BØLGEFYSIKK

[YF 15, 16, 11.4 ; LL 10, 7.2]

bølge = forplantning av forstyrrelse fra likevekt,
f. eks. en svingning

Masse svinger men forplanter seg ikke.
Energi svinger og forplanter seg med bølgen.

Transversal bølge (T) : Masse svinger ⊥ bølgens forplantningsretning
Longitudinal bølge (L) : —— " —— ∥ —— " ——

Eksempler:
Streng/snor/fjær : T-utsving av massen i strengen/snora/fjæra
Lyd : L-utsving av molekyler i mediet
Overflatebølger på vann: T- og L-utsving av vannet
Elektromagnetiske (EM) bølger: El. felt $\vec{E}$ og magn. felt $\vec{B}$
svinger ⊥ forplantningsretningen (dvs T-bølger)

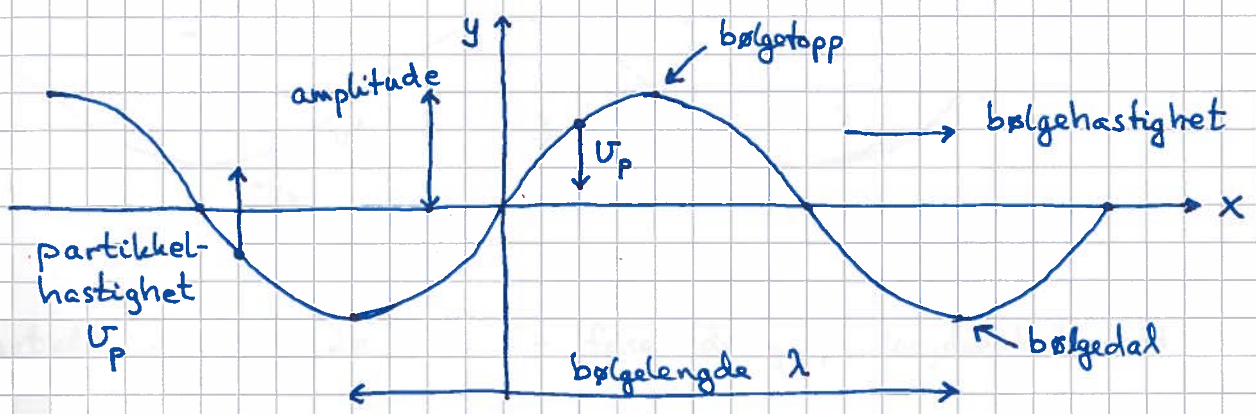
Bølgefenomener:
Interferens, diffraksjon
Stående bølger, resonans
Dopplereffekt
Brytning. Dispersjon (⇒ Regnbue osv)
Sjokkbølger

Harmoniske bølger [YF 15.2, 15.3 ; LL 10.2]

Vilkårlig bølgetog /-pakke/-puls kan uttrykkes som en sum av harmoniske bølger ; jf Fourierrekker

Anta (f.eks.) en T-bølge på en ∞ lang streng.

$y(x,t)$ = utsving fra likevekt i pos. x ved tid t



T = periode = tid som bølgemønsteret bruker på å flytte seg en bølgelengde λ

$\Rightarrow$ bølgehastigheten er $v = \lambda / T$ (kalles også fasehastigheten)

f = frekvens = antall svingninger pr tidsenhet ved gitt posisjon x

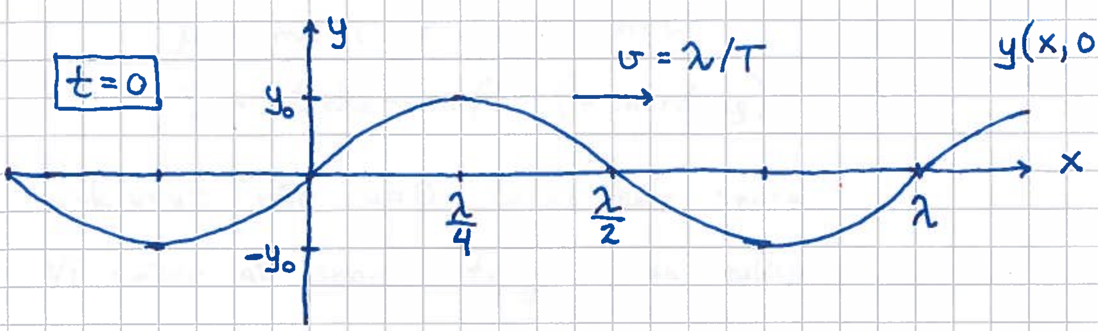
$\Rightarrow \quad f = 1/T \qquad \Rightarrow \quad v = \lambda \cdot f$

ω = vinkelfrekvens = bølgens faseendring pr tidsenhet ved gitt pos. x

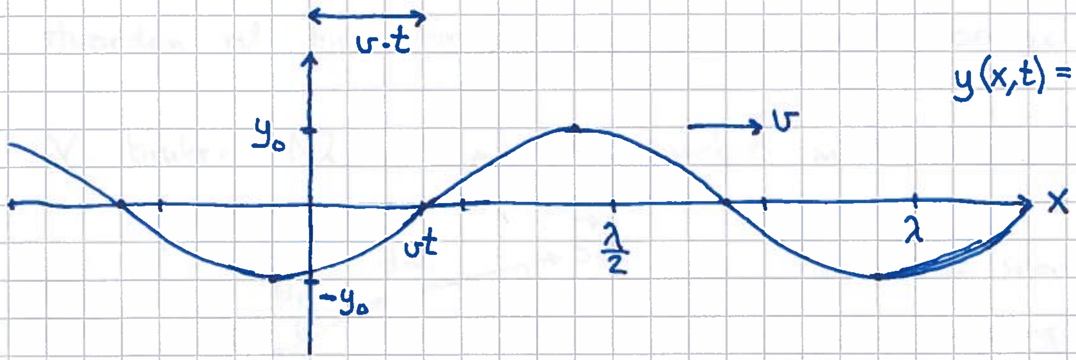
$\Rightarrow \quad \omega = 2\pi/T = 2\pi f$

$v_p = dy/dt$ = partikkelhastigheten

Matematisk beskrivelse:



$$y(x,0) = y_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$



$$y(x,t) = y_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$

Bølgetall: $k = 2\pi/\lambda$ = faseendring pr lengdeenhet ved gitt tid t

Dermed: $v = \lambda/T = \lambda f = \lambda\omega/2\pi = \omega/k$

$\Rightarrow$ $\boxed{y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t)}$ = harmonisk bølge som forplanter seg i positiv x-retning, med bølgefart $v = \lambda/T = \omega/k$.

Hvis forplantning i negativ x-retning: $\boxed{y(x,t) = y_0 \sin(kx + \omega t)}$

Mer generelt:

T-bølge, polarisert i y-retning: $\vec{D}(x,t) = \hat{y}\, D_0 \sin(kx \pm \omega t + \varphi)$

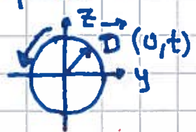
———————— " ———————— z-retning: $\vec{D}(x,t) = \hat{z}\, D_0 \sin(kx \pm \omega t + \varphi)$

L-bølge: $\vec{D}(x,t) = \hat{x}\, D_0 \sin(kx \pm \omega t + \varphi)$

T-bølge, pol. langs $\hat{y} \pm \hat{z}$: $\vec{D}(x,t) = (\hat{y} \pm \hat{z})(D_0/\sqrt{2}) \sin(kx \pm \omega t)$

T-bølge, sirkulærpolarisert: $\vec{D}(x,t) = D_0 \left\{ \hat{y} \cos(kx - \omega t) - \hat{z} \sin(kx - \omega t) \right\}$

Ved $x=0$:



$\vec{D}(0,t) = D_0 \left\{ \hat{y} \cos \omega t + \hat{z} \sin \omega t \right\}$

Transversale bølger på snor/streng [YF 15.4 ; LL 10.1]

μ = masse pr lengdeenhet

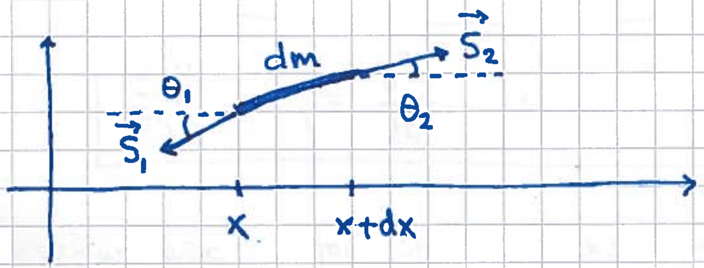
S = strekk-kraft (= snordrag)

Likevekt når $y = 0$ langs hele snora.

Vi antar at snoras tyngde kan neglisjeres.

Hvordan vil en "forstyrrelse" fra likevekt bevege seg langs snora?

Vi bruker N2 på en liten snorbit med masse $dm = \mu \cdot dx$:



Ei snor har ingen bøyningsstivhet, så $\vec{S}$ er overalt tangentiell til snora.

Vi antar små utsving fra likevekt: $|y| \ll \lambda$ overalt

Vi antar kun vertikal bevegelse av masse.

$$\Rightarrow \quad |S_{1x}| = |S_{2x}| = S_x \approx S$$

N2: $\vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \vec{a} \cdot dm$

Horisontalt: $S_{1x} + S_{2x} = a_x \cdot dm = 0$

$$S_{1x} = -S_1 \cos\theta_1 = -S$$
$$S_{2x} = S_2 \cos\theta_2 = S$$

Vertikalt: $S_{1y} + S_{2y} = a_y \cdot dm = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot dm$

$$S_{1y} = -S_1 \sin\theta_1$$
$$S_{2y} = S_2 \sin\theta_2$$

$$\Rightarrow \quad S_2 \sin\theta_2 - S_1 \sin\theta_1 = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot \mu \cdot dx$$

Dividerer med S og utnytter at $S = S_1 \cos\theta_1 = S_2 \cos\theta_2$:

$$\underbrace{\frac{S_2 \sin\theta_2}{S_2 \cos\theta_2}}_{\tan\theta_2} - \underbrace{\frac{S_1 \sin\theta_1}{S_1 \cos\theta_1}}_{\tan\theta_1} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot \frac{\mu}{S} \cdot dx$$

Ser fra fig: $\tan\theta = \partial y/\partial x$ = snoras helning [Jf banens helning på lab!]

$$\Rightarrow \quad \frac{(\partial y/\partial x)_{x+dx} - (\partial y/\partial x)_x}{dx} = \frac{\mu}{S} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

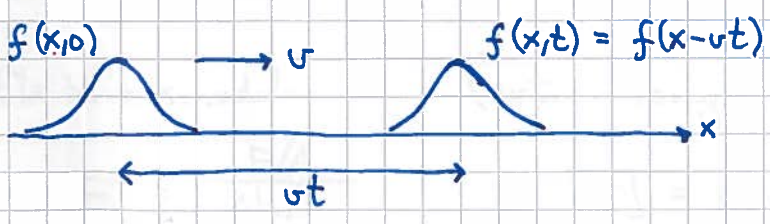
$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad ; \quad v = \sqrt{S/\mu}}$$

Bølgeligningen for små transversale utsving $y(x,t)$ på snor/streng med snordrag S og masse μ pr lengdeenhet.

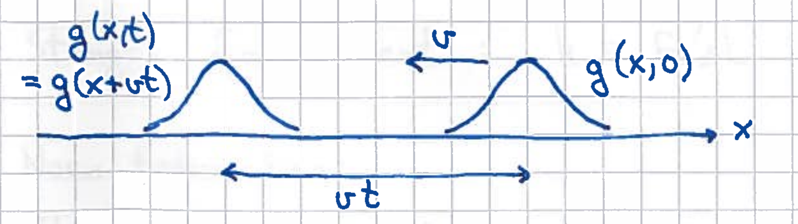
Generell løsning:

$$\boxed{y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad ; \quad v = \sqrt{S/\mu}}$$

[Bevis: Innfør $z = x \pm vt$ og bruk kjerneregel for derivasjon ; se 2017, s. 60]



Bølge/Forstyrrelse som forpl. seg i pos. x-retn. med fart v



Forpl. i neg. x-retn. med fart v

Elastisitet [YF 11.4 ; LL 7.2]

[Nødvendig for å beskrive mekaniske bølger i fluider og faste stoffer.]

Vi antar hele tiden lineær respons, dvs at Hookes lov gjelder.
Da er relativ lengde- eller volumendring, $\Delta L / L_0$ eller $\Delta V / V_0$
(= deformasjon = "strain") prop. med påtrykt kraft pr
flateenhet, F/A (= mekanisk spenning = "stress").

$$\Rightarrow \quad \text{Elastisk modul} = \frac{\text{Mek. spenning}}{\text{Deformasjon}} = \frac{\text{Stress}}{\text{Strain}}$$

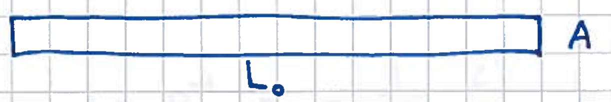
$\parallel$

en (temperaturavhengig) materialkonstant

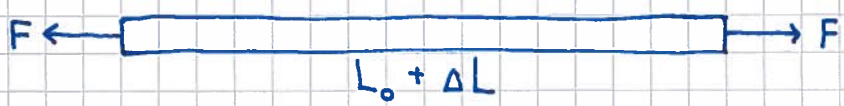
Normalspenning :

Tynn stang med lengde L_0 og tverrsnitt A forlenges når den strekkes.

Likevekt :



Strukket :



Elastisitetsmodulen (evt. Youngs modul Y) :

$$E = \frac{F/A}{\Delta L / L_0} \quad ; \quad [E] = N/m^2 = Pa \quad (\text{pascal})$$

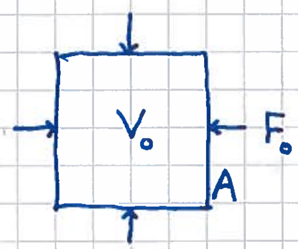
Stangas fjærkonstant : $k = F/\Delta L = E \cdot A / L_0$

Noen tallverdier :

Stål: $E \approx 200$ GPa ; Grafén : $E \approx 1050$ GPa ; DNA: $E \approx 0.3$ GPa

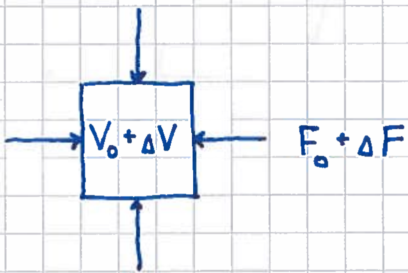
Volumkompressibilitet:

Likevekt:



$p_0 = F_0/A$ = likevektstrykket fra det omgivende mediet

Trykkøkning $\Rightarrow$ volumreduksjon:



$p = p_0 + \Delta p$

Bulkmodulen:

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V_0} = -V_0 \frac{\Delta p}{\Delta V} \quad \left(= -V \frac{\partial p}{\partial V}\right)$$

$$[B] = N/m^2 = Pa$$

Kompressibiliteten: $\varkappa = B^{-1} = -\dfrac{1}{V_0}\dfrac{\Delta V}{\Delta p} \quad \left(= -\dfrac{1}{V}\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)$

Tallverdier:

Stål: $B = 160$ GPa

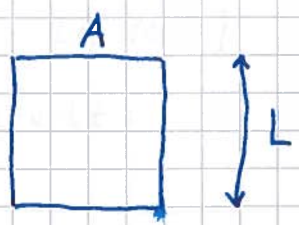
Vann: $B \approx 2$ GPa

Luft: $B \approx 0.0001$ GPa

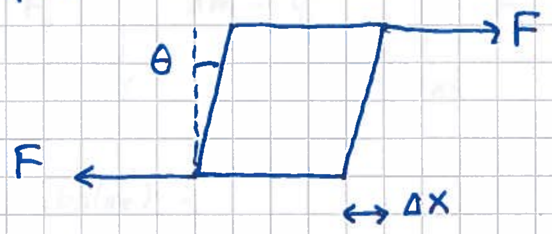
Dvs: $B_{gass} \ll B_{væske} < B_{fast\ stoff}$

Skjærdeformasjon:

Likevekt:



Med skjærkrefter:



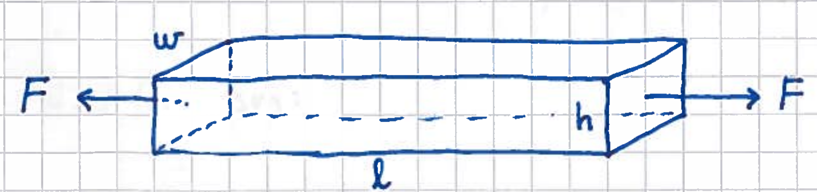
Skjærmodulen:

$$G = \frac{F/A}{\Delta x / L} = \frac{F/A}{\tan\theta} \overset{\theta \ll 1}{\approx} \frac{F/A}{\theta} \quad ; \quad [G] = \text{Pa}$$

Tall: Stål: $G \approx 79$ GPa

Som regel, for faste stoffer: $E \sim B > G$

Normalspenning skaper skjærspenning, og omvendt.



$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\nu \cdot \frac{\Delta \ell}{\ell} \quad ; \quad \nu = \text{poissontallet}$$

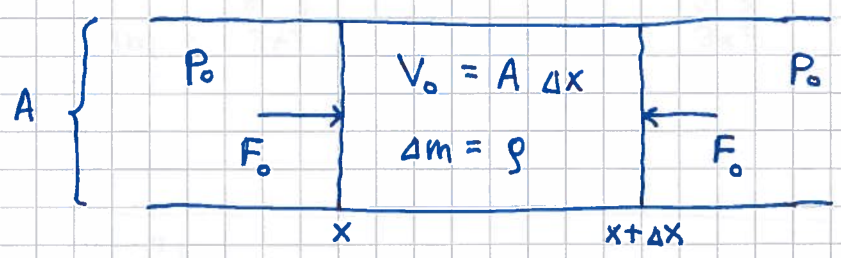
Teoretiske sammenhenger mellom de elastiske modulene:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad ; \quad B = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Longitudinale bølger. Lyd

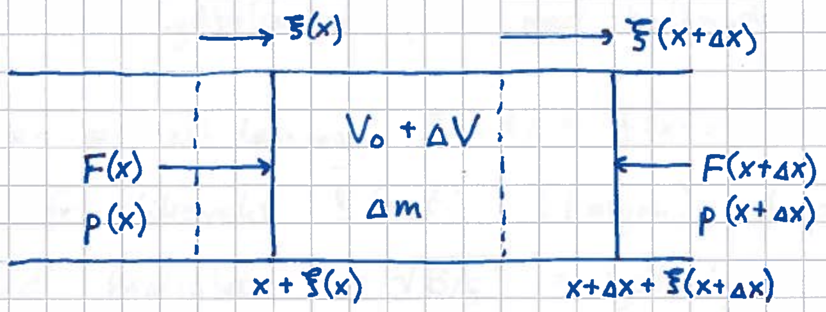
[YF 16.1, 16.2 ; LL 10.6]

Fluid i rør. Likevekt:



ρ = masse pr volumenhet

Forstyrrelse (bølge):



$\Delta p(x) = p(x) - p_0$, $\Delta p(x+\Delta x) = p(x+\Delta x) - p_0$

dvs Δp = avvik fra likevektstrykket p_0

$\xi = \xi(x,t)$ = midlere utsving fra likevekt for molekyler med likevektsposisjon x

N2 for Δm:

$$\Delta m \cdot \ddot{\xi} = F(x) - F(x+\Delta x)$$
$$= [\,p(x) - p(x+\Delta x)\,] \cdot A$$
$$= [\,\Delta p(x) - \Delta p(x+\Delta x)\,] \cdot A$$

Fra s. 68:

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V_0} \quad \Rightarrow \quad \Delta p = -B\,\frac{\Delta V}{V_0}$$

Her er: $\Delta V = A \cdot [\,\xi(x+\Delta x) - \xi(x)\,] = A \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = V_0 \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$

$$\Rightarrow \Delta p(x) - \Delta p(x+\Delta x) = -B\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}\right]$$

$$= B \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\Delta m}_{\rho V_0} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = B \cdot \underbrace{\Delta x \cdot A}_{V_0} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad ; \quad v = \sqrt{B/\rho}}$$

Bølgeligning. for lydbølger i fluid med bulkmodul B, massetetthet ρ

Som s. 66 er generell løsning $\xi(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$, dvs forstyrrelsen fra likevekt $\xi(x,t)$ (bølgen) forplanter seg gjennom fluidet med hastighet $v = \sqrt{B/\rho}$ = lydhastigheten i fluidet.

Tallverdier:

Fluid	ρ (kg/m^3)	B (Pa)	v (km/s)
Luft	1.29	$1.42 \cdot 10^5$	0.33
Vann	1000	$2.2 \cdot 10^9$	1.5

Mekaniske bølger i faste stoffer:

Tynn stang: Longit. bølger, der B erstattes av E, dvs

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad ; \quad v = \sqrt{E/\rho}$$

Stål: $\rho = 7.8 \cdot 10^3$ kg/m^3 ; $E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Pa $\Rightarrow v \approx 5.1$ km/s

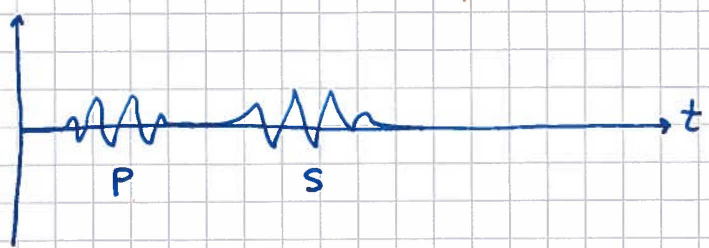
Generelt, siden normalspenning skaper skjærspenning, og omvendt, vil en forstyrrelse fra likevekt gi opphav til både long. og transv. bølge:

$$L: \quad v_p = \sqrt{(B + \tfrac{4}{3}G)/\rho}$$

$$T: \quad v_s = \sqrt{G/\rho}$$

Eks: Jordskjelv og seismiske bølger

Primærbølge (L) $v_p \sim 5.5 - 13.7$ km/s
Sekundærbølge (T) $v_s \sim 3.0 - 7.3$ km/s



Kan lokalisere et jordskjelv (sted og tidspunkt) ved å måle P- og S-bølgen på ulike steder.