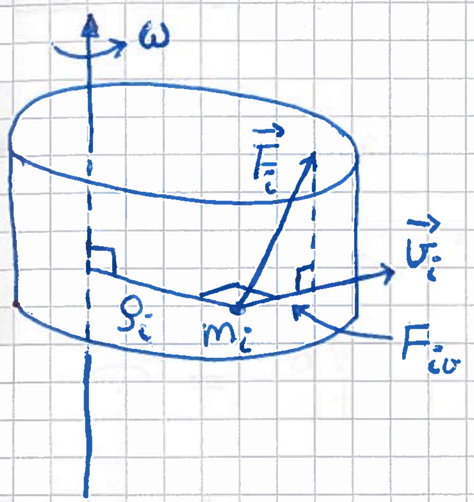
Krefter og rotasjon: Rotasjonsdynamikk

Akse med fast orientering

[YF 10.1, 10.2 ; LL 6.2]

- Dekker "det meste" (inkl. labprosjektet)
- Essensielt et 1D-problem
- Vi ser på rotasjonsdelen av den totale bevegelsen



$v_i = \rho_i \omega$

F_{iv} = komponenten langs $\vec{v}_i$ av ytre kraft $\vec{F}_i$ på m_i

Triks: Regner ut tilført effekt, $P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$, på to måter.

(1) $$P = \sum_i F_{iv} v_i = \left\{ \sum_i F_{iv} \rho_i \right\} \omega = \underline{\tau \omega}$$

der $\tau = \sum_i F_{iv} \rho_i$ = netto ytre <u>dreiemoment</u> på legemet, mhp rotasjonsaksen ("kraft × arm")

(2) Bruker N2: $$P = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i \overset{\text{(se s. 20)}}{=} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_i m_i v_i^2 =$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \underbrace{\left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\}}_{= I} \omega^2 = \frac{1}{2} I \frac{d}{dt} \omega^2 = \frac{1}{2} I \cdot 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dt} = \underline{I \omega \dot{\omega}}$$

$= I$ = legemets treghetsmoment, mhp rot.aksen

Sammenligning av de to uttrykkene for P gir

$$\boxed{\tau = I\,\mathring{\omega}}$$

Newtons 2. lov for rotasjon om akse med fast orientering.

Sammenlign med N2 for translasjon : $F = m\,\mathring{v}$

Arbeid utført av dreiemomentet [YF 10.4 ; LL 6.4]

Fra sammenhengene

$$P = \tau\,\omega = \tau\,\frac{d\varphi}{dt}$$

og

$$P = \frac{dW}{dt}$$

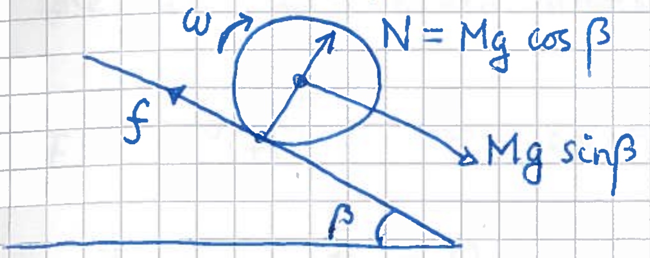
følger det direkte

$$\boxed{dW = \tau\, d\varphi}$$

= arbeidet utført av dreiemomentet τ i løpet av en liten vinkelendring (en liten rotasjon) $d\varphi$.

Sammenlign arbeid utført ved translasjon: $dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$

Eks 1: Rulling på skråplan (se s. 38)



Ren rulling: $\omega = V/R$, $\dot{\omega} = \dot{V}/R$

$I_0 = cMR^2$

N2, rot. om akse gjennom CM: $\tau = I_0\dot{\omega}$; $\tau = f \cdot R$

$$\Rightarrow f \cdot R = cMR^2 \cdot \dot{V}/R \Longrightarrow f = cM\dot{V}$$

N2, transl. langs skråplanet: $Mg\sin\beta - f = M\dot{V}$

$$\Rightarrow Mg\sin\beta = M\dot{V} + cM\dot{V} = (1+c)M\dot{V} \Rightarrow \underline{\underline{\dot{V} = \frac{g\sin\beta}{1+c}}}$$

"Eks 2": Rulling på krum bane (lab)

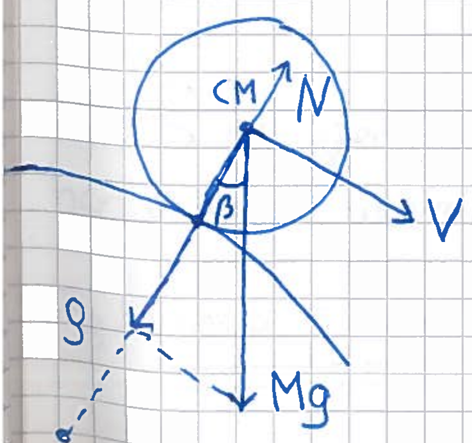
Med varierende helningsvinkel $\beta(x)$ er akselerasjonen langs banen fortsatt

$$\dot{V} = \frac{g\sin\beta}{1+c},$$

(så lenge vi ser bort fra luft-motstand og "rullefriksjon")

men ikke lenger konstant.

Normalkraften N er nå heller ikke konstant, for med krum bane har vi også akselerasjon normalt banen:



$A_\perp = V^2/\rho$; ρ = krumningsradien (s.6)

$$MA_\perp = \begin{cases} Mg\cos\beta - N & ; \text{ krumning nedover} \\ N - Mg\cos\beta & ; \text{ krumning oppover} \end{cases}$$

Kan løse N2 langs banen numerisk med f.eks. eulermetoden:

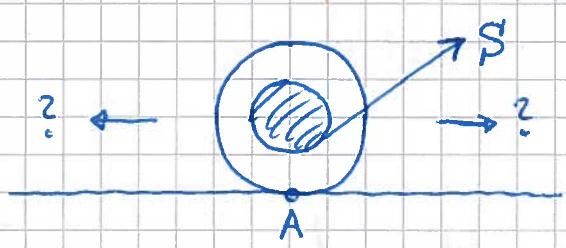
$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{g \sin\beta}{1+c} \Rightarrow \Delta V = \frac{g \sin\beta}{1+c}\Delta t$$

$$V_0 = 0 \,, \quad t_0 = 0 \qquad (\text{f.eks.})$$

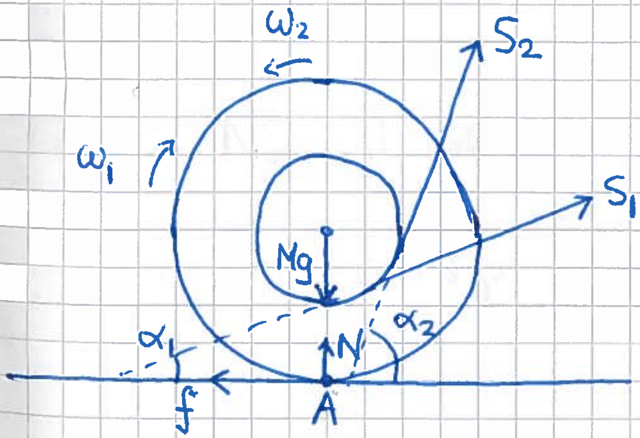
$$V_1 = \frac{g \sin\beta_0}{1+c}\Delta t, \qquad \Delta S_1 = \frac{1}{2} V_1 \Delta t = \frac{1}{2} A_0 (\Delta t)^2$$

osv osv. Her må forflytninger (ΔS_1 osv) dekomponeres, detaljene tas med labveileder.

Eks 3: Hvilken vei ruller snella?



Velger kontaktlinjen mellom snelle og underlag som referanseakse A.



Mg, N og f har <u>null arm</u> mhp aksen A

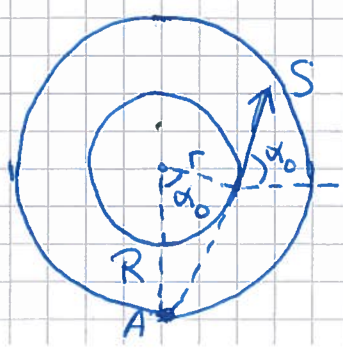
$\Rightarrow$ Kun snordrag S har dreiemoment mhp aksen A

S_1 : Liten $\alpha \Rightarrow$ Mot høyre

S_2 : Stor $\alpha \Rightarrow$ Mot venstre

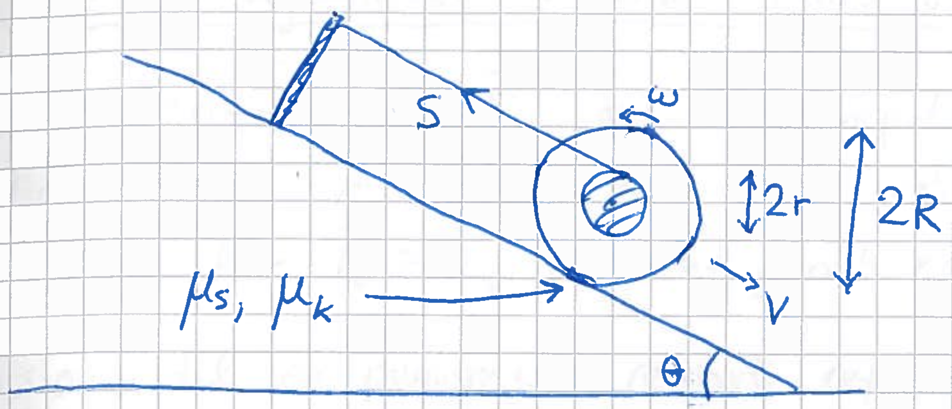
Hvis $\vec{S}$ går gjennom A, har vi statisk likevekt:

Fig $\Rightarrow$ $\cos\alpha_0 = r/R$



$$\Sigma \tau_A = 0$$
$$\Downarrow$$
Ingen rotasjon!

Eks 4: Snelle på skråplan (Øving 6)



Hva er max vinkel θ_0 uten at snella "sklirer baklengs" nedover?

Tips: N1 ∥ skråplanet og N1 for rot. om CM,

$f = f_{max} = \mu_s N$

Hvis $\theta > \theta_0$, hva blir snordraget S og akselerasjonen a ?

Tips: N2 ∥ skråplanet og N2 for rot. om CM,

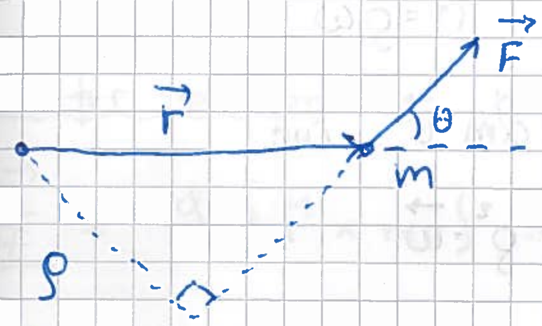
$f = \mu_k \cdot N$, samt "en slags rullebetingelse" $V = \omega r$

Rotasjonsdynamikk i 3D (med vektorer)

Merk: Dreiemoment $\vec{\tau}$ og dreieimpuls $\vec{L}$ beregnes alltid relativt et (felles) fritt valgt referansepunkt $\vec{r}_0$. Vi velger her $\vec{r}_0 = 0$, dvs ref. punkt er i origo.

Posisjonen til en punktmasse relativt ref. punktet blir da ganske enkelt $\vec{r}$. Med et annet valg for $\vec{r}_0$ blir selvsagt massens posisjon relativt ref.punktet $\vec{r} - \vec{r}_0$.

Dreiemoment [YF 10.1 ; LL 5.5, 6.4]



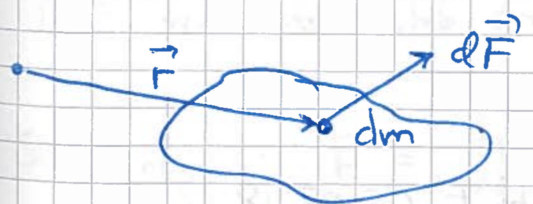
$\vec{F}$ sitt dreiemoment på m:

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

Retning: $\vec{\tau} \perp$ både $\vec{r}$ og $\vec{F}$ (Her: ut av planet)

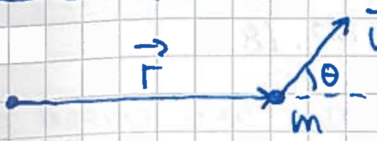
Abs. verdi: $\tau = r \cdot F \cdot \sin\theta = \rho \cdot F$ (som s. 40)

For et partikkelsystem:



$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{F}$ = totalt dreiemoment på systemet

Dreieimpuls [YF 10.5 ; LL 6.6]



$\vec{p} = m\vec{v}$ (= impulsen)

Dreieimpulsen til m: $\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$

$\vec{L} \perp \vec{r}$ og $\vec{p}$; $L = |\vec{L}| = rp\sin\theta$

For partikkelsystem:

$d\vec{p} = \vec{v}\,dm$

$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v}\,dm$ = systemets totale dreieimpuls

N2 for rotasjon [YF 10.5 ; LL 6.6]

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\vec{r} \times m\vec{v}\right\} = m\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}}_{=\vec{v}\times\vec{v}=0} + m\vec{r} \times \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{=\vec{a}}$$

$$\stackrel{N2}{=} \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

Dvs: $\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$

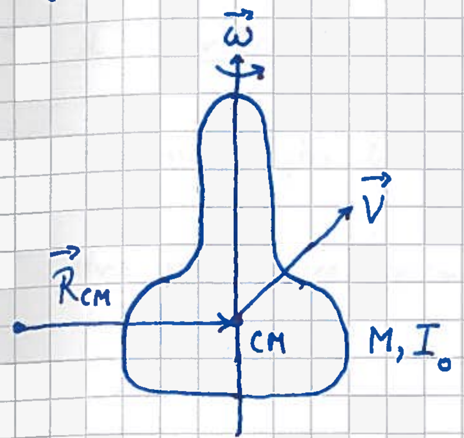
$\vec{\tau}$ = netto ytre dreiemoment på systemet

$\vec{L}$ = systemets totale dreieimpuls

Sammenlign: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ (N2 for translasjon)

$\vec{L}$ for et stivt legeme [YF 10.5 ; LL 6.6]

For legeme med refleksjonssymmetri om rotasjonsaksen :
(symmetrisk når $\vec{\rho} \to -\vec{\rho}$)



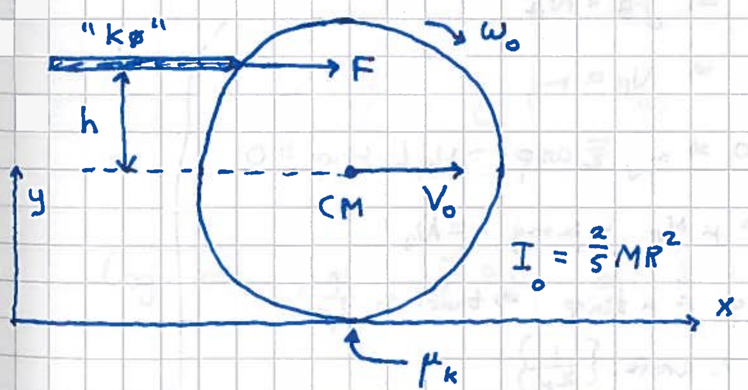
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{L}_b + \vec{L}_s \\ &= \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} + I_0\,\vec{\omega}\end{aligned}}$$

(Bevis: Se notat)

Banedreieimpuls, pga bevegelsen til CM : $\vec{L}_b$

Indre dreieimpuls, pga rotasjon om CM : $\vec{L}_s$ ("spinn")

Eks: Snooker [LL 6.7, øving 6]



Bestem kulas bevegelse etter kortvarig støt ($\Delta t \gtrsim 0$) i høgde h over senterlinjen, med kraft F ($F \gg f$; f = friksjonskraft fra underlaget).

N2, transl. $\Rightarrow F\,\Delta t = \Delta p = MV_0$

N2, rot. $\Rightarrow \tau\,\Delta t = Fh\,\Delta t = \Delta L = I_0\,\omega_0 = \frac{2}{5}MR^2\omega_0$

$\Rightarrow$ Sluring i starten, med mindre $\omega_0 = V_0/R$, dvs $h = \ldots$

Vanseft ren rulling etter hvert, med $\omega = V/R$, og med origo (i bordflaten) som ref. punkt:

$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} = -RMV\,\hat{z}$

$\vec{L}_s = I_0\,\vec{\omega} = -\frac{2}{5}MR^2\cdot(V/R)\,\hat{z} = -\frac{2}{5}RMV\,\hat{z}$

Bevaringslover (oppsummering)

- I isolert system (ingen ytre krefter) er total energi E, impuls $\vec{p}$ og dreieimpuls $\vec{L}$ bevart
- I konservativt system er mekanisk energi $K + U$ bevart
- Hvis netto ytre kraft på et system er null, er total impuls $\vec{p}$ bevart
- Hvis netto ytre dreiemoment på et system er null, er total dreieimpuls $\vec{L}$ bevart

Statisk likevekt [YF 11.1 – 11.3 ; LL 7.1]

Stivt legeme forblir i ro ($\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$) bare dersom netto ytre kraft og netto ytre dreiemoment er null:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{konst.}$$

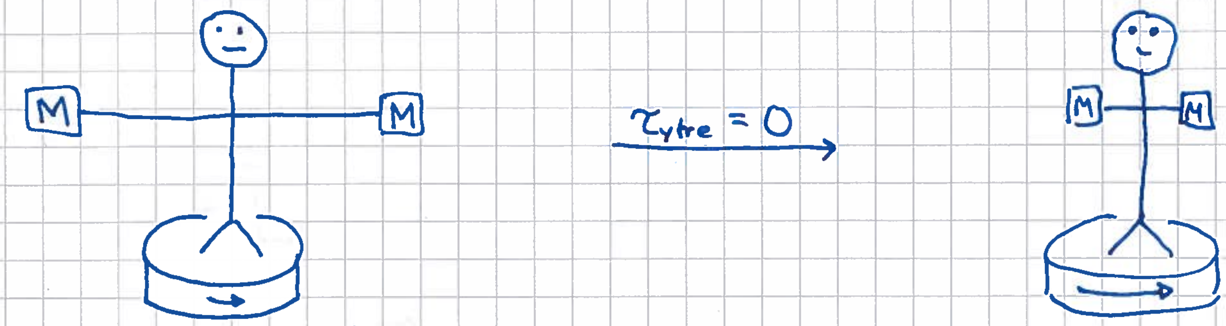
$$\sum_i \vec{\tau}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{konst.}$$

(og da f.eks. $\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$)

Noen eksempler / demonstrasjoner fra rotasjonsdynamikken:

Eks 1: Piruett [YF 10.6 ; LL 6.5]

Prinsippet er at med $L = I\omega$ vil redusert I gi økt ω dersom L er bevart.



$\omega_0 = L_0 / I_0$

$\xrightarrow{\tau_{ytre} = 0}$

$L_1 = L_0$

$I_1 < I_0$

$\omega_1 = \frac{L_1}{I_1} = \omega_0 \frac{I_0}{I_1} > \omega_0$

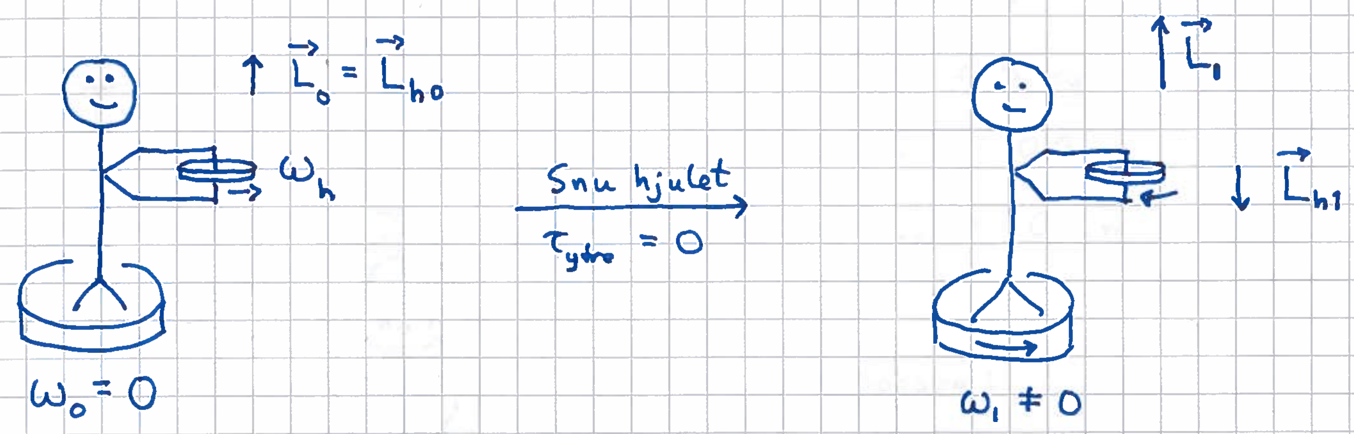
Muskelenergi brukes til å gjøre arbeid på de to bøkene (M).

$\Rightarrow$ Kinetisk energi <u>øker</u>:

$K_0 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2$

$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0 \cdot \omega_1 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 \cdot \frac{\omega_1}{\omega_0} = K_0 \cdot \frac{\omega_1}{\omega_0} > K_0$

Eks 2: Bevaring av $\vec{L}$ for sykkelhjul og student



$$\vec{L}_1 + \vec{L}_{h1} = \vec{L}_0 = \vec{L}_{h0}$$

$$\vec{L}_{h1} = -\vec{L}_{h0} \qquad \text{(hjulet er snudd opp ned)}$$

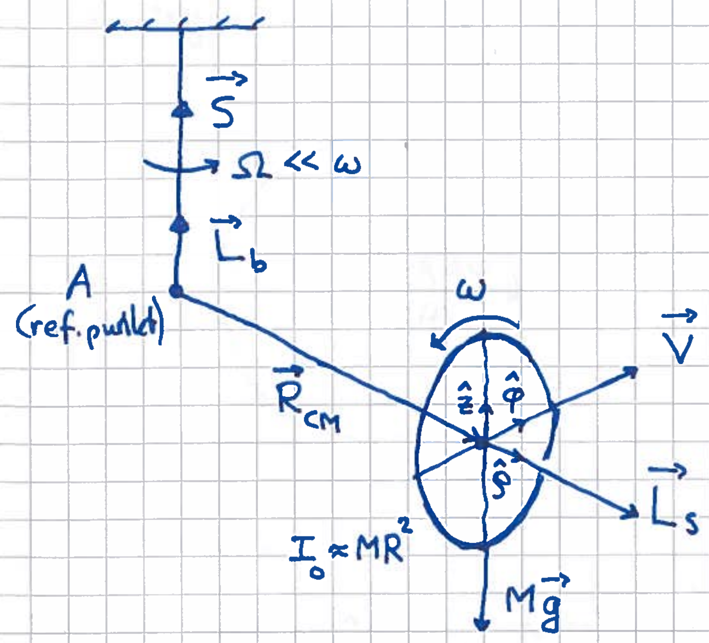
$\Rightarrow$

$$\vec{L}_1 = 2\vec{L}_0$$

og student/stol/hjul roterer med

vinkelhastighet $\omega_1 \neq 0$

Eks 3: Presesjon [YF 10.7 ; LL 6.10]



Tallverdier, sykkelhjul:

$M \approx 5$ kg

$R \approx 0{,}3$ m

$R_{CM} \approx 0{,}2$ m

Oppgave:

Finn sammenheng mellom Ω og ω (når $\Omega \ll \omega$).

Exp: Når hjulet settes i rotasjon for hånd, blir $T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 5$ s.

Løsning: Vi bruker N2 for rotasjon, med A som ref. punkt.

$$\vec{\tau}_A = d\vec{L}_A / dt$$

Her er

$$\vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} = R_{CM}\,\hat{\rho} \times (-Mg\,\hat{z}) = R_{CM} M g\,\hat{\varphi}$$

og

$$\vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s$$

med

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} = R_{CM}\,\hat{\rho} \times MV\hat{\varphi} = R_{CM} M V\,\hat{z}$$

$$= R_{CM}\, M\, R_{CM}\,\Omega\,\hat{z} = R_{CM}^2\, M\,\Omega\,\hat{z}$$

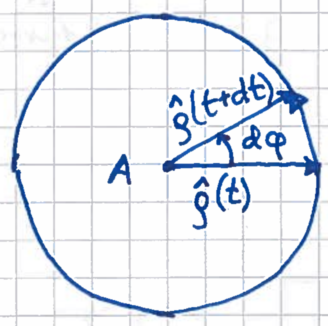
$$\vec{L}_s = I_0\,\vec{\omega} = MR^2\omega\,\hat{\rho}$$

Siden $\omega \gg \Omega$, er $L_s \gg L_b$, slik at $\vec{L}_A \approx \vec{L}_s = MR^2\omega\,\hat{\rho}$

Her er M, R og ω konstante størrelser (vi neglisjerer at ω avtar litt med tiden)

$$\Rightarrow \; d\vec{L}_A/dt = MR^2\omega \, d\hat{\rho}/dt$$

Vi tegner opp $\hat{\rho}(t)$ og $\hat{\rho}(t+dt)$, sett ovenfra:



$$d\hat{\rho} = 1 \cdot d\varphi \cdot \hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \; \frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\hat{\varphi} = \Omega\hat{\varphi}$$

Dermed:

$$R_{CM} M g \, \hat{\varphi} = MR^2 \omega \Omega \, \hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \; \omega = \frac{R_{CM}\, g}{R^2 \Omega}$$

Hjulets omløpstid (om sin egen aksling): $T_\omega = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$$\frac{2\pi}{T_\omega} = \frac{R_{CM}\, g \, T_\Omega}{R^2 \cdot 2\pi}$$

$$\Rightarrow \; T_\omega = \frac{(2\pi R)^2}{R_{CM}\, g \, T_\Omega} \approx \frac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10 \cdot 5}\,\mathrm{s} \approx 0.36\,\mathrm{s} \approx 0.4\,\mathrm{s}$$