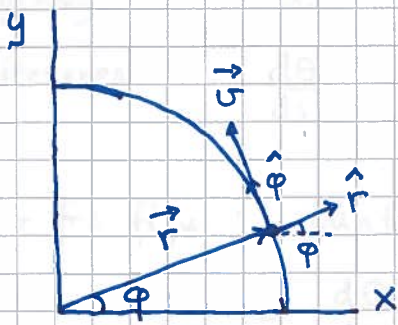


Sirkelbevegelse, oppsummert:

⑥



$$\vec{r} = \hat{x} r \cos \varphi + \hat{y} r \sin \varphi = r \hat{r}$$

$$\vec{v} = -\hat{x} r \dot{\varphi} \sin \varphi + \hat{y} r \dot{\varphi} \cos \varphi = v \hat{\varphi}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{\perp} + \vec{a}_{\parallel} = -\omega^2 r \hat{r} + r \dot{\omega} \hat{\varphi}$$

$$\omega = \dot{\varphi}, \quad \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = \text{vinkelakselerasjon}; \quad [\alpha] = \text{s}^{-2}$$

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi; \quad \hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$$

Periode = Tid pr omløp: T ; $[T] = \text{s}$

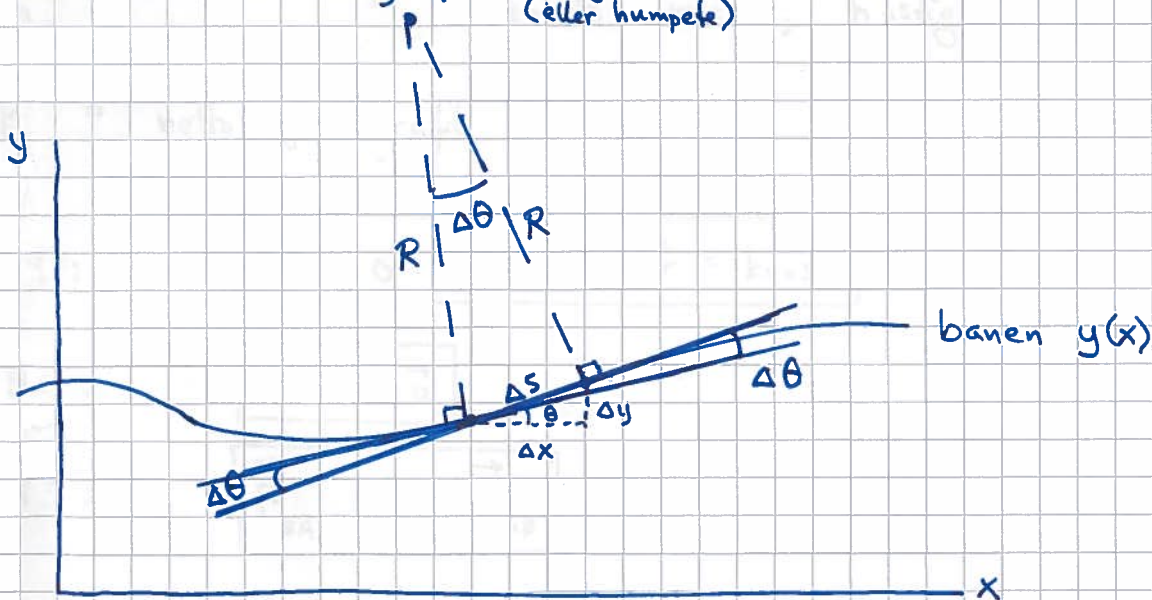
Frekvens = Antall omløp pr tidsenhet: f ; $[f] = \text{Hz} = \text{s}^{-1}$

$$\Rightarrow v = 2\pi r / T, \quad T = 2\pi r / v = 2\pi / \omega, \quad f = 1/T = \omega / 2\pi$$

$$a_{\perp} = \omega^2 r = v^2 / r$$

Krumlinjet bevegelse

(Lab; Bilkjøring på svingete vei osv.)
(eller humpeke)



$$a_{\perp} = v^2 / R, \quad \text{men hva er } R \text{ nå?}$$

R = radius i "tenkt" sirkel som best tangerer banen $y(x)$;
den såkalte krumningsradien

Anta liten Δs og $\Delta \theta$, slik at $\Delta s \rightarrow ds$ og $\Delta \theta \rightarrow d\theta$

Fra vinkeldef: $ds = R d\theta \Rightarrow R = ds/d\theta$

Pythagoras: $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \Rightarrow ds = dx \cdot \sqrt{1 + (dy/dx)^2}$

Kjernerregel: $\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d\theta}{dx} / \sqrt{1 + (dy/dx)^2}$

Ser fra figur: $\tan \theta = dy/dx \Rightarrow \theta = \arctan(dy/dx)$

$\Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{1 + (dy/dx)^2} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y/dx^2}{1 + (dy/dx)^2}$

Dermed:

$R = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$ (der R velges positiv)

Newtons lover [YF 4, 5 ; LL 2, 3]

m, \vec{v}, \vec{a} = legemets masse, hastighet, akselerasjon

\vec{F} = netto ytre kraft på legemet

N1: $\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \text{konst.}$

N2: $\vec{F} = m\vec{a}$

N3: $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

Dvs: Krefter er vekselvirkning mellom legemer.
Hvis A virker på B med kraft \vec{F}_{AB} ,
virker B på A med kraft $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

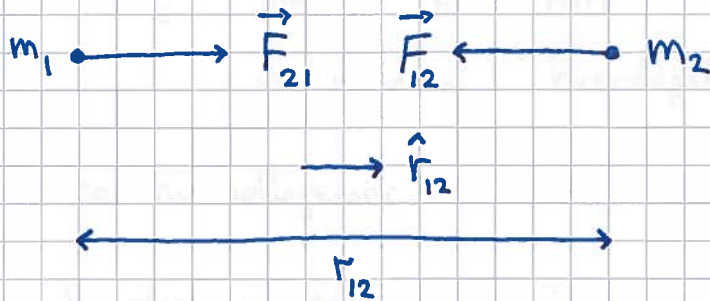
$[F] = \text{kg m} / \text{s}^2 = \text{N}$ (newton)

Fundamentale krefter i naturen [YF 5.5 ; LL 2.1]

8

- Gravitasjon. Svak tiltrekning mellom masser.

Newtons gravitasjonslov :

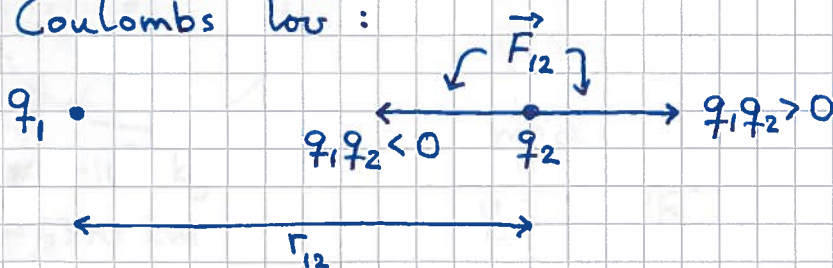


$$\vec{F}_{21} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Gravitasjonskonstanten : $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

- Elektromagnetisk v.v. Tiltrekning/frastøtning mellom ladninger.

Coulombs lov :



$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} ; [q] = C = \text{A} \cdot \text{s} \text{ (coulomb)}$$

Vakuumpemittiviteten : $\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} ; \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$

- Kjernekrefter, svake og sterke. Svært kort rekkevidde.
Relevant for hvor radioaktivitet og stabilitet av atomkjerner.

"Hverdagen" styres av coulombkrefter (F_E) og gravitasjon (F_G). ⑨

Elektron: $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, $q = -e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C

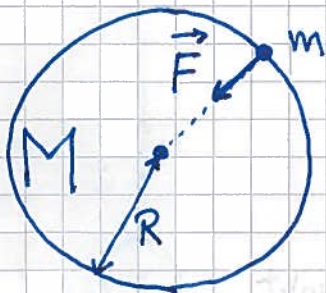
Proton: $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg, $q = e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C

$\Rightarrow F_E \gg F_G$ mellom elementarpartikler, atomer, molekyler,
og mellom "hverdagslige" legemer

Mellom to himmellegemer: $F_G \gg F_E$

- Mellom hverdagslig legeme og jorda: $F_G \gg F_E$

Tyngde [YF 4.4 ; LL 2.5]



$M \approx 6 \cdot 10^{24}$ kg

$R \approx 6370$ km

Tyngden til m = gravitasjonskraften
på m fra M (jorda):

$$F = G \frac{mM}{R^2} = mg$$

med

$$g = GM/R^2 \approx 9.81 \text{ m/s}^2 = \text{tyngdens akselerasjon}$$

(når m er nær jordas overflate)

Fritt fall (jf skrått kast):

Hvis tyngden er eneste kraft på m :

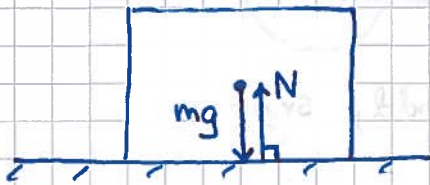
$$mg \stackrel{N2}{=} ma \Rightarrow \underline{a = g}$$

Kontaktkrefter

[YF 4.1 ; LL 3]

(10)

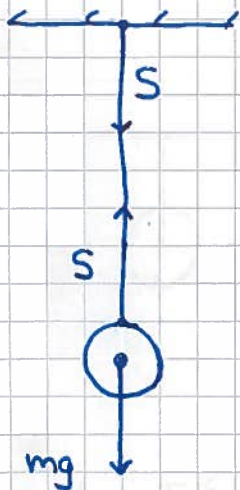
Normalkraft: N = netto frastøtende coulombkraft mellom to legemer i kontakt, vinkelrett på kontaktflaten



Hvis klossen ligger i ro:

$$N = mg \quad (\text{pga } N1)$$

Snorkraft: S = netto tiltrekkende coulombkraft mellom snora og legemet som henger i snora

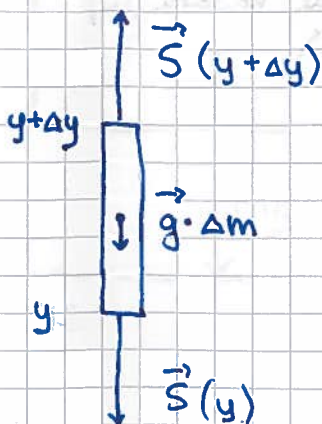


Hvis kula henger i ro:

$$S = mg \quad (\text{pga } N1)$$

S virker oppover på kula og nedover på taket

Inni snora virker snordraget begge veier, på hver lille snorbit:



N2 for snorbitten:

$$\vec{S}(y) + \vec{S}(y + \Delta y) + \vec{g} \cdot \Delta m = \Delta m \cdot \vec{a}$$

Med (tilnærmet) masseløs snor er $\Delta m \approx 0$

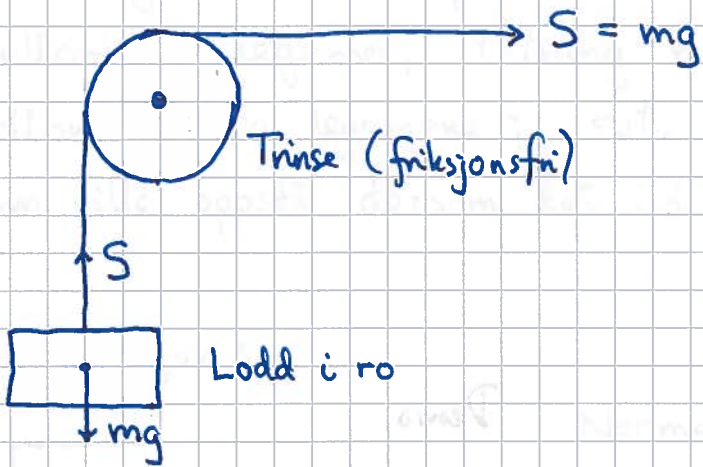
og $|\vec{S}(y)| \approx |\vec{S}(y + \Delta y)|$, dvs

S er konstant langs hele snora

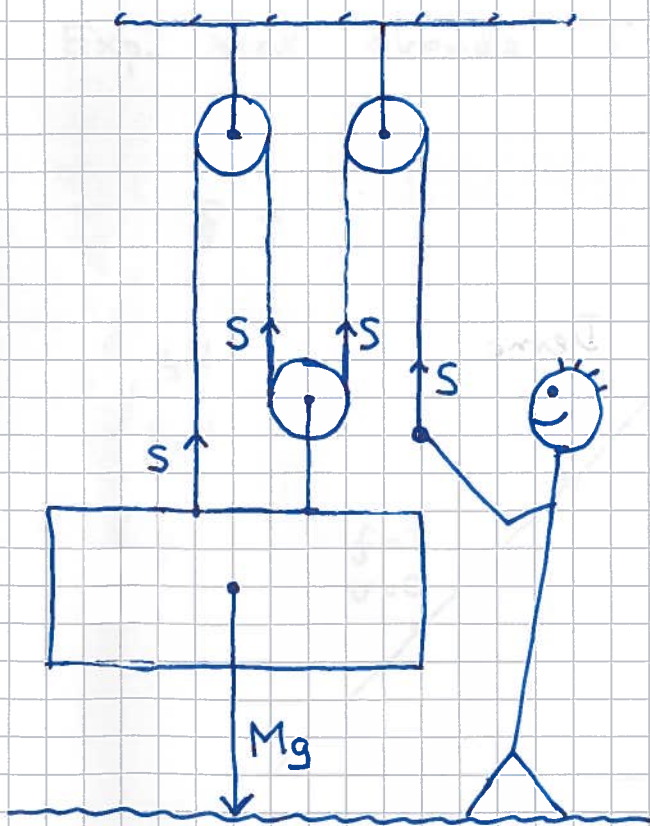
Trinser

endrer retningen på \vec{S} :

(11)



Talje gjør sterk :



N1 anvendt på kassa :

$$3S = Mg$$

$$\underline{S = \frac{1}{3} Mg}$$

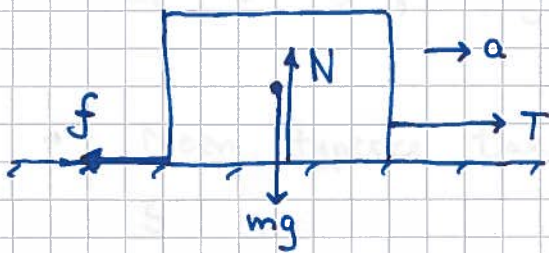
Friksjonskrefter

[YF 5.3 ; LL 3.1]

(12)

= den tangentielle komponenten av kontaktkraften mellom to legemer, retning mot den relative bevegelsen mellom de to legemene ; evt. mot relativ bevegelse som ville oppstå dersom det ikke var friksjon

Tørr friksjon:



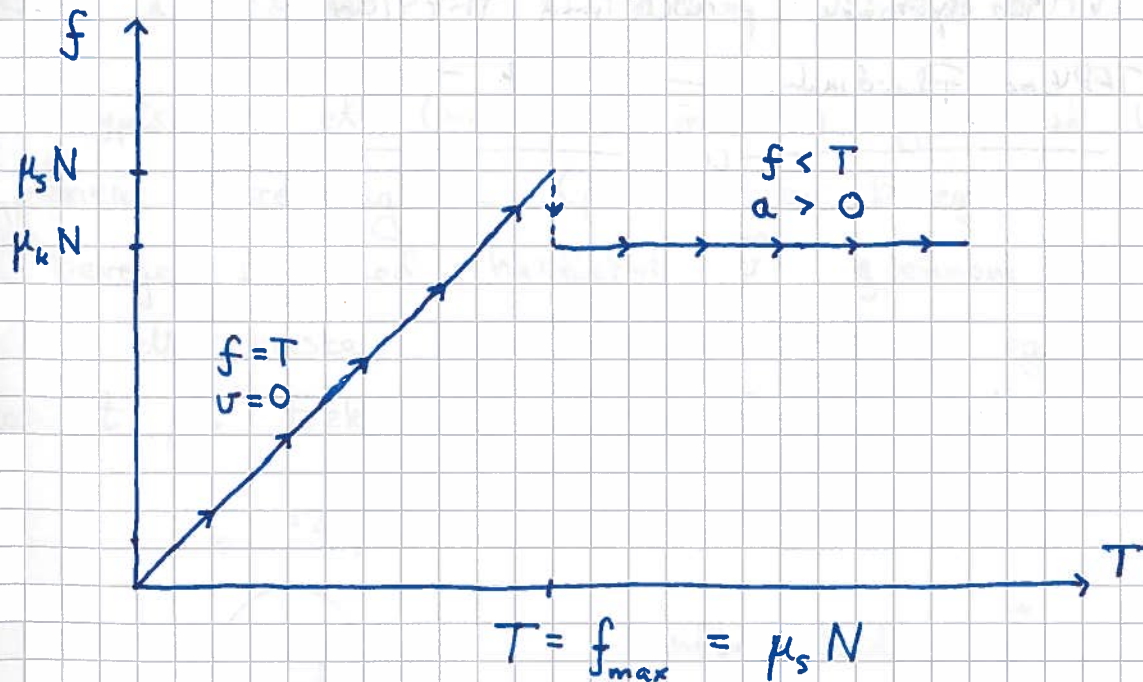
Normalkraft N ($= mg$ her)

Trekk-kraft T

Friksjonskraft f

$$N2 \text{ (horisontalt)} : T - f = ma$$

Exp. med økende T gir :



- Statisk friksjon :
 $v = 0, f = T, f_{max} = \mu_s N; \mu_s = \text{statisk friksjonskoeffisient}$
- Kinetisk friksjon :
 $v > 0, f = \mu_k N; \mu_k = \text{kinetisk friksjonskoeffisient}$
- $\mu_k \leq \mu_s$; ujevnheter i grenseflaten gir best grep
 når $v = 0$; flyter bedre oppå når $v > 0$
- Noen typiske tallverdier :
 Stål mot is $\mu_s \approx 0.03$
 Stål mot plast $\mu_s \approx 0.2$
 Våt svamp mot bordflate $\mu_s > 1$

Friksjon i fluider [YF 5.3 ; LL 8]

Vi ser typisk på et (mer eller mindre) symmetrisk legeme, med linear utstrekning L (på tvers av bevegelsesretningen), som beveger seg med hastighet \vec{v} gjennom et fluid (dvs gass eller væske) med massetetthet ρ og dynamisk viskositet μ . F.eks. en ball som faller i luft :

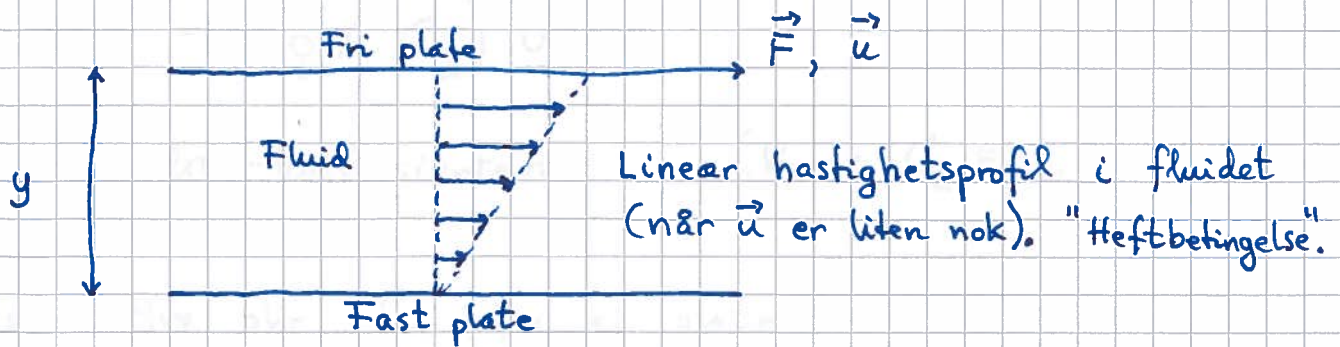


"Luftmotstand" : \vec{f}

~~area~~ $A = \pi r^2$

Definisjon og måling av μ :

(14)



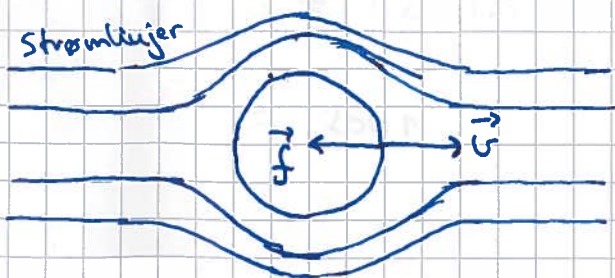
Exp. gir påkrevd kraft F (for å holde konstant \vec{u}) som er prop. med platearealet A og hastigheten u , samt omvendt prop. med plateavstanden y :

$$F = \mu \cdot \frac{A \cdot u}{y} ; \quad \mu = \text{fluidets dyn. viskositet} ; \quad [\mu] = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$$

Eks ($^{\circ}\text{C}/20^{\circ}\text{C}$):

Luft: $\mu \approx 2 \cdot 10^{-5}$ Vann: 10^{-3} Glyserol: 1 Sirup: 10^2

Laminær (pen, lagdelt) strømning når v er liten nok:



$$\vec{f} = -k \vec{u}$$

Kule med radius r : $k = 6\pi \mu r$ (Stokes' lov)

Turbulent strømming (uordnet) når v er "stor."

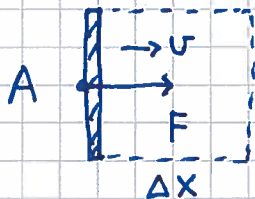
(15)

$$\vec{f} = -\left(\frac{1}{2} \rho A C_d\right) v^2 \hat{v}$$

C_d = drag-koeffisienten (Kule: $C_d \approx 0.5$)

Eks: Hva blir C_d for ei plate?

Løsn:



Luftmasse foran plate: $\Delta m = \rho \Delta V = \rho A \Delta x$

Må dytte med kraft F på plate for å holde konstant fart v , for massen Δm

endrer sin fart fra null til v i løpet av tid $\Delta t = \Delta x/v$

$$\Rightarrow F = \frac{\Delta m \cdot v}{\Delta t} = \frac{\rho A \Delta x v}{\Delta t} = \rho A v^2 \Rightarrow \underline{C_d = 2}$$

Eks: Hva er luftmotstanden for bilen Revolve når $v = 60 \text{ km/h}$?

Oppgitt: $A \approx 1.1 \text{ m}^2$, $C_d \approx 1.35$

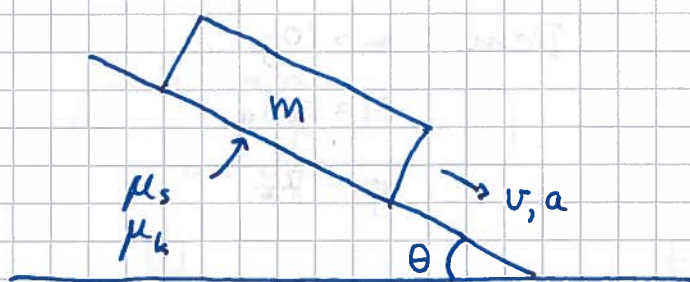
Løsn: $f = \frac{1}{2} \rho A C_d v^2$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1.2 \cdot 1.1 \cdot 1.35 \cdot \left(\frac{60}{3.6}\right)^2 \text{ N}$$

$$\approx \underline{250 \text{ N}}$$

Eks: Kloss på skrån

16



Problemløsningsstrategi: [YF 5 ; LL 3]

- Finner alle ytre krefter på klossen og tegner "fritt-legeme-diagram":



- Velger koordinatsystem og dekomponerer:



$$N = N_{\perp} ; N_{\parallel} = 0 , f = f_{\parallel} ; f_{\perp} = 0$$
$$G_{\perp} = mg \cos \theta ; G_{\parallel} = mg \sin \theta$$

- Bruker N1 ($\sum \vec{F}_i = 0$) eller N2 ($\vec{a} = \sum \vec{F}_i / m$):

$$N1, \perp : N = mg \cos \theta$$

$$N2, \parallel : mg \sin \theta - f = ma$$

$$\text{Hvis kloss i ro: } v=0, a=0 \Rightarrow f = mg \sin \theta$$

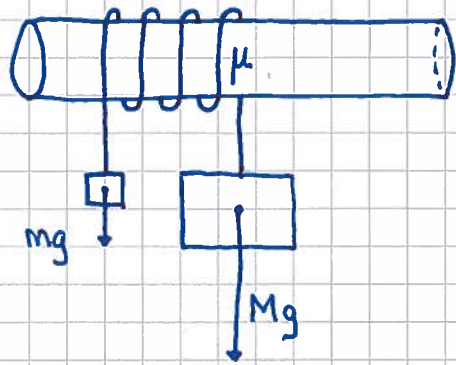
$$f \leq \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta \Rightarrow \tan \theta_{\max} = \mu_s$$

$$\text{Hvis klossen glir: } f = \mu_k N = \mu_k mg \cos \theta$$

$$a = g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$$

Eks : Snorfriksjon

[A.Wahl, "Med livet som innsats", youtube/nrk] (17)



μ = statisk friksjonskoeff.
mellom snor og rør

Finn minste m som holder
 M oppe når kontaktvinkelen
mellom snor og rør er φ .
(I figuren er $\varphi = 7\pi$)

Løsn:

Bruker $N1$ på en liten snorbit på lifen vinkel $d\alpha$: