KLASSISK DYNAMIKK

[YF 1-10 ; LL 1-6]

Størrelser og enheter [YF 1]

Eks:

dekadisk forstavelse (m = milli = 10^{-3})

Tid ; t = 10.0 ms

størrelse — symbol — tallverdi — SI-enhet

$[t] = s$ ("SI-enheten til tid er sekund")

Mekanikk:

lengde $[l] = m$

tid $[t] = s$

masse $[m] = kg$

Termodynamikk:

temperatur $[T] = K$

stoffmengde $[n] = mol$

(El.mag: strømstyrke $[I] = A$)

Sammensatte størrelser:

hastighet $[v] = m/s$

akselerasjon $[a] = m/s^2$

impuls $[p] = kg\ m/s$ (bevegelsesmengde)

Avledete enheter:

kraft $[F] = kg\ m/s^2 = N$

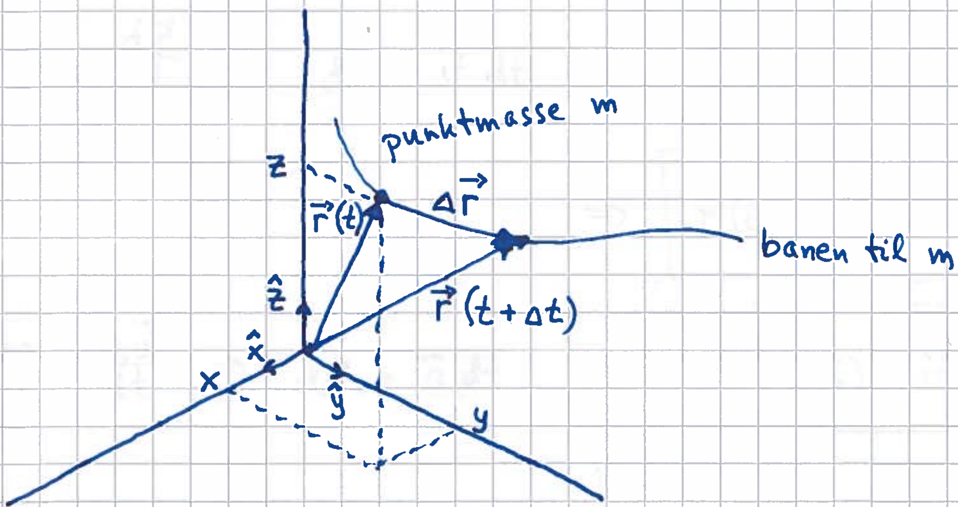
arbeid, energi $[W] = N \cdot m = J$

effekt $[P] = J/s = W$

trykk $[p] = N/m^2 = Pa$

Kinematikk [YF 2, 3 ; LL 1]

(om bevegelse som sådan)



Enhetsvektorer:

$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$

$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1$

(dimensjonsløse)

$\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1$

$\hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{y}\cdot\hat{z} = \ldots = 0$

Posisjon (til m) (ved tid t):

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z}$$

Forflytning (i løpet av Δt):

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

Hastighet $\overset{\text{def}}{=}$ Forflytning pr tidsenhet

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$\Rightarrow$ $\vec{v} \parallel \Delta\vec{r}$, dvs tangentiell til banen

$$\vec{v} = v_x\,\hat{x} + v_y\,\hat{y} + v_z\,\hat{z} \quad ; \quad \dot{\vec{r}} = \dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y} + \dot{z}\,\hat{z}$$

$\Rightarrow$ $v_x = \dot{x}$ osv

Akselerasjon $\overset{\text{def}}{=}$ Hastighetsendring pr tidsenhet

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

$\Rightarrow$ $a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$ osv

$\vec{r} \xRightarrow{\text{derivasjon}} \vec{v}$ og $\vec{v} \xRightarrow{\text{derivasjon}} \vec{a}$

slik at <u>integrasjon</u> gir $\vec{r}$ fra $\vec{v}$ og $\vec{v}$ fra $\vec{a}$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}\,dt \Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t)\,dt$$

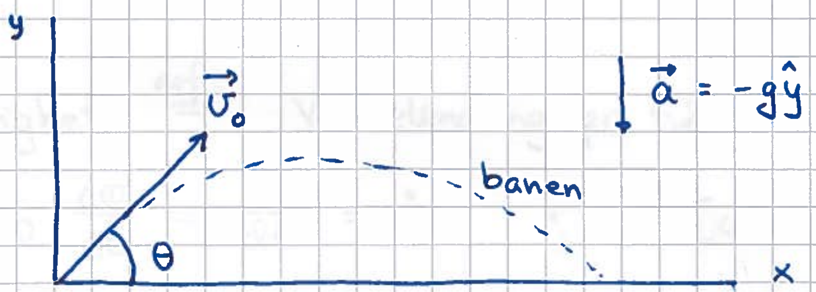
$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t)\,dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a}\,dt \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t)\,dt}$$

Hvis $\vec{a}$ er konstant (og $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$) :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad ; \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2$$

Eks: Skrått kast i tyngdefeltet, med $\vec{r}_0 = 0$

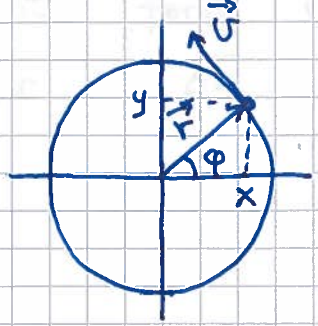


$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2 = \hat{x}\,\underbrace{v_0 t\cos\theta}_{x} + \hat{y}\,(\underbrace{v_0 t\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2}_{y})$$

$$\Rightarrow y(x) = x\tan\theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta} \qquad \text{(parabel)}$$

Sirkelbevegelse

[YF 3.4 ; LL 1.7, 1.8]



Polarkoordinater (r, φ) :

r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom (positiv) x-akse og $\vec{r}$

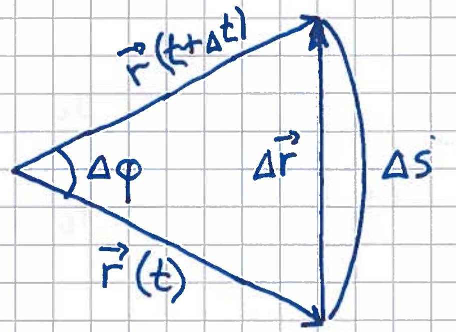
Fortegn: $\varphi > 0$ mot klokka

Vi ser direkte fra figuren:

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad \tan\varphi = y/x\,, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \hat{x}\, r\cos\varphi + \hat{y}\, r\sin\varphi$$

Vinkel $\stackrel{\text{def}}{=}$ Buelengde / radius



$$\Delta\varphi = \Delta s / r$$

$$[\varphi] = 1$$

Vinkelhastighet $\stackrel{\text{def}}{=}$ Vinkelendring pr tidsenhet

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad ; \quad [\omega] = s^{-1}$$

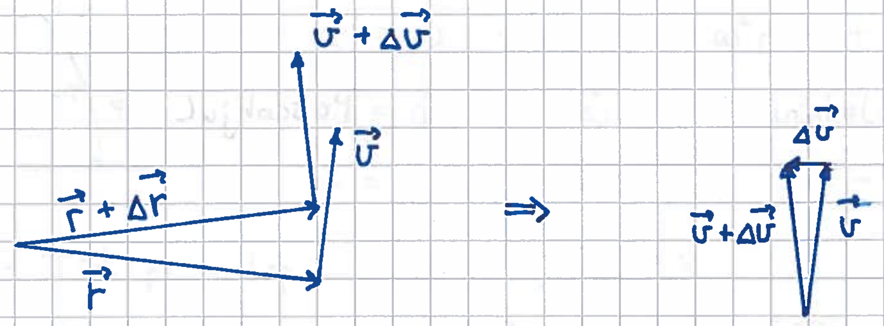
$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta r = \Delta s = r\,\Delta\varphi \quad \Rightarrow \quad v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\,\Delta\varphi}{\Delta t} = r\,\omega$$

Retning: $\vec{v} \parallel \Delta\vec{r}\,, \quad \Delta\vec{r} \perp \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v} \perp \vec{r}}$

Akselerasjon ved sirkelbevegelse:

Antar først uniform sirkelbevegelse, dvs konstant ω.

Ser at $\Delta\vec{v}$, og dermed $\vec{a}$, har retning inn mot sentrum:



Vi regner ut $\vec{v}$ og $\vec{a}$ fra $\vec{r}(t) = \hat{x}\, r\cos\omega t + \hat{y}\, r\sin\omega t$

(der vi valgte $\varphi(0)=0$, dvs $\varphi(t)=\omega t$):

$$\vec{v}(t) = -\hat{x}\,\omega r\sin\omega t + \hat{y}\,\omega r\cos\omega t$$

$$\vec{a}(t) = -\hat{x}\,\omega^2 r\cos\omega t - \hat{y}\,\omega^2 r\sin\omega t = -\omega^2\vec{r}(t)$$

som er sentripetalakselerasjonen

$$\boxed{\vec{a}_\perp = -\omega^2\vec{r}}$$

Hvis også ω, og dermed $v = |\vec{v}|$, endrer seg,

har vi i tillegg baneakselerasjon

$$\boxed{a_\parallel = \dot{v} = r\dot{\omega}}$$