Eks:

- Rask kompresjon av luft i sykkelpumpe. Vi gjør arbeid på lufta. Da er $\Delta W < 0$, $\Delta U = -\Delta W > 0$ og $\Delta T > 0$, som vi har erfart.
- Lydbølger i luft. Små men raske trykkendringer, og dermed adiabatiske forhold, ikke isoterme forhold.

La oss anta ideell gass:

$$pV = nRT \quad ; \quad \text{fra s. 118 er } nR = C_p - C_v \quad \text{og} \quad C_v = \frac{dU}{dT}$$

Med $dQ = 0$ har vi nå $dW = -dU$, dvs $p dV = -C_v dT$,

dvs

$$\frac{nRT}{V} dV = -C_v dT$$

$$\Rightarrow \frac{C_p - C_v}{C_v} \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T}$$

Vi utfører adiabathkonstanten : $\gamma \equiv \frac{C_p}{C_v} > 1$

$$\Rightarrow (\gamma - 1) \frac{dV}{V} + \frac{dT}{T} = 0$$

Integrasjon og omskiving gir nå:

$$(\gamma - 1) \ln V + \ln T = \text{konst} \quad \Rightarrow \quad \ln \{ T \cdot V^{\gamma - 1} \} = \text{konst.}$$

$$\Rightarrow \boxed{T \cdot V^{\gamma - 1} = \text{konst.}}$$

Kan eliminere T ved å bruke $T = pV/nR$

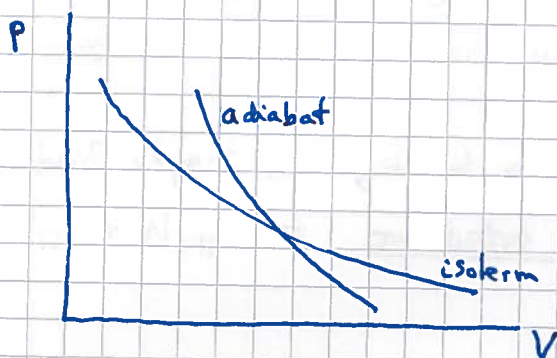
(120)

$$\Rightarrow p \cdot V^\gamma = \text{konst.}$$

Kan eliminere V med $V = nRT/p$

$$\Rightarrow p \cdot T^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \text{konst.}$$

Siden $p(V) \sim V^{-\gamma}$ med $\gamma > 1$ for adiabat, mens $p(V) \sim V^{-1}$ for isoterm, blir adiabater brattere enn isotermer i pV -diagram:



Atomær gass: $\gamma = 5/3$

Toatomig gass: $\gamma = 7/5$

Generelt:

$$\gamma = C_p/C_v = (f+2)/f \quad \text{der}$$

f = antall kvadratiske frihetsgrader ved den aktuelle temperatur

Lydfarten i luft:

$$p(V) = A \cdot V^{-\gamma} \Rightarrow B = -V \frac{\partial p}{\partial V} = -V \cdot A \cdot (-\gamma) \cdot V^{-\gamma-1} = \gamma A V^{-\gamma} = \gamma p \\ = \gamma N k_B T / V$$

$\rho = m \cdot N/V$; m = midlere molekylmasse

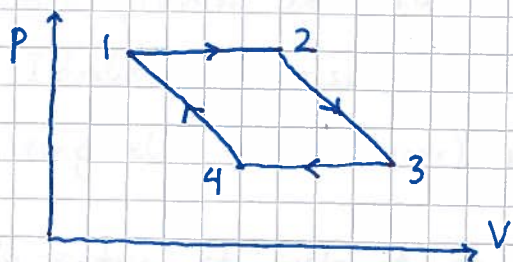
$$\Rightarrow v = \sqrt{B/\rho} = \sqrt{\gamma k_B T / m}$$

Luft: $\gamma \approx 1.4$, $m = 29 \text{ g/mol} = 0.029 / 6.02 \cdot 10^{23} \text{ kg}$

Kretsprosesser

[YF 19.4 ; LHL 15.1]

(121)



Starttilstand = Slutt-tilstand

$\Rightarrow \Delta U = 0$, fordi U er tilstandsfunksjon

$\xrightarrow{\text{1. lag}} \Delta Q = \Delta W$, for hver hele syklus

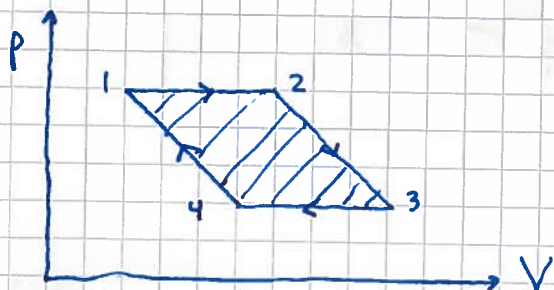
dus netto tilført varme = netto utført arbeid

W_{123} = arbeid utført av systemet ved utvidelsen $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$
= arealet under kurven $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

W_{341} = arbeid utført på systemet ved kompresjonen $3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$
= minus arealet under kurven $3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$

Netto arbeid utført av systemet pr syklus:

$\Delta W = W_{123} + W_{341} = \underline{\text{omsluttet areal}}$ i pV-diagrammet



$$\Delta W > 0$$

når kretsprosessen går
med klokka

Varmekraftmaskin.

Tilfører systemet netto
varme.

Systemet gjør positivt
netto arbeid på omgivelsene.

(Bensinmotor, dieselmotor)



$$\Delta W < 0$$

når kretsprosessen går
mot klokka

Varmepumpe / kjøleskap.

Gjør netto arbeid på
systemet.

Får overført netto varme
fra reservoar / sted med
lav temp. til reservoar / sted
med høy temp.

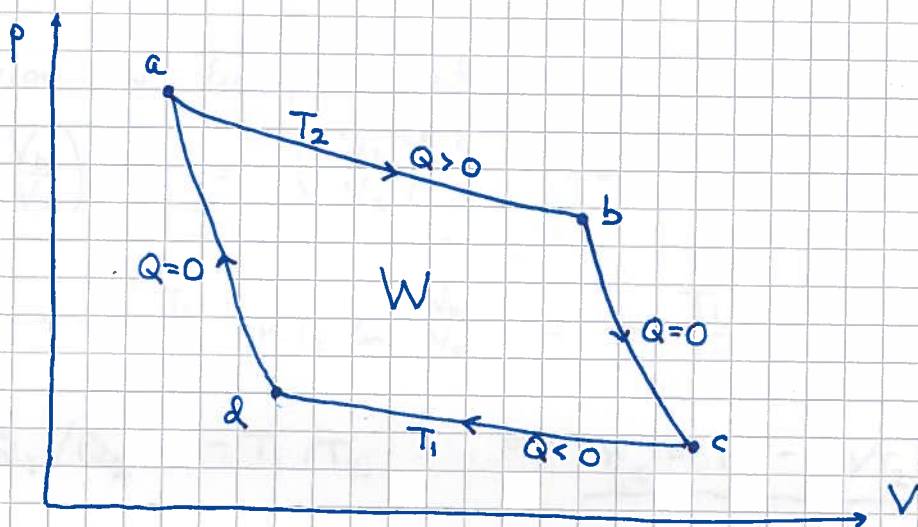
Carnotprosessen

[YF 20.6 ; LHL 15.4]

(122)

- Kretsprosess bestående av 2 isotermer og 2 adiabater.
- Idealisert reversibel prosess, der varme utveksles mellom system og omgivelser (reservoarer) med "ørsmå" temperaturforskjeller, $\Delta T \approx 0$.

Vi antar at systemet er en ideell gass. Da er $pV = nRT$, indre energi avhenger kun av T , og $T \cdot V^{\gamma-1} = \text{konstant}$ i de adiabatiske prosessene. Her er $\gamma = C_p/C_v$.



Virkningsgrad i en kretsprosess:

$$\eta = \frac{\text{nytte}}{\text{kostnad}}$$

Varmekraftmaskin (som her; med klokka):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Nytte} = \text{netto utført arbeid} = W \\ \text{Kostnad} = \text{tilført varme} = Q_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \eta = W/Q_2$$

For hver syklus: $\Delta U = 0 \Rightarrow W = Q_2 + Q_1$ (1. lov)

$$\Rightarrow \eta_c = \frac{Q_2 + Q_1}{Q_2} = 1 + \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{|Q_1|}{Q_2} < 1$$

Vi skal vise at $Q_1/Q_2 = -T_1/T_2$

$$\Rightarrow \eta_c = 1 - T_1/T_2$$

Carnotprosessens virkningsgrad

Dette er maksimal teoretisk virkningsgrad. Reelle maskiner: $\eta < \eta_c$

Vi utleder $\eta_c = 1 - T_1/T_2$:

$$Q_2 = W_{ab} = \int_{V_a}^{V_b} p(V) dV = nRT_2 \ln \frac{V_b}{V_a}$$

$$Q_1 = W_{cd} = nRT_1 \ln \frac{V_d}{V_c} = -nRT_1 \ln \frac{V_c}{V_d}$$

Langs adiabatene:

$$T_2 V_b^{\gamma-1} = T_1 V_c^{\gamma-1} \quad \text{og} \quad T_2 V_a^{\gamma-1} = T_1 V_d^{\gamma-1}$$

Divisjon av den første med den andre gir

$$\left(\frac{V_b}{V_a}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_c}{V_d}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_b}{V_a} = \frac{V_c}{V_d}$$

$$\Rightarrow Q_1 = -\frac{T_1}{T_2} nRT_2 \ln \frac{V_b}{V_a} = -\frac{T_1}{T_2} \cdot Q_2$$

$$\Rightarrow Q_1/Q_2 = -T_1/T_2 \Rightarrow \underline{\eta_c = 1 - T_1/T_2}$$

Vi noterer oss at for Carnotprosessen er

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

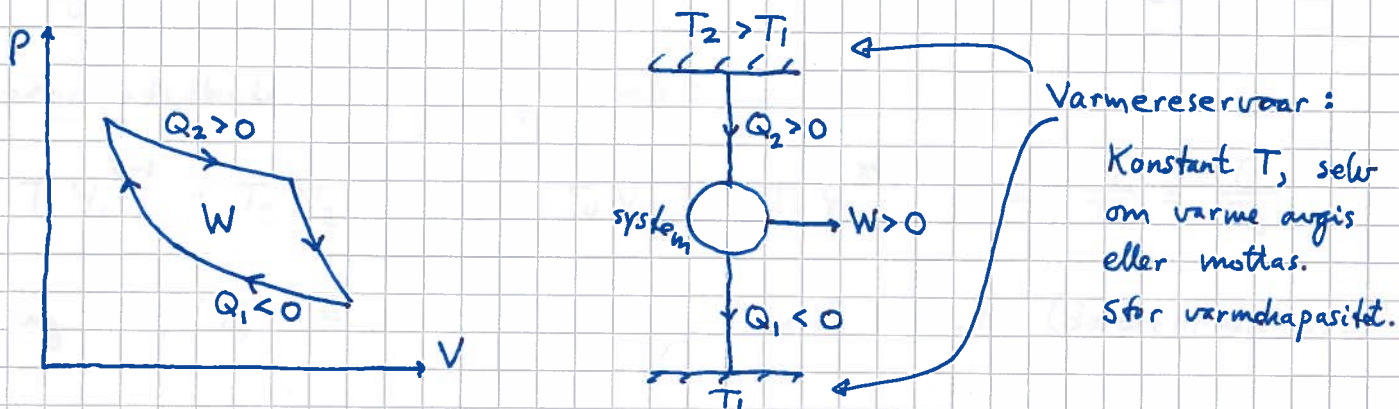
Vi skal snart se at dette gjelder generelt for alle reversible kretsprosesser.

Varmekraft- og kjølemaskiner

124

[YF 20.2+3+4+6 ; LHL 16.3+4]

Varmekraftmaskin:

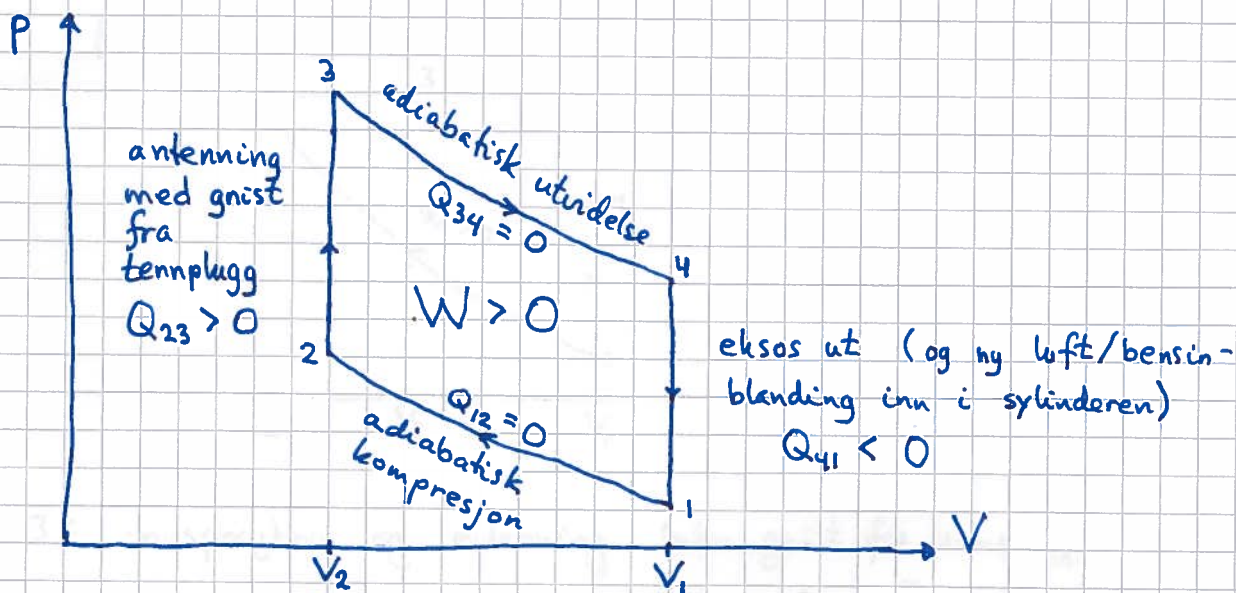


Kostnad: Varmer Q_2 tilført fra reservoæret med høy temp. T_2

Nytte: Netto utført arbeid W

Virkningsgrad: $\eta = W/Q_2$; $\eta < \eta_c = 1 - T_1/T_2 < 1$

Eks: Bensinmotor og idealisert Otto-syklus



Tilført varme Q_{23} , fra kjemisk energi i bensinen.

$$\text{Netto arbeid } W = W_{34} + W_{12} = W_{34} - |W_{12}|$$

$$\Delta U = 0 \text{ og 1. lov } \Rightarrow W = Q_{23} + Q_{41} = Q_{23} - |Q_{41}|$$

$$Q_{23} = C_v (T_3 - T_2) ; \quad Q_{41} = C_v (T_1 - T_4)$$

⇒ Virkningsgraden blir

$$\eta_0 = \frac{W}{Q_{23}} = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_4 (1 - T_1/T_4)}{T_3 (1 - T_2/T_3)}$$

For adiabatene $1 \rightarrow 2$ og $3 \rightarrow 4$:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} ; \quad T_4 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_2^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_1}{T_4} = \frac{T_2}{T_3}$$

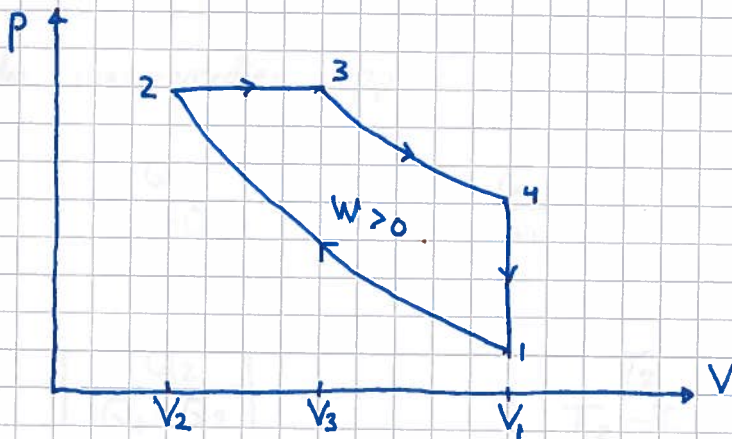
$$\text{og } T_4/T_3 = (V_2/V_1)^{\gamma-1} ; \quad \text{med } \gamma \approx 1.4 \text{ (da det er mest luft)}$$

$$\Rightarrow \eta_0 = 1 - \frac{T_4}{T_3} = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = 1 - \mathcal{r}^{1-\gamma}$$

$$\mathcal{r} = V_1/V_2 = \text{kompresjonsforholdet} \quad (\mathcal{r} > 1)$$

$$T_4 > T_1 = T_{\min}, \quad T_3 = T_{\max} \Rightarrow \eta_0 < 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} \quad (= \eta_c)$$

Vi kan sammenligne med en idealisert dieselsyklus:



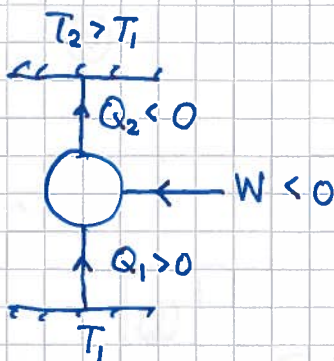
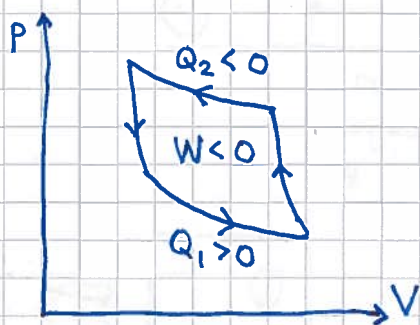
$2 \rightarrow 3$: innsprøyting og antenning (uten gnist fra tennplugg)

$$\eta_D = W/Q_{23} = \dots = 1 - (V_2/V_1)^{\gamma-1} \cdot \frac{(V_3/V_2)^{\gamma} - 1}{\gamma(V_3/V_2 - 1)}$$

For likt kompresjonsforhold V_2/V_1 er $\eta_0 > \eta_D$, men i praksis er $\eta_D > \eta_0$ fordi en dieselmotor typisk opererer ved høyere V_1/V_2 enn en bensinmotor.

Kjøleskap / varmepumpe:

126



Kostnad: $|W|$

Nytte: Varme Q_1 ut av kjøleskapet (T_1) eller varme $|Q_2|$ inn i stua (T_2) (når varmepumpe)

System: Sirkulerende kjølevæske som vekselvis fordampes og kondenserer i kretsprosessen

Effektfaktor: [COP: Coefficient of Performance]

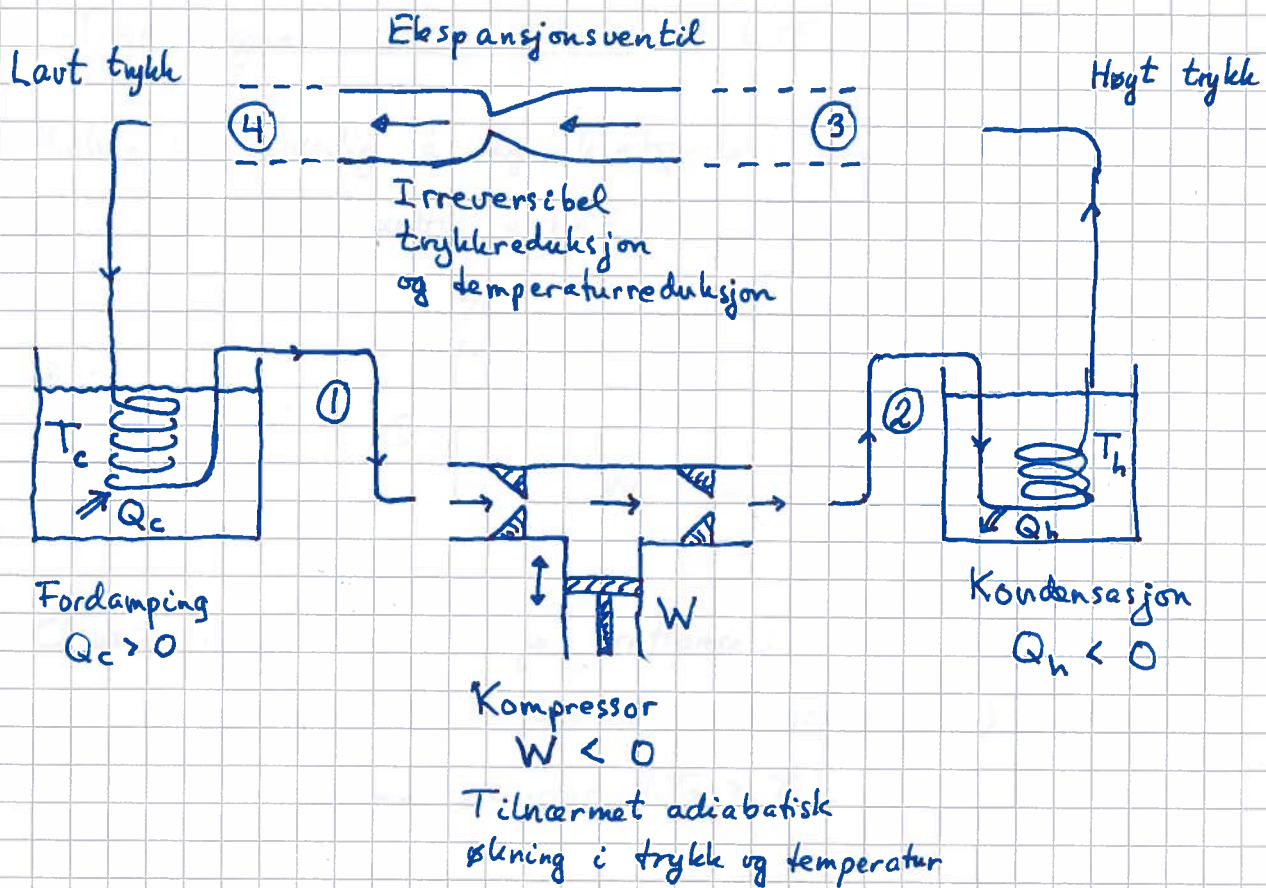
$$\text{Kjøleskap: } \epsilon_K = |Q_1/W|$$

$$\text{Varmepumpe: } \epsilon_V = |Q_2/W|$$

Teoretiske max-verdier oppnås med reversibel Carnotprosess:

$$\epsilon_K^c = \left| \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} \right| = \left| 1 + \frac{Q_2}{Q_1} \right|^{-1} = \left| 1 - \frac{T_2}{T_1} \right|^{-1} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} > 0$$

$$\epsilon_V^c = \left| \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} \right| = \dots = \frac{T_2}{T_2 - T_1} > 1$$



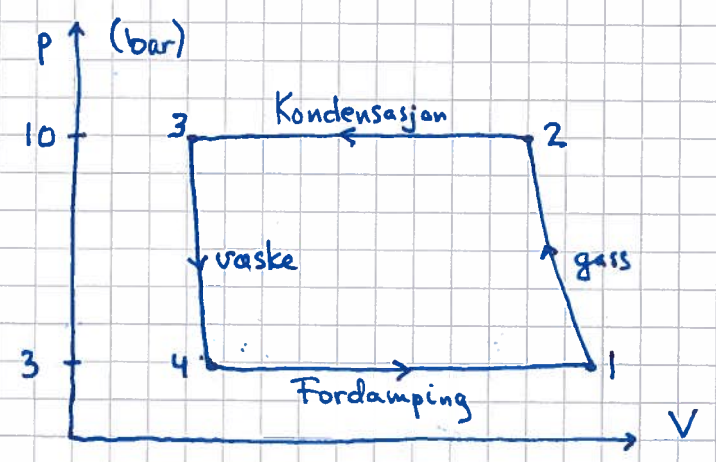
Typiske fallverdier (°C):

$T_1 = 3, T_2 = 40, T_3 = 26, T_4 = -1$

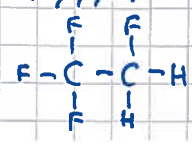
$T_c = 4$ ("kjøleskapet"), $T_h = 23$ ("stua")

$p_2 = p_3 \approx 10 \text{ bar}, p_1 = p_4 \approx 3 \text{ bar}$

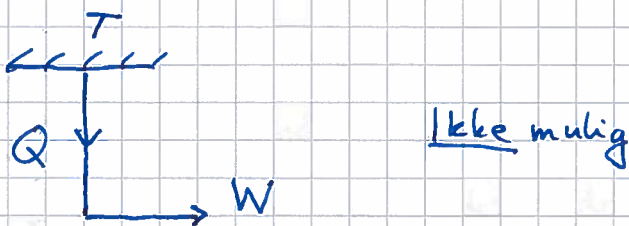
Prosessen i et pV-diagram:



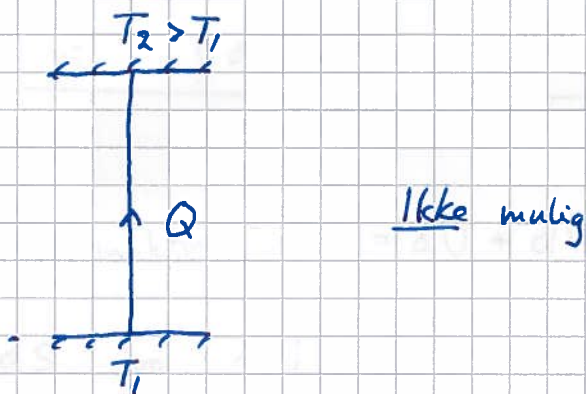
Kjølemedium: R134a $\hat{=}$ $C_2H_2F_4$, (1,1,1,2) - tetrafluoretan



Kelvin : Umulig å lage kretsprosess som omsetter all tilført varme Q i nyttig arbeid W .



Clausius : Umulig å lage kretsprosess som kun overfører varme Q fra Lavtemp. reservoar (T_1) til høyttemp. reservoar ($T_2 > T_1$).

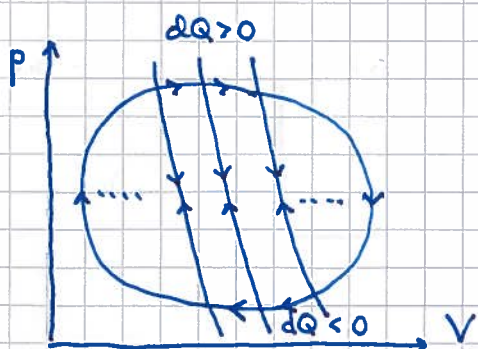


Entropi [YF 20.7 ; LHL 17.1]

(129)

Vi fant, for reversibel Carnot-prosess : $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$

Vilkårlig reversibel kretsprosess = sum av mange små Carnotprosesser :



Indre adiabatene kjøres både opp og ned og gir intet bidrag

$$\Rightarrow \oint \frac{dQ}{T} = 0 \quad \text{for den vilkårlige (ytre) kretsprosessen}$$

$\Rightarrow \frac{dQ}{T}$ er endringen i en tilstandsfunksjon ; kalles entropien S :

$$dS = \frac{dQ}{T} ; \quad \oint dS = 0 ; \quad [S] = \text{J/K}$$

1. lov er i utgangspunktet $dQ = dU + dW$.

Med $dQ = T dS$ og $dW = p dV$ fås

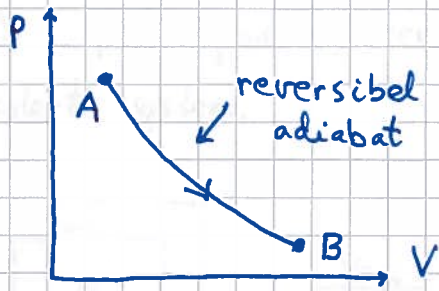
$$T dS = dU + p dV$$

som er 1. lov uttrykt kun med tilstandsfunksjoner ;

kalles den termodynamiske identitet.

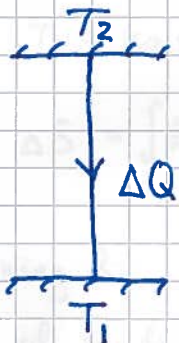
I sentropisk prosess:

I reversibel adiabatisk prosess er $dQ=0$; da er også $dS=0$ og $S = \text{konstant}$



$$\Delta S = S_B - S_A = 0$$

I spontane prosesser, der varme ΔQ overføres fra system med temp. T_2 til system med temp. $T_1 < T_2$, vil total entropi alltid øke:



$$\Delta S_2 = - \frac{\Delta Q}{T_2} , \quad \Delta S_1 = \frac{\Delta Q}{T_1}$$

$$\Rightarrow \Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \Delta Q \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) > 0$$

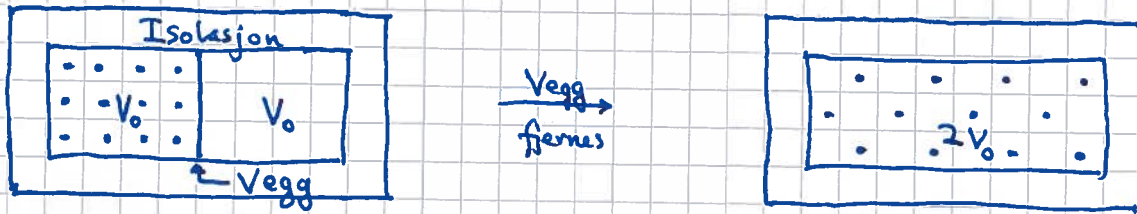
Boltzmanns mikroskopiske definisjon av entropi: [YF 20.8 ; LHL 17.11]

$$S = k_B \ln \Omega$$

Ω = antall ulike mikrotilstander som alle er konsistente med den gitte makrotilstand

Vi avslutter med et klassisk, enkelt eksempel som illustrerer at $dS = dQ/T$ og $S = k_B \ln \Omega$ er to sider av samme sak:

Bestem ΔS for spontan, irreversibel utvidelse av ideell gass i et varmeisolerert system.



Løsning 1: $\Delta Q = 0$, men $\Delta S \neq \Delta Q/T$ fordi prosessen er irreversibel.

Beregner ΔS ved å se på reversibel prosess fra gitt starttilstand til gitt slutt-tilstand. Gassen gjør ikke arbeid, $\Delta W = 0$, slik at $\Delta U = 0$ (1. lov) og $T = \text{konstant}$. Dermed: $T dS = p dV \Rightarrow dS = p dV/T = N k_B dV/V$
 $\Rightarrow \Delta S = \int dS = N k_B \int_{V_0}^{2V_0} \frac{dV}{V} = N k_B \ln \frac{2V_0}{V_0} = \underline{\underline{N k_B \ln 2}}$

Løsning 2: Tenk oss V_0 inndelt i M meget små delvolum ΔV og $2V_0$ dermed inndelt i $2M$ like store delvolum. Hver av de N partiklene har da hhv M og $2M$ mulige posisjoner før og etter utvidelsen, og det er dermed hhv $\Omega_{\text{før}} = M^N$ og $\Omega_{\text{etter}} = (2M)^N$ ulike mikrotilstander før og etter utvidelsen

$$\Rightarrow \Delta S = S_{\text{etter}} - S_{\text{før}} = k_B \ln (2M)^N - k_B \ln M^N = k_B \ln 2^N = \underline{\underline{N k_B \ln 2}}$$

Oppsummering:

- Økt "uorden" gir økt entropi
- Spontane prosesser går i en bestemt retning, og da alltid en retning som tilsværer økt entropi
- $\Delta S \geq 0$ for alle prosesser i et termisk isolert system;
- $\Delta S = 0$ for alle reversible prosesser i et termisk isolert system
- 1. og 2. lov: Energien er bevart. Entropien øker.