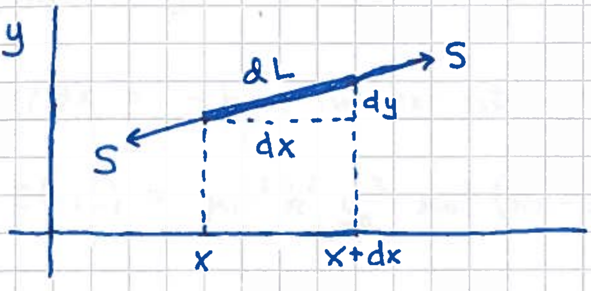
Energitransport med bølger [YF 15.5; LL 10.5]

Ser på transv. bølge på snor/streng:



Likevekt:

$y = 0$ overalt

$K = 0, \quad U = 0$

$\mu = dm/dx$

Forstyrrelse fra likevekt gir snorbiten en hastighet $\partial y/\partial t$ og en forlengelse $dL - dx$

$$\Rightarrow \quad dK = \frac{1}{2}\, dm\, v_y^2 = \frac{1}{2}\mu\, dx\, (\partial y/\partial t)^2$$

$$dU = S \cdot (dL - dx) \qquad (= \text{arbeid utført av } S \text{ på snorbiten})$$

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1 + (dy/dx)^2} \simeq dx\left[1 + \frac{1}{2}(\partial y/\partial x)^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad dU = \frac{1}{2} S\, dx\, (\partial y/\partial x)^2$$

Vi har fra før at $y(x,t) = y(x \pm vt)$; da er $\dfrac{\partial y}{\partial t} = \pm v \dfrac{\partial y}{\partial x}$.

Dessuten er $v = \sqrt{S/\mu}$, slik at $S = \mu v^2$

Dermed; mekanisk energi pr lengdeenhet:

$$\varepsilon = dE/dx = dK/dx + dU/dx = \frac{1}{2}\mu(\partial y/\partial t)^2 + \frac{1}{2}S(\partial y/\partial x)^2$$

$$= \mu v^2 (\partial y/\partial x)^2 = \mu(\partial y/\partial t)^2 = \pm \mu v (\partial y/\partial t)(\partial y/\partial x)$$

Siden $y = y(x \pm vt)$, er også $\partial y/\partial t$ og $\partial y/\partial x$ funksjoner av $x \pm vt$, dvs $\varepsilon = \varepsilon(x \pm vt)$. Men da må ε oppfylle bølgeligen.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2},$$

som betyr at bølgeenergien forplanter seg med bølgen, med hastighet lik bølgefarten. (Her: $v = \sqrt{S/\mu}$)

For harmoniske bølger er vi som regel mest interessert i middelverdier (= gjennomsnittsverdier):

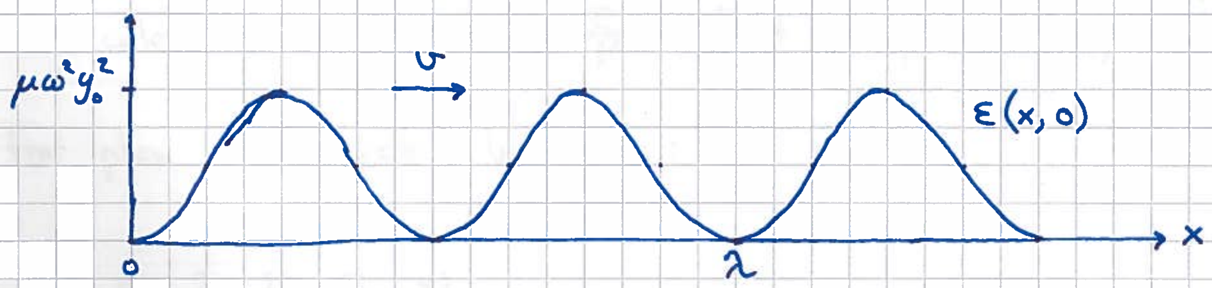
$$y(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t) \quad ; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

$$\partial y/\partial x = -k y_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\Rightarrow \varepsilon(x,t) = \mu v^2 k^2 y_0^2 \sin^2(kx - \omega t) = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

Øyeblikksbilde (f.eks. $t=0$) : $\varepsilon(x,0) = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2 kx$

Ved gitt sted (f.eks. $x=0$) : $\varepsilon(0,t) = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2 \omega t$



Enten vi midler i rom eller tid blir middelverdien av både $\sin^2 kx$ og $\sin^2 \omega t$ lik 1/2 (som vi også ser fra figuren).

Dvs: Romlig middelverdi $\bar{\varepsilon}$ = Tidsmiddel $\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2$

[Mer formelt:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\lambda \varepsilon(x,t)\,dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \varepsilon(x,t)\,dx$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\int_0^T \varepsilon(x,t)\,dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon(x,t)\,dt \quad]$$

[Merk at siden $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ og $\langle \sin^2\varphi \rangle = \langle \cos^2\varphi \rangle$, får vi at $\langle \sin^2\varphi \rangle + \langle \cos^2\varphi \rangle = \langle 1 \rangle = 1$ og $\langle \sin^2\varphi \rangle = \langle \cos^2\varphi \rangle = 1/2$.

Tilsvarende $\overline{\sin^2\varphi} = \overline{\cos^2\varphi} = 1/2$.]

Helt tilsvarende utledninger for en plan longitudinal bølge (lydbølge) i et fluid gir (med $\mu \to \rho$ = masse pr volumenhet)

$$\varepsilon(x,t) = \rho v^2 (\partial\xi/\partial x)^2 = \rho (\partial\xi/\partial t)^2 = \pm \rho v (\partial\xi/\partial t)(\partial\xi/\partial x)$$

der

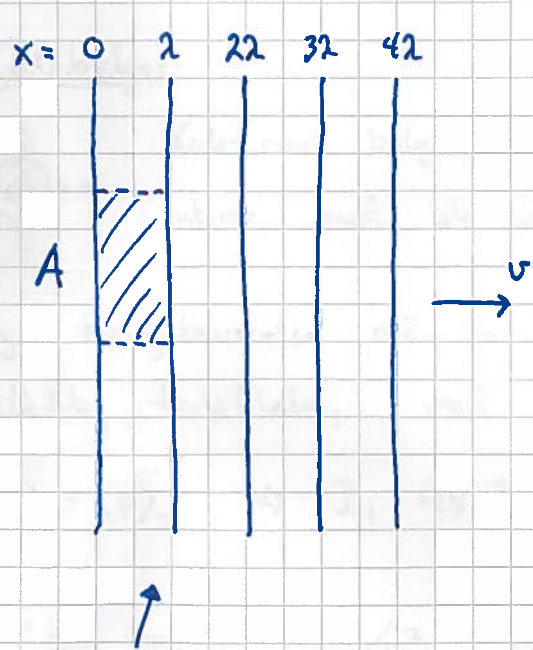
ξ = longitudinalt molekylutsving (i middel) fra likevekt

$v = \sqrt{B/\rho}$ = lydfarten i fluidet

Bølgens intensitet [YF 16.3 ; LL 10.5]

I = intensitet = midlere overført effekt pr flateenhet ; $[I] = W/m^2$

For plan harmonisk lydbølge:



Bølgefronter: Flater med samme fase overalt på en gitt bølgefront; f.eks. bølgetopper

Energi i skravert volum:

$$\bar{\varepsilon} \cdot A \cdot \lambda$$

Hele denne energien har passert ved $x = \lambda$ i løpet av tiden T

Dermed blir bølgens intensitet:

$$I = \bar{P}/A$$

$$= (\bar{\varepsilon} A \lambda / T) / A$$

$$= \underline{\underline{\bar{\varepsilon} \cdot v}}$$

(siden $v = \lambda/T$)

Desibel-skalaen

Pga store tallmessige forskjeller i lydintensitet brukes ofte en logaritmisk skala for å tallfeste intensiteten:

$$\boxed{\beta = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad ; \quad I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}}$$

Da er lydtrykksnivået tallverdien av β i "enheten" dB (= desibel).

Eks:

Høregrensen (knapt hørbar lyd): $I = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2} \Rightarrow \beta = 10 \log 1 = \underline{0\ \mathrm{dB}}$

Smertegrensen: $I = 1\ \mathrm{W/m^2} \Rightarrow \beta = 10 \log 10^{12} = 10 \cdot 12 \log 10 = \underline{120\ \mathrm{dB}}$

Kulebølger

Kuleformet bølgekilde $\Rightarrow$ Bølge som forplanter seg radielt utover, med lik intensitet i alle retninger.

Pga energibevarelse må en like stor effekt passere gjennom en vilkårlig kuleflate, ved f.eks. $r = r_1$ og ved $r = r_2 > r_1$:

$$\langle P \rangle_1 = \langle P \rangle_2 \quad \Rightarrow \quad I_1 \cdot 4\pi r_1^2 = I_2 \cdot 4\pi r_2^2 \quad \Rightarrow \quad I_2 / I_1 = r_1^2 / r_2^2$$

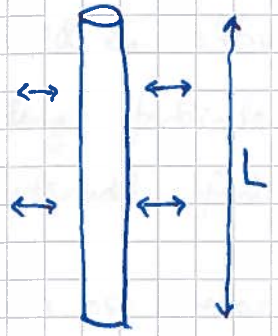
Dvs: $I(r) \sim 1/r^2$ for kulebølger; intensiteten avtar med kvadratet av avstanden til bølgekilden

Eks: Målinger gir $\beta = 103$ dB 3.5 m fra en kuleformet høyttaler. Hva er da β i avstand 35 m fra høyttaleren?

Løsn: $I(35) = I(3.5) \cdot (3.5/35)^2 = I(3.5)/100$

$$\Rightarrow \beta(35) = 10 \log\{I(3.5)/100 I_0\} = \beta(3.5) - 10 \log 100 = 103 - 20 = \underline{\underline{83\ \mathrm{dB}}}$$

Sylinderbølger

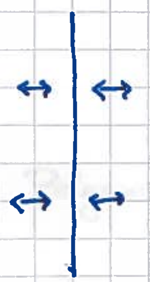


Sylinderformet bølgekilde genererer bølger med sylinderflater som bølgefronter.

$\Rightarrow$ Like stor effekt gjennom flater med areal $L \cdot 2\pi r$

$$\Rightarrow \quad I(r) \sim 1/r$$

Plane bølger

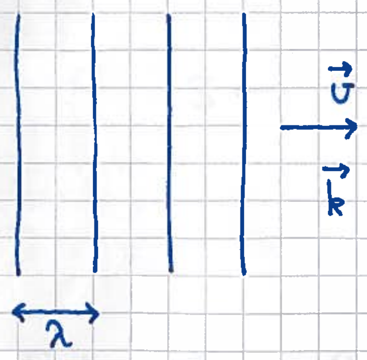


Plan bølgekilde skaper bølger der bølgefrontene er plane flater

$\Rightarrow$ Lik effekt gjennom areal som ikke avhenger av r

$\Rightarrow$ I avtar ikke med r

Plan harmonisk bølge i vilkårlig retning



$$\vec{\xi}(\vec{r},t) = \vec{\xi}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$\vec{k}$ = bølgetallsvektoren ; peker i bølgens forplantningsretning ;

$k = |\vec{k}| = 2\pi/\lambda$;

$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$

Eks : Uttrykk plan harmonisk bølge som forplanter seg i positiv y-retning.

Løsn: Nå er $\vec{k} = k_y \hat{y} = k\hat{y}$, slik at $\vec{k}\cdot\vec{r} = k\hat{y}\cdot(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) = ky$

$$\rightarrow \quad \vec{\xi}(\vec{r},t) = \vec{\xi}_0 \sin(ky - \omega t)$$

$$L: \; \vec{\xi}_0 = \xi_0 \hat{y}$$

$$T: \; \vec{\xi}_0 = \xi_{0x}\hat{x} + \xi_{0z}\hat{z}$$

Dopplereffekt [YF 16.8 ; LL 10.8]

Med en relativ bevegelse mellom bølgekilde (S) og observatør (O), langs forbindelseslinjen, blir observert frekvens f_o forskjellig fra utsendt frekvens f_s !

La oss velge positiv retning for v mot høyre.

① S i ro, O i bevegelse

$\lambda = v/f_s$ (målt av begge)

Bølgens fart målt av O : $v - v_o$

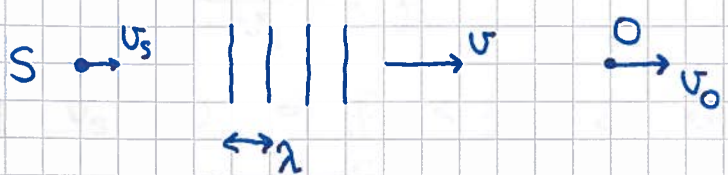
$\Rightarrow$ Frekvensen målt av O : $f_o = \dfrac{v - v_o}{\lambda} = \dfrac{v - v_o}{v} \cdot f_s < f_s$ når $v_o > 0$

② S i bevegelse, O i ro

$\lambda = \dfrac{v - v_s}{f_s}$ (målt av begge)

$\Rightarrow$ Frekv. målt av O : $f_o = \dfrac{v}{\lambda} = \dfrac{v}{v - v_s} \cdot f_s > f_s$ når $v_s > 0$

③ S og O i bevegelse



$\Rightarrow f_o = \dfrac{v - v_o}{\lambda} = \dfrac{v - v_o}{v - v_s} \cdot f_s$

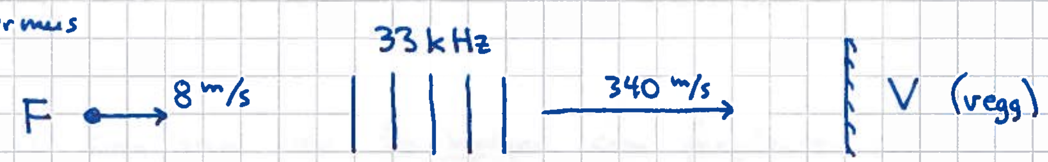
4 I tillegg kan mediet (som bølgen forplanter seg i) være i bevegelse, med hastighet v_m = lufthastigheten (= vindhastigheten)

Da må v erstattes av $v + v_m$:

$$\boxed{f_0 = \frac{v + v_m - v_0}{v + v_m - v_s} \cdot f_s}$$

Youtube har div. eksempler med tog, biler etc.

Eks : Flaggermus



Ultralyden reflekteres fra veggen. Hvilken frekvens hører F at ekkoet har?

Løsn: Først er F kilde og V observatør. For ekkoet er V kilde og F obs.

$$f_V = \frac{v}{v - v_F} \cdot f_F \quad ; \quad f_E = \frac{v + v_F}{v} \cdot f_V$$

$$\Rightarrow f_E = \frac{v + v_F}{v - v_F} \cdot f_F = \frac{348}{332} \cdot 33 \text{ kHz} \approx \underline{34.6 \text{ kHz}}$$

Dopplereffekt med elektromagnetiske bølger :

$v = c = 3 \cdot 10^8$ m/s

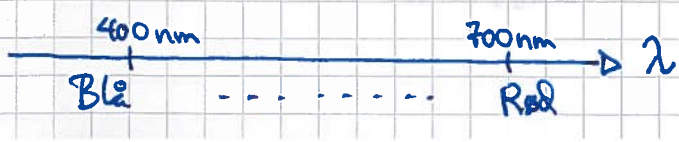
Anta en kilde S i bevegelse, O i ro.

Da er $f_0 \approx \dfrac{c}{c - v_s} \cdot f_s$

Rød-skift : $v_s < 0 \Rightarrow f_0 < f_s$, dvs endring mot lavere frekvens

Blå-skift : $v_s > 0 \Rightarrow f_0 > f_s$, —— " —— høyere —" —

Synlig lys :



Stående bølger [YF 15.7, 15.8, 16.4 ; LL 10.3]

Harmonisk bølge på streng fastspent i begge ender har mulige bølgelengder gitt ved

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad ; \quad L = \text{strengens lengde}$$

$\lambda_1 = 2L$ grunntonen

$\lambda_2 = L$ 1. overtone

$\lambda_3 = \frac{2}{3}L$ 2. overtone

Kan oppfattes som sum av to bølger som forplanter seg hver sin vei:

$$y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t) + y_0 \sin(kx + \omega t)$$

(slik at $y(0,t) = -y_0 \sin \omega t + y_0 \sin \omega t = 0$)

Bruker $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$ og får

$$\underline{y(x,t)} = y_0 \{ \sin kx \cos \omega t - \cos kx \sin \omega t + \sin kx \cos \omega t + \cos kx \sin \omega t \}$$

$$= \underline{2 y_0 \sin kx \cos \omega t}$$

Dette er en harmonisk svingning ($\cos \omega t$) med en posisjonsavhengig amplitude ($2 y_0 \sin kx$), en såkalt <u>stående bølge</u>. Merk: Her er det ingen netto energitransport i bølgens forpl.retning.

$$y(L,t) = 0 \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n}$$

Strengens resonansfrekvenser (egenfrekvenser):

$$f = v/\lambda \; ; \; v = \sqrt{S/\mu} \Rightarrow \boxed{f_n = \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot \frac{n}{2L}} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Eks: Hvis du vil ha samme stramming i gitarens to E-strenger, hva er da forholdet mellom diametrene? Anta samme materiale og samme lengde. $f_E = 82.4\ Hz$, $f_{e'} = 329.6\ Hz$

Løsn: $\mu = \rho \cdot A = \rho \cdot \pi d^2/4 \sim d^2$; d = diameter

$f = \sqrt{S/\mu} \sim 1/\sqrt{\mu} \sim 1/d$

$\Rightarrow d_E / d_{e'} = f_{e'}/f_E = 329.6/82.4 = \underline{\underline{4}}$

Stående bølger i lange, tynne rør:

Åpen ende: $p = p_0$ = likevektstrykket utenfor røret

$\Rightarrow \Delta p = p - p_0 = 0$

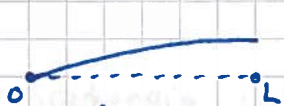
Fra s. 70: $\Delta p = -B \dfrac{\partial \xi}{\partial x}$; ξ = utsving fra likevekt

$\Rightarrow \dfrac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \Rightarrow$ max utsving for bølgen $\xi(x,t)$

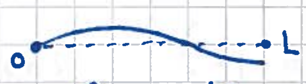
Lukket ende: $\xi = 0$; max amplitude for trykkbølgen $\Delta p(x,t)$

$\Rightarrow$ Med 2 åpne ender (tverrfløyte): $\lambda_n = 2L/n$, $f_n = \sqrt{\dfrac{B}{\rho}} \cdot \dfrac{n}{2L}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

1 åpen og 1 lukket (klarinett m/fL): $\lambda_n = 4L/(2n-1)$, $f_n = \sqrt{\dfrac{B}{\rho}} \cdot \dfrac{2n-1}{4L}$; —"—



$\lambda_1 = 4L$



$\lambda_2 = 4L/3$

osv

Eks: Med 2 åpne ender og max utsvingsamplitude $2 \cdot \xi_0$, hva er $\overbrace{(\Delta p)_0}^{max}$?

Løsn: $\Delta p = -B \dfrac{\partial}{\partial x}\{2\xi_0 \cos kx \cos \omega t\} = 2kB\xi_0 \sin kx \cos \omega t$

$\Rightarrow$ max amplitude $(\Delta p)_0 = 2kB\xi_0$ (der $k = 2\pi/\lambda$; $\lambda = 2L/n$)