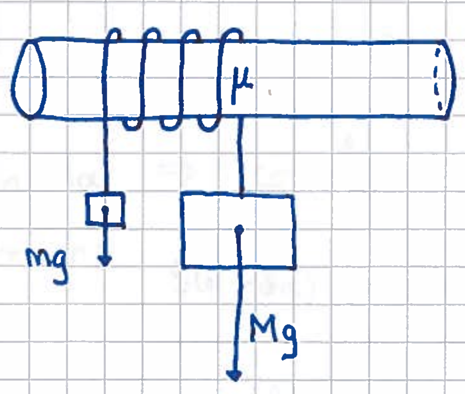
Eks: Snorfriksjon [A. Wahl, "Med livet som innsats", youtube/nrk] (17)

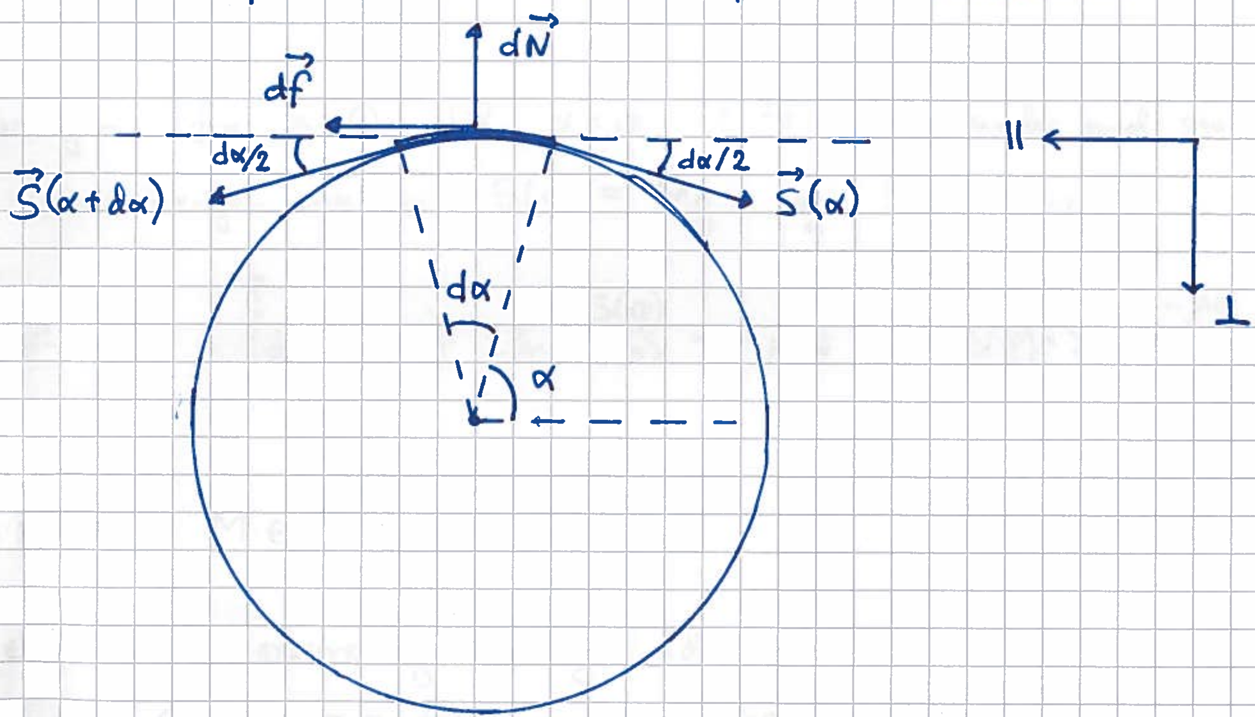



$\mu$ = statisk friksjonskoeff. mellom snor og rør

Finn minste m som holder M oppe når kontaktvinkelen mellom snor og rør er $\varphi$. (I figuren er $\varphi = 7\pi$)

Løsn:

Bruker N1 på en liten snorbit på liten vinkel $d\alpha$:




$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{S}(\alpha+d\alpha) + \vec{S}(\alpha) + d\vec{N} + d\vec{f} = 0$

der $\vec{S}$ = snordraget fra resten av snora
$d\vec{N}$ = normalkraft fra røret
$d\vec{f}$ = friksjonskraft —— " ——

Minste påkrevde m når $df = df_{max} = \mu\, dN$

Dekomponerer :

$$\parallel : \quad S(\alpha+d\alpha)\cdot\cos\frac{d\alpha}{2} - S(\alpha)\cdot\cos\frac{d\alpha}{2} + \mu\, dN = 0$$

$$\perp : \quad S(\alpha+d\alpha)\cdot\sin\frac{d\alpha}{2} + S(\alpha)\cdot\sin\frac{d\alpha}{2} - dN = 0$$

Liten $d\alpha \Rightarrow \cos\frac{d\alpha}{2} \approx 1 \,, \quad \sin\frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$

Videre er: $\quad S(\alpha+d\alpha) - S(\alpha) = dS \,, \quad S(\alpha+d\alpha) + S(\alpha) = 2S$

$$\Rightarrow \quad dS = -\mu\, dN \,, \quad S\, d\alpha = dN$$

$$\Rightarrow \quad dS = -\mu\, S\, d\alpha \quad \Rightarrow \quad dS/S = -\mu\, d\alpha$$

Dvs: Relativ reduksjon i snordraget, $dS/S$, er prop. med kontaktvinkelen $d\alpha$.

Integrasjon, fra $\alpha = 0$ til $\alpha = \varphi$ ($= 7\pi$ v/ $3\frac{1}{2}$ runder med snora) gir sammenhengen mellom $S(0) = Mg$ og $S(\varphi) = mg$ :

$$\int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = -\mu \int_0^{\varphi} d\alpha \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{S(\varphi)}{S(0)} = -\mu\varphi \quad \Rightarrow \quad \underline{S(\varphi) = S(0)\, e^{-\mu\varphi}}$$

Dvs: $\quad m = M e^{-\mu\varphi}$

I eksp. med plastrør og snor og lodd er

$\mu \approx 0.17 \,, \quad \varphi = 7\pi \quad$ og $\quad M = 500\,g$

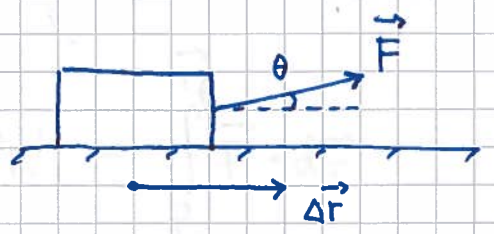
$$\Rightarrow \quad m = 500\,g \cdot \exp(-0.17\cdot 7\pi) \approx \underline{12\,g}$$

Omvendt : Påkrevd kraft for å heise $M$ opp gitt ved
$S(\varphi) = S(0)\cdot\exp(\mu\varphi)$

$$\Rightarrow \quad m = M e^{\mu\varphi} = 500\,g \cdot e^{0.17\cdot 7\pi} \approx \underline{21\,kg}$$

# Arbeid og energi [YF 6, 7; LL 4]

## Arbeid [YF 6.1 – 6.3 ; LL 4.1]



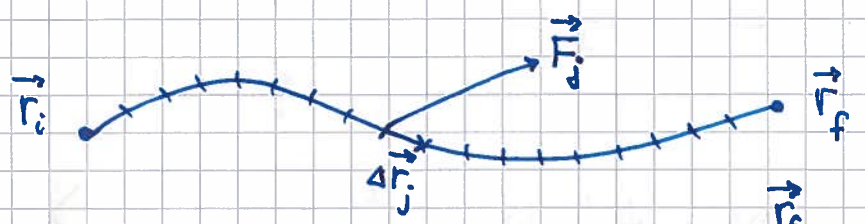

Kraften $\vec{F}$ utfører et arbeid på klossen,

arbeid $\stackrel{\text{def}}{=}$ kraft × forflytning

$$\Delta W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = F\cdot\Delta r\cdot\cos\theta$$

$$[W] = N\cdot m = J \quad \text{(joule)}$$

Generelt:




$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j\cdot\Delta\vec{r}_j \xrightarrow{\Delta r_j \to 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

= totalt arb. utf. av $\vec{F}$ ved forflytn. fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_f$

## Effekt [YF 6.4 ; LL 4.1]

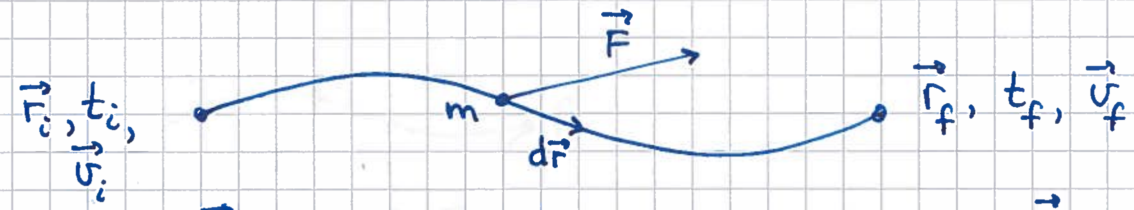
effekt $\stackrel{\text{def}}{=}$ arbeid (evt. energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$[P] = J/s = W \quad \text{(watt)}$$

$$1\ \text{kWh} = 1000\ \frac{J}{s}\cdot 3600\,s = 3.6\cdot 10^6\ J = 3.6\ MJ$$

## Kinetisk energi [YF 6.2 ; LL 4.2]




$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_i^f m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt = m \int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{v} \cdot d\vec{v} + d\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(v^2)$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \int_{v_i^2}^{v_f^2} d(v^2) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

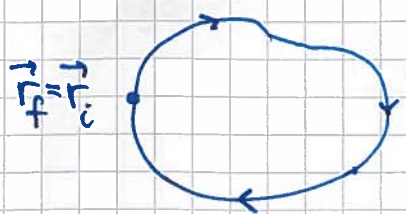
$$K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2 = \text{kinetisk energi}$$

$$\Rightarrow \boxed{W = K_f - K_i = \Delta K}$$

DVS: Arb. $W$ utført på legemet tilsvarer endringen i dets kin. energi, $\Delta K$.

## Konservativ kraft [YF 7.3 ; LL 4]

Anta en lukket kurve, dvs $\vec{r}_f = \vec{r}_i$ :

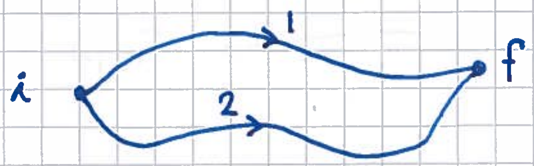



Hvis $K_f = K_i$, dvs $W = \Delta K = 0$,

dvs $\boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0}$

Da er $\vec{F}$ en konservativ kraft.

Arbeidet W er <u>uavhengig av veien</u> for kons. kraft $\vec{F}$ :




$$0 = \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \left\{\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r}\right\}_1 + \left\{\int_f^i \vec{F}\cdot d\vec{r}\right\}_2 = W_1 - W_2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{W_1 = W_2}$$

Både tyngdekrefter og coulombkrefter er konservative.

## Potensiell energi [YF 7.1 – 7.4 ; LL 4.3 – 4.4]

Definisjon : $\boxed{U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}}$ der $\vec{F}$ er konservativ

$U(\vec{r})$ = pot. energi i pos. $\vec{r}$, med <u>valgt</u> $U(\vec{r}_0) = 0$

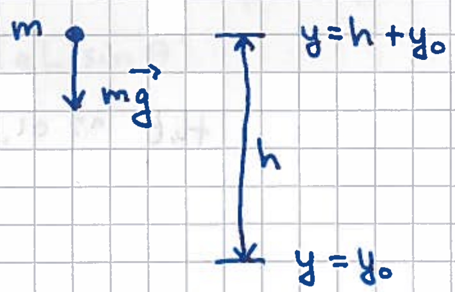
Dvs, kun <u>forskjeller</u> i $U$ har fysisk betydning.

[Fra Matte 2 :

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \iff \nabla \times \vec{F} = 0$$

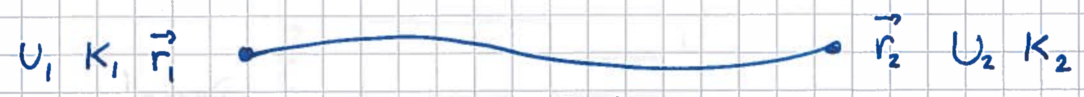
$$U = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r} \iff \vec{F} = -\nabla U \quad ]$$

I tyngdefeltet :




$$\Delta U = U(h+y_0) - U(y_0) = -\int_{y_0}^{y_0+h} mg\cdot(-dy) = \underline{mgh}$$

## Bevarelse av mekanisk energi [YF 7.1 – 7.3 ; LL 4.5]




$$\Delta K = K_2 - K_1 = W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$U_2 - U_1 = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \left( -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right) = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W$$

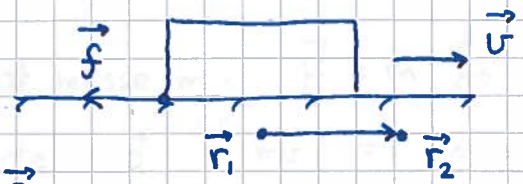
$$\Rightarrow \quad K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Tot. mek. energi } E = K + U \text{ er bevart i et konservativt system}}$

Eks: Rullende ring på skråplan [Jf. Lab. Mer om rulling senere]

En ring som ruller uten å gli har translasjonsenergi $K_{trans} = \frac{1}{2}mv^2$ og rotasjonsenergi $K_{rot} = \frac{1}{2}mv^2$. Hvorfor er rotasjonsfarten lik translasjonsfarten her? Fordi: En hel omdreining tar en tid T. Da har hele ringen flyttet seg en lengde $2\pi R$ langs skråplanet. Samtidig har hele ringens masse rotert en lengde $2\pi R$ (= omkretsen). Følgelig samme fart for translasjon av ringen som for rotasjon omkring sentrum! Dermed: $K = mv^2$. Hvis $K = 0$ der ringen starter, er $K = |\Delta U| = mgL\sin\theta$ når den har rullet lengden $L$ nedover skråplanet, som har helningsvinkel $\theta$. Dermed: $v = \sqrt{gL\sin\theta}$

# Friksjonsarbeid [YF 7.3 ; LL 4.5]




$$W_f = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \quad \text{fordi } \vec{f} \text{ alltid er rettet mot } d\vec{r}$$

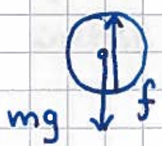
Mek. energi tapes ; omdannes til varme (og lyd etc)

$\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{f}$ er ikke konservativ

[Senere: Ved "ren rulling" utfører den statiske friksjonskraften (ideelt sett) ikke arbeid. Da er mek. energi bevart ! ]

Eks: Terminalhastighet for bordtennisball, $m = 2.7\,g$, $r = 20$ mm.

Løsn:

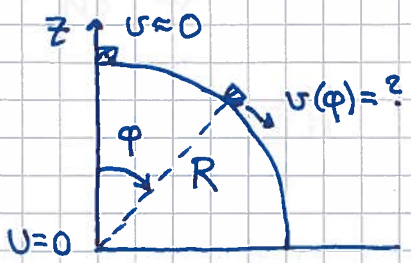



Når hastigheten blir stor nok, blir $f = mg$, og hastigheten endres ikke mer.

Med $f = \frac{1}{2} \rho A C_d \cdot v_t^2$, $\rho = 1.2\ \text{kg/m}^3$, $A = \pi r^2$ og $C_d = 0.5$ fås

$$v_t = \{2mg / \rho A C_d\}^{1/2} \approx \underline{\underline{8.4\ \text{m/s}}}$$

Eks: Friksjonsfritt kuppelformet tak




$E = mgR$

$K(\varphi) + U(\varphi) = \frac{1}{2} m v(\varphi)^2 + mg\,z(\varphi)$ ; $z(\varphi) = R\cos\varphi$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v(\varphi)^2 + mgR\cos\varphi = mgR$

$\Rightarrow \quad v(\varphi) = \sqrt{2gR(1-\cos\varphi)}$

[ Mister kontakt med underlaget når $N \to 0$ ]

# Impuls [YF 8 ; LL 5]

(= linear momentum = bevegelsesmengde)

N2 for gitt masse m: $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(m\vec{v}) = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

der vi innførte $\vec{p} \overset{\text{def}}{=} m\vec{v}$ = massens impuls ; enhet $[p] = \text{kg} \cdot \text{m/s}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Hvis } \Sigma \vec{F}_{ytre} = 0, \text{ er systemets/legemets impuls bevart}}$

# Kollisjoner [YF 8.3, 8.4 ; LL 5.3]

Elastisk støt : Mek. energi er bevart ($\Delta K = 0$)

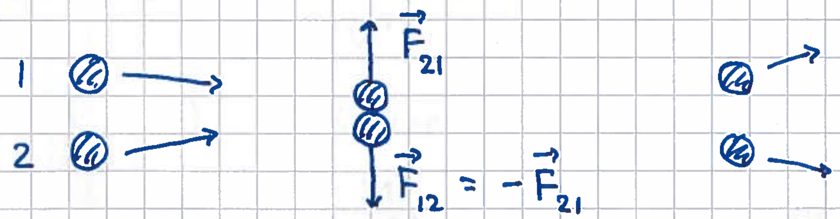
Uelastisk støt : Mek. energi tapes ($\Delta K < 0$)

Fullstendig uelastisk støt : Max energitap. Legemene henger sammen etter kollisjonen, med felles hastighet.

Kortvarige kollisjoner $\Rightarrow$ $\Delta U \approx 0$ i kollisjonen

Tapt kinetisk energi $\rightarrow$ Deformasjon, varme, lyd

Indre krefter endrer ikke systemets totale impuls.




$$N3 \Rightarrow \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$$

$$\overset{N2}{\Rightarrow} \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left\{\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P}_{tot} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \text{konst.}$$

# Sentralt støt [YF 8.2 – 8.4 ; LL 5.3]

dvs: kollisjon i en dimensjon

Før $\quad m \bullet\!\!\rightarrow v \qquad V \leftarrow\!\!\bullet M \qquad \longrightarrow +$

Etter $\quad v' \leftarrow\!\!\bullet m \qquad M \bullet\!\!\rightarrow V'$ $\qquad$ (dvs $V$ og $v'$ negative i figuren)

Kortrang kollisjon $\Rightarrow$ kan se bort fra ytre krefter i løpet av kollisjonen

$\Rightarrow \Delta p = 0$

$\Rightarrow mv + MV = mv' + MV'$

(a) Fullstendig uelastisk : $v' = V' = \dfrac{mv + MV}{m + M}$

(b) Delvis uelastisk : 1 ligning , 2 ukjente $\Rightarrow$ Trenger en opplysning til !

(c) Elastisk kollisjon : $\Delta K = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2$

Ligningene fra $\Delta p = 0$ og $\Delta K = 0$, etter litt omskriving :

$$m(v - v') = M(V' - V) \qquad (1)$$

$$m(v - v')(v + v') = M(V' - V)(V' + V) \qquad (2)$$

(2) dividert med (1) gir :

$$v + v' = V' + V \qquad (3)$$

$(3) \cdot M - (1)$ eliminerer $V'$ og gir

$$v' = \frac{M}{m + M}\left\{2V + v \cdot \frac{m - M}{M}\right\}$$

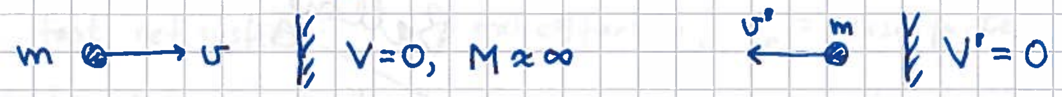
Ombytte av små og store symboler må gi tilsvarende løsning for $V'$ :

$$V' = \frac{m}{M + m}\left\{2v + V \cdot \frac{M - m}{m}\right\}$$

**Eks 1:** $m = M$. Ser da at $v' = V$ og $V' = v$.

Legemene bytter hastighet. Kjent fra: 

**Eks 2:** Ball mot vegg, elastisk støt

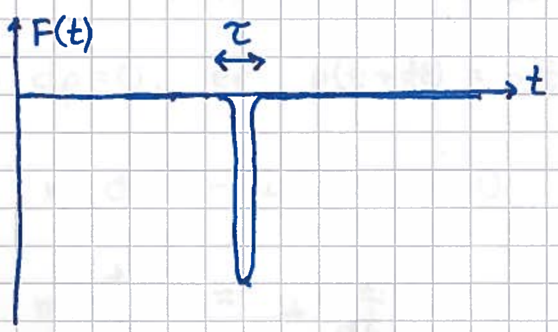



$$v' = \frac{M}{m+M}\cdot\left\{0 + v\cdot\frac{m-M}{M}\right\} = \frac{M}{M}\cdot v\cdot\left(\frac{-M}{M}\right) = -v \; ; \text{ OK:}$$

$$K' = \tfrac{1}{2}mv'^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 = K$$

$p' = mv' \neq p = mv$ : Veggen får impuls $2mv$ ; $V' = 0$ men $M = \infty$
$= -mv$ slik at $MV' \neq 0$


$$\vec{F}(t) = d\vec{p}/dt \;\Rightarrow\; \Delta\vec{p} = \int d\vec{p} = \underbrace{\int \vec{F}(t)\,dt}_{\text{"kraftstøt" ; "impulse" (eng.)}}$$




Bordtennis: $\tau \sim 2$ ms, $\Delta v \sim 50$ m/s

$$\Rightarrow \langle a\rangle \sim \frac{50}{0.002}\ \mathrm{m/s^2} = 25\ \mathrm{km/s^2} \gg g$$

$\Rightarrow$ Kan trygt se bort fra tyngden $mg$ i selve kollisjonen!

# Rakett  [YF 8.6 ; LL 5.4]

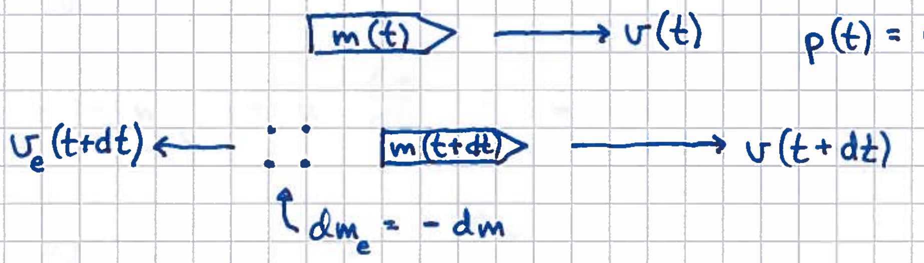

Mål i fast ref.system : $v$ = rakettfarten, $v_e$ = eksosfarten

Eksosfart relativt raketten : $u = v_e - v$ ; antas konstant $(u < 0)$

Bensinforbruk pr tidsenhet : $dm/dt < 0$

Anta først at $F_{ytre} = 0$. N2 gir da $dp/dt = 0$

Vi finner rakettens fartsøkning mellom $t$ og $t+dt$:




$$p(t) = m(t)v(t)$$

$$\begin{aligned} p(t+dt) &= m(t+dt)\,v(t+dt) + dm_e\, v_e(t+dt) \\ &= \{m(t)+dm\}\{v(t)+dv\} - dm\,\{u + v(t) + dv\} \\ &= m(t)v(t) + m\,dv - u\,dm \end{aligned}$$

Siden $dp = 0$, er $p(t+dt) = p(t) = m(t)v(t)$, slik at

$$m\,dv - u\,dm = 0$$

dvs

$$m\frac{dv}{dt} = u\frac{dm}{dt}$$

dvs

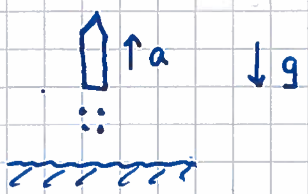
$$m\,a = F_{skyv}$$

med skyvkraft (rekyl) $F_{skyv} = u\dot{m} > 0$

(fordi $u < 0$ og $\dot{m} < 0$)

Etter oppskyting er raketten en stund i tyngdefeltet

$\Rightarrow$ $F_{ytre} = -mg$ kommer i tillegg




$$\Rightarrow \quad ma = u\dot{m} - mg$$

Total kraft på raketten: $F = u\dot{m} - mg$

Må selvsagt ha $F > 0$, dvs $u\dot{m} > mg$, for å ta av.

Øving:

$$-mg + u\frac{dm}{dt} = m\frac{dv}{dt} \qquad / \cdot (dt/m)$$

$$\Rightarrow \quad -g\,dt + u\frac{dm}{m} = dv$$

som kan integreres.

---

Neste: Partikkelsystem. Stive legemer. Rotasjonsdynamikk.