Svingninger

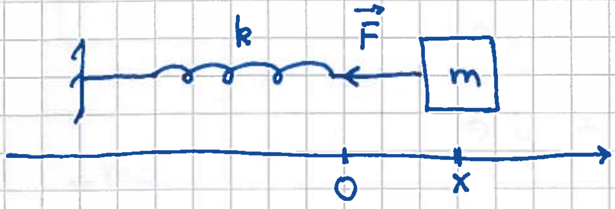
[YF 14 ; LL 9]

Periodisk oppførsel omkring en likevekt

Eks: Masse / fjær. Pendel. Gitarstreng. Atom i molekyl. etc

Harmonisk oscillator

[YF 14.2 ; LL 9.1–9.3]



x = posisjonen til m

= fjæras forlengelse $(x > 0)$

eller sammenpressing $(x < 0)$

Likevekt når m er i pos. $x = 0$

$\vec{F}$ = kraft på m fra fjæra ; virker alltid i retning tilbake mot likevekt

Ei ideell fjær følger Hookes lov:

$$\boxed{\vec{F} = -kx\,\hat{x}}$$

k = fjærkonstanten ; $[k] = \mathrm{N/m}$

N2 : $-kx = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

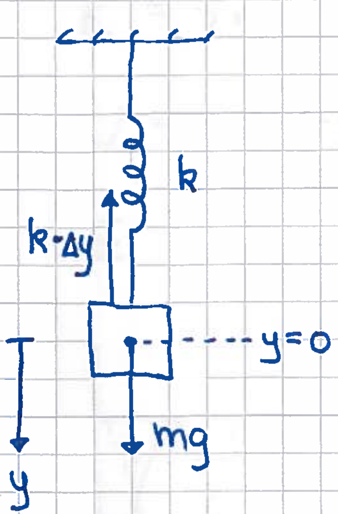
Enkel harmonisk oscillator i 1D.

Løsning: $x(t) = B\cos\omega_0 t + C\sin\omega_0 t$

eller $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Konstantene B og C, evt A og φ, fastlegges med to initialbetingelser, f.eks $x = x_0$ og $\dot{x} = v_0$ ved tid $t = 0$.

En <u>konstant</u> tilleggskraft endrer likevektsposisjonen, men ikke ligningen:



Lodd i ro når $\Sigma F = 0 \Rightarrow k\,\Delta y = mg$

Fjæra forlenges med $\Delta y = mg/k$

Anta CM i $y = 0$ i strukket likevekt.

N2, når CM er i pos. y:

$$m\ddot{y} = \Sigma F = mg - k(\Delta y + y) = -ky$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = k/m$$

Mange størrelser er kjent fra sirkelbevegelse:

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ = oscillatorens utsving fra likevekt (f.eks. posisjon)

A = amplitude = max utsving fra likevekt ; $[A] = [x]$

ω_0 = vinkelfrekvens ; $[\omega_0] = s^{-1}$

$T = 2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr hel svingning ; $[T] = s$

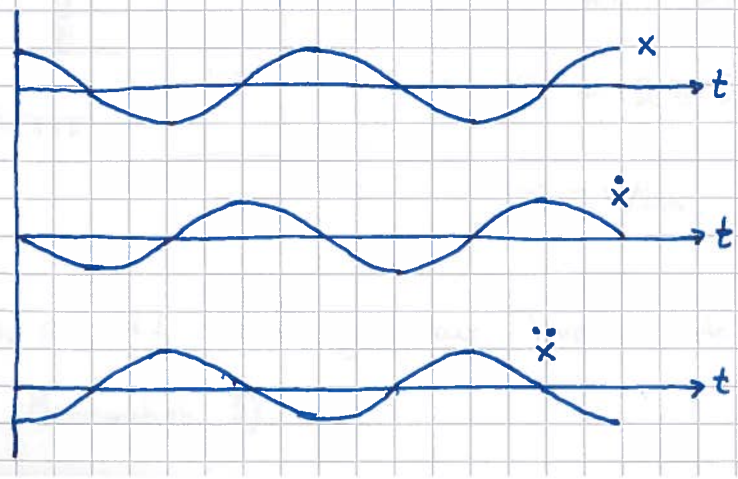
$f = 1/T$ = frekvens = antall svingninger pr tidsenhet; $[f] = s^{-1} = Hz$

$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

φ = fasekonstant ; $[\varphi] = 1$

$\dot{x}(t) = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi) = \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2)$ = hastighet

$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi) = \omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$ = akselerasjon



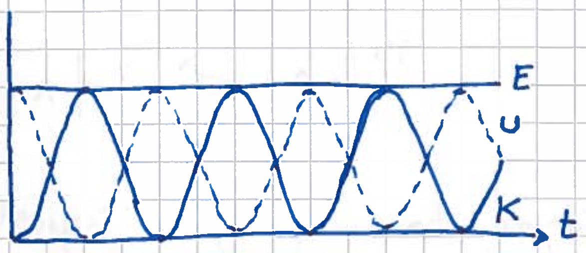
Energi i harmonisk oscillator [YF 14.3 ; LL 9.4]

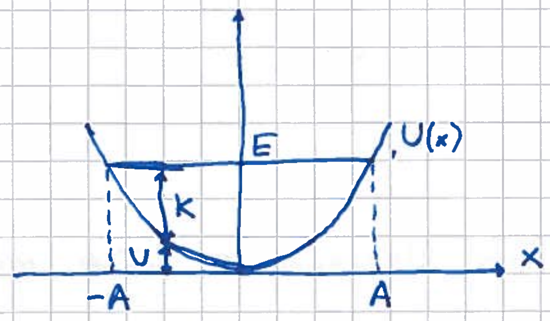
Systemet er konservativt, og total mekanisk energi er bevart:

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$U = -\int_0^x (-kx)\,dx = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 \omega_0 t$$

$$E = K + U = \frac{1}{2} k A^2$$





Dempet fri svingning [YF 14.7 ; LL 9.7]

Vi antar (for enkelhets skyld!) friksjonskraft på formen

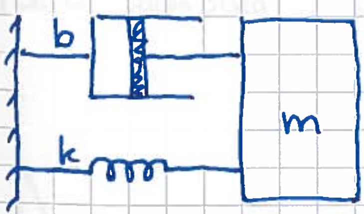
$$f = -b\dot{x}$$

dvs som ved langsom bevegelse i et fluid.

[Alternativ:

Større hastighet i fluid: $f = -D\dot{x}^2$

Tørr friksjon : $f = \mu_k N$]



N2: $-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

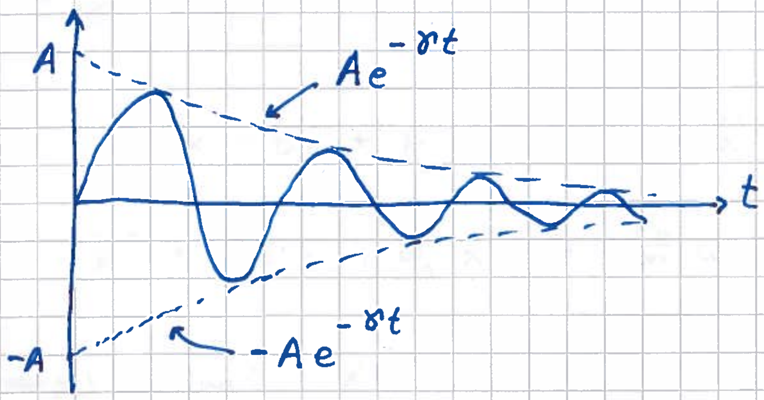
$$\gamma = b/2m, \quad \omega_0^2 = k/m, \quad [\gamma] = [\omega_0] = s^{-1}$$

Løsn. av N2 avhenger av hvor sterk demping vi har.

(Se Matematikk 3)

Underkritisk ("svak") demping, $\gamma < \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) \quad ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



Dempet svingning med amplitude som avtar eksponentielt med t, $Ae^{-\gamma t}$; etter tid $1/\gamma$ er amplituden redusert til $\frac{A}{e} \approx 0.37A$.

Overkritisk demping ("sterk" demping), $\gamma > \omega_0$

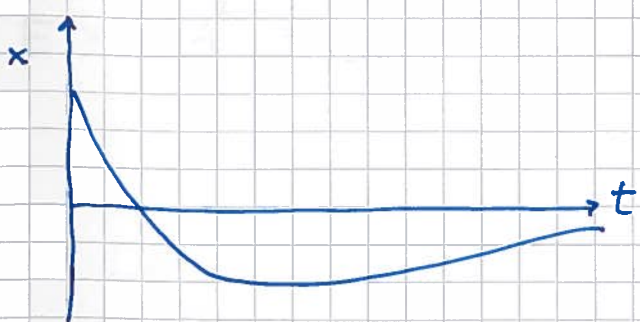
$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}$$

$$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad , \quad \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Kritisk demping, $\gamma = \omega_0$ (slik at $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma$)

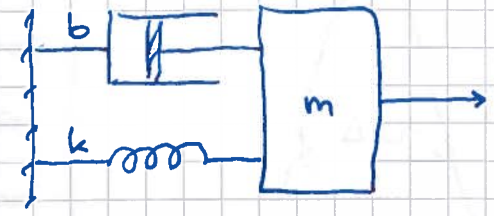
$$x(t) = (A + Bt) e^{-\gamma t}$$

Minste demping som ikke gir svingninger; fint i støtdempere!



(Her er $x(0) = A > 0$ og $\dot{x}(0) < 0$)

Tvungen svingning og resonans [YF 14.8 ; LL 9.9]



$F(t) = F_0 \cos \omega t$ = ytre harmonisk kraft

N2 : $-kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \qquad \left(2\gamma = \frac{b}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}\right)$$

Generell løsning: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Homogen løsning: Løsning av $\ddot{x}_h + 2\gamma\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$

Fra s 56: $x_h \sim \exp(-\gamma t) \to 0$ når $t \gg 1/\gamma$

Dvs, x_h er kun relevant for innsvingningsforløpet.

La oss nå anta at $t \gg 1/\gamma$. Da er

$$x(t) = x_p(t) = A(\omega)\sin\left[\omega t + \varphi(\omega)\right]$$

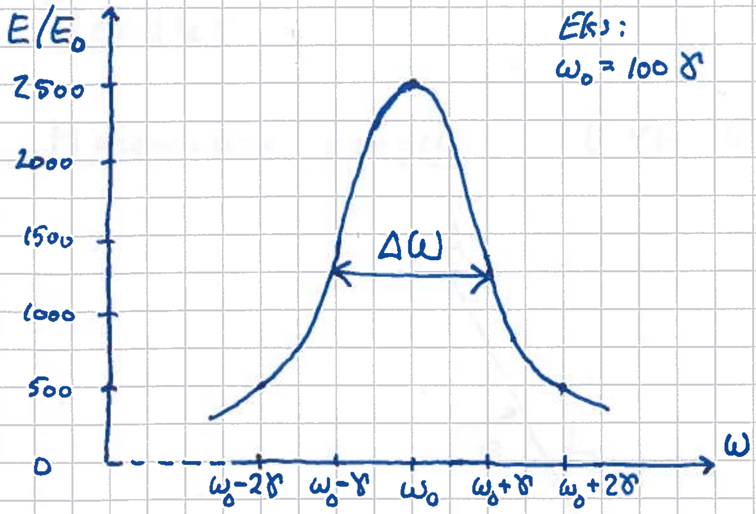
Innsetting av x_p, $\dot{x}_p$ og $\ddot{x}_p$ i N2 gir

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\left\{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2\right\}^{1/2}} \quad ; \quad \tan\varphi(\omega) = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{2\gamma\omega}$$

Resonans: Vi ser at A blir stor hvis $\omega \approx \omega_0$ og $\gamma \ll \omega_0$.

Oscillatorens energi:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \ldots = E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \quad ; \quad E_0 = F_0^2/2k$$



Eks: $\omega_0 = 100\,\gamma$

ω	E/E_0
ω_0	2500
$\omega_0 \pm \gamma$	1250
$\omega_0 \pm 2\gamma$	500

Resonanskurvens halvverdibredde: $\Delta\omega \approx 2\gamma$

Oscillatorens Q-faktor: $Q \equiv \omega_0/\Delta\omega \approx \omega_0/2\gamma$

Dvs: Smal resonanskurve $\Rightarrow$ Høy Q-faktor (Q=50 ovenfor)

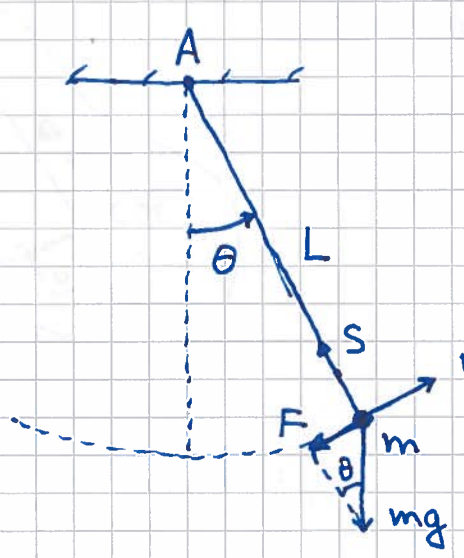
Jo mindre demping γ, jo smalere og høyere resonanskurve.

Exp: Stav med messinglodd.

Plotter A^2 som funksjon av frekvens f.

Pendler

Matematisk pendel [YF 14.5 ; LL 9.6]



Punktmasse m i masseløs snor/stang.

N2 ∥ sirkelbanen: $F = ma$ med $F = -mg\sin\theta$ og $a = \dot{v} = L\ddot{\theta}$

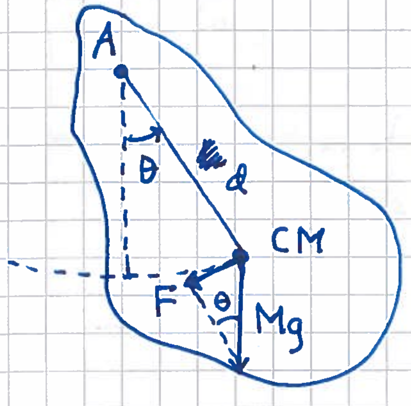
$$\Rightarrow \quad -mg\sin\theta = mL\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Antar små utsving fra likevekt, $|\theta| \ll 1 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = g/L}$$

Fysisk pendel [YF 14.6 ; LL 9.6]



Stivt legeme.

Masse M.

Treghetsmoment I mhp aksen A.

N2 for rotasjon om A:

$$\tau = I\ddot{\theta} \quad , \quad \text{med} \quad \tau = -F\cdot d = -Mgd\sin\theta$$

(der vi regner τ som positiv mot klokka)

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I}\sin\theta = 0$$

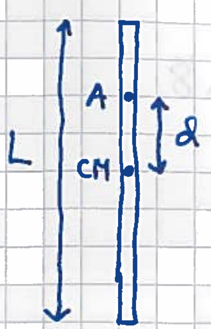
Antar små utsving $\Rightarrow$ $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{Mgd}{I}}$$

Hvis matematisk pendel ($d = L$):

$$I = ML^2 \Rightarrow \omega_0^2 = g/L \quad ; \quad \text{OK}$$

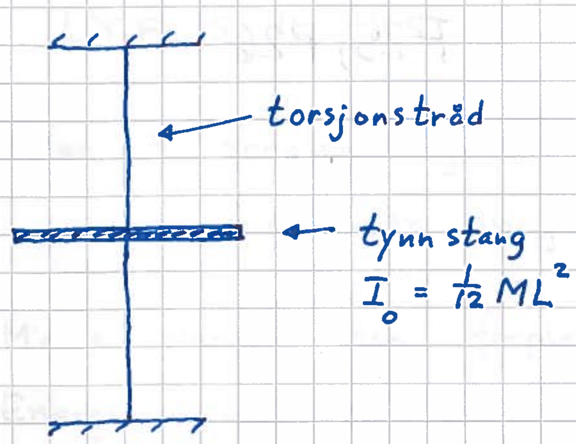
Hvis tynn stang:



$$I = I_0 + Md^2 = \tfrac{1}{12}ML^2 + Md^2$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{gd}{d^2 + L^2/12} \Rightarrow T(d) = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{d^2 + L^2/12}{gd}}$$

Torsjonspendel [YF 14.4 ; LL 9.6]

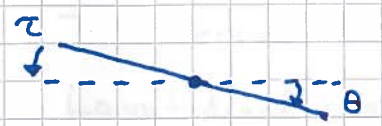


Torsjonstråden motsetter seg vridning. Virker på stanga med dreiemoment prop. med vridningsvinkelen,

$$\tau = -\kappa\,\theta \qquad \text{(Hookes lov)}$$

der κ = torsjonsstivheten

[$\kappa = \pi G d^4 / 32 \ell$; der G, d og ℓ er hhv trådens skjærmodul, diameter og lengde]



N2 for rotasjon om trådens akse :

$$\tau = I_0 \ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = \kappa / I_0}$$

Exp : $M = 50\,\text{g}$, $L = 11\,\text{cm}$. Mål svingetida T og bestem κ.

Løsn : $T = 0.8\,\text{s}$

$$\Rightarrow \kappa = I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{12} ML^2 \cdot 4\pi^2 / T^2 = ML^2 \pi^2 / 3T^2$$

$$= (0.050 \cdot 0.11^2\, \pi^2 / 3 \cdot 0.8^2)\ \text{Nm}$$

$$= \underline{0.003\ \text{Nm}}$$