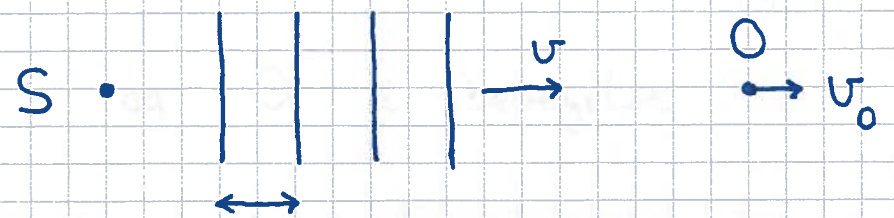
Diverse bølgefenomener

Dopplereffekt [YF 16.8; LL 10.8]

Relativ bevegelse mellom bølgekilde S og observatør O gir ulike frekvenser målt av kilden selv, f_S, og av observatøren, f_O.

Velger her positiv retning mot høyre.

(1) S i ro, O i bevegelse



$\lambda = v/f_S$ (måles av begge)

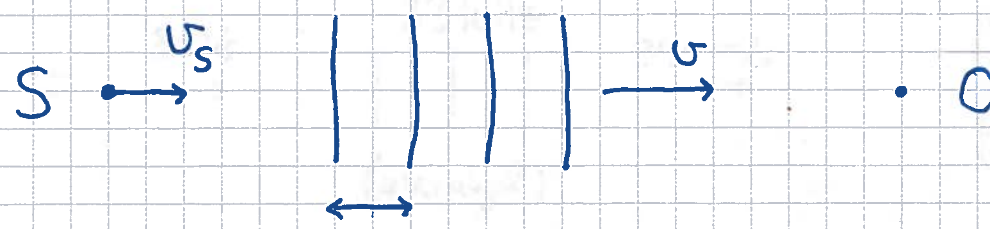
Bølgens fart målt av O: $v - v_O$

Frekvens målt av O:

$$f_O = \frac{v - v_O}{\lambda} = \frac{v - v_O}{v} \cdot f_S$$

$\Rightarrow$ $f_O < f_S$ når O er i bevegelse bort fra S

(2) S i bevegelse, O i ro



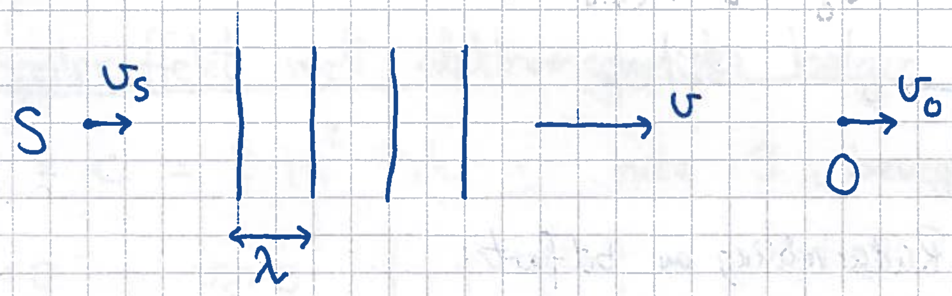
$$\lambda = \frac{v - v_s}{f_s} \quad \text{(måles av \underline{begge})}$$

(dvs bølgens fart målt av S er $v - v_s$)

$\Rightarrow$ Frekvens målt av O: $f_O = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{v - v_s} \cdot f_s$

$\Rightarrow$ $f_O > f_s$ når S beveger seg mot O

(3) S og O i bevegelse



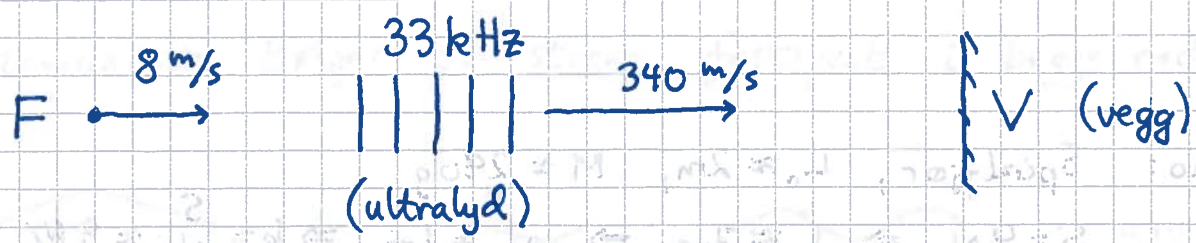
$$\Rightarrow f_O = \frac{v - v_O}{\lambda} = \frac{v - v_O}{v - v_s} \cdot f_s$$

(4) Mediet i bevegelse; v_m = vindhastigheten

$\Rightarrow$ v erstattes av $v + v_m$

$$\Rightarrow \boxed{f_O = \frac{v + v_m - v_O}{v + v_m - v_s} \cdot f_s}$$

Eks: Flaggermus og ekko



Signalet utsendt av F reflekteres av V.
Hvilken frekvens måler F at ekkoet har?

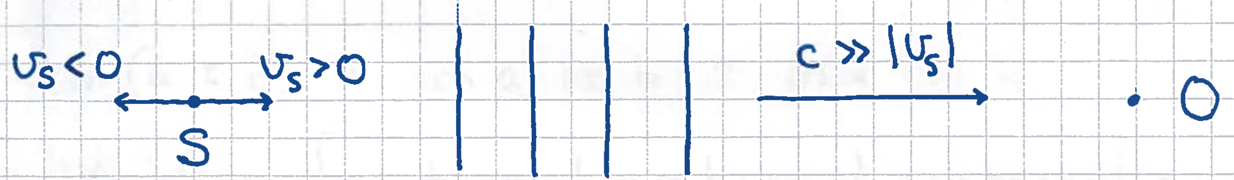
Løsn: Først er F kilde, V observatør. For ekkoet er V kilde, F observatør.

$$f_V = \frac{v}{v - v_F} \cdot f_F \quad ; \quad f_E = \frac{v + v_F}{v} \cdot f_V$$

$$\Rightarrow f_E = \frac{v + v_F}{v - v_F} \cdot f_F = \frac{348}{332} \cdot 33 \text{ kHz} \simeq \underline{\underline{34.6 \text{ kHz}}}$$

Dopplereffekt med elektromagnetiske bølger

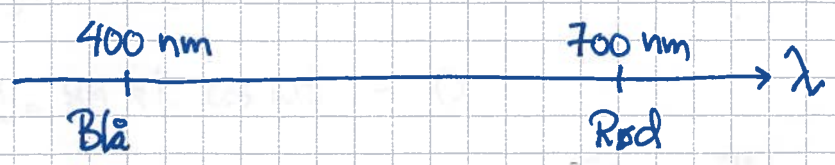
$v = c \simeq 3 \cdot 10^8$ m/s ; anta S i bevegelse og O i ro



Da er $f_O \approx \dfrac{c}{c - v_S} \cdot f_S$ (som for lydbølger)

Rødskift : $v_S < 0$, $f_O < f_S$
Blåskift : $v_S > 0$, $f_O > f_S$

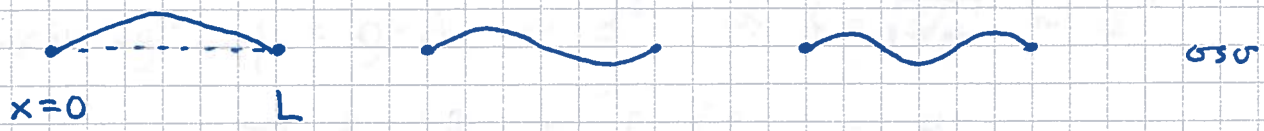
Synlig lys :



Radarmåling: $v = (\Delta f / f) \cdot c/2$ (med radiobølger)

Stående bølger [YF 15.7, 15.8, 16.4 ; LL 10.3]

Harmoniske bølger på streng fastspent i begge ender:



$\lambda_1 = 2L$ — Grunntonen

$\lambda_2 = L$ — 1. overtone

$\lambda_3 = \frac{2}{3} L$ — 2. overtone

Dvs: Mulige bølgelengder er $\lambda_n = \frac{2L}{n}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

Strengens egenfrekvenser (resonansfrekvenser):

$$v = \sqrt{S/\mu} \Rightarrow f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot \frac{n}{2L} \; ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Slike stående bølger tilsvarer sum av to bølger som forplanter seg hver sin vei:

$$y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t) + y_0 \sin(kx + \omega t)$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\Rightarrow y(x,t) = y_0 \left\{ \sin kx \cos \omega t - \cos kx \sin \omega t + \sin kx \cos \omega t + \cos kx \sin \omega t \right\}$$

$$= 2 y_0 \sin kx \cos \omega t$$

Dvs: Harmonisk svingning $\cos \omega t$ med x-avhengig amplitude $2y_0 \sin kx$, og ingen netto energitransport.

$$y(0,t) = 2 y_0 \sin 0 \cos \omega t = 0 \; ; \quad \text{OK}$$

$$y(L,t) = 2 y_0 \sin kL \cos \omega t = 0$$

$$\Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n} \; ; \quad \text{OK}$$

Eks: Med lik stramming S i de to E-strengene på en gitar, hva er forholdet mellom strengenes diameter? Frekvensene er $f_E = 82.4$ Hz og $f_{e'} = 4 f_E = 329.6$ Hz.

Løsning: $\mu = \rho \cdot A \sim d^2 \Rightarrow f = \sqrt{S/\mu} \sim d^{-1}$

$$\Rightarrow d_E / d_{e'} = f_{e'} / f_E = \underline{\underline{4}}$$

Stående lydbølger i lange, tynne rør:

Grensebetingelser i rørets ender:

Åpen ende: $\Delta p = p - p_0 = 0$
(p_0 = likevektstrykket utenfor røret)

Fra før: $\Delta p = -B \frac{\partial \xi}{\partial x}$; ξ = (midlere) longitudinalt utsving fra likevekt

$\Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \Rightarrow$ max utsving ("buk") for utsvingsbølgen $\xi(x,t)$

Lukket ende: $\xi = 0$; max amplitude for trykkbølgen $\Delta p(x,t)$

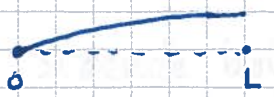
$\Rightarrow$ Med 2 åpne ender (tverrfløyte):

$$\lambda_n = 2L/n \;;\quad f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \cdot \frac{n}{2L} \;;\quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$\lambda_1 = 2L$ $\lambda_2 = L$

Med 1 åpen og 1 lukket ende (klarinett m/fl.):

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n-1} \; ; \quad f_n = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \cdot \frac{2n-1}{4L} \; ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$



osv

$\lambda_1 = 4L$ $\qquad$ $\lambda_2 = 4L/3$

Gir ulike "harmoniske serier":

2 åpne ender : $f_1 : f_2 : f_3 \ldots = 1 : 2 : 3 \ldots$

1 åpen, 1 lukket : $f_1 : f_2 : f_3 \ldots = 1 : 3 : 5 \ldots$

Eks: Anta 2 åpne ender og utsvingsbølge

$$\xi(x,t) = 2\xi_0 \cos kx \cos \omega t$$

Hva er maksimal amplitude $(\Delta p)_0$ for trykkbølgen?

Løsn:

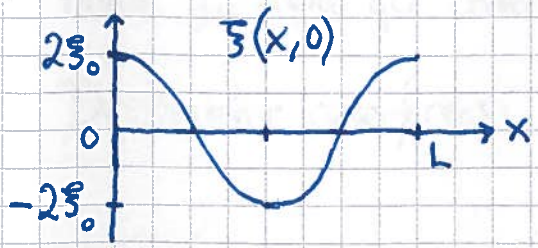
$$\Delta p = -B \frac{\partial \xi}{\partial x} = B \cdot 2\xi_0 \cdot k \cdot \sin kx \cos \omega t$$

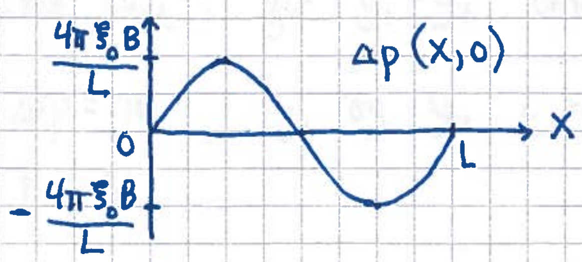
$$= (\Delta p)_0 \sin kx \cos \omega t$$

med

$$(\Delta p)_0 = 2k\xi_0 B$$

F.eks. for 1. overtone: $\lambda_2 = \frac{2\pi}{k_2} = 2L/2 = L \; ; \; k_2 = \frac{2\pi}{L}$





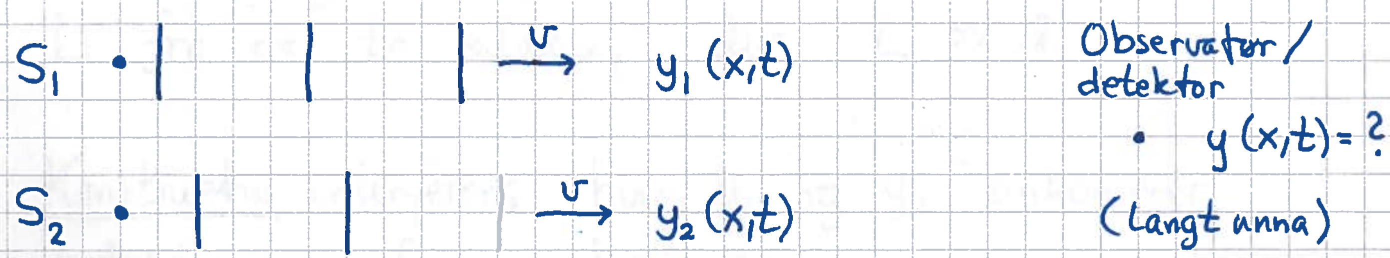
Interferensfenomener [YF 15.6, 16.6 ; LL 10.7]

Overlagring (sum) av to eller flere bølger på gitt sted til gitt tid.

(Dvs: Stående bølger er også et slags interferensfenomen.)

---

① To bølger i samme retning med lik frekvens. Faseforskjellen $\Delta\varphi$ blir avgjørende.



Total bølge ved detektor:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t) + y_0 \cos(kx - \omega t + \Delta\varphi)$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

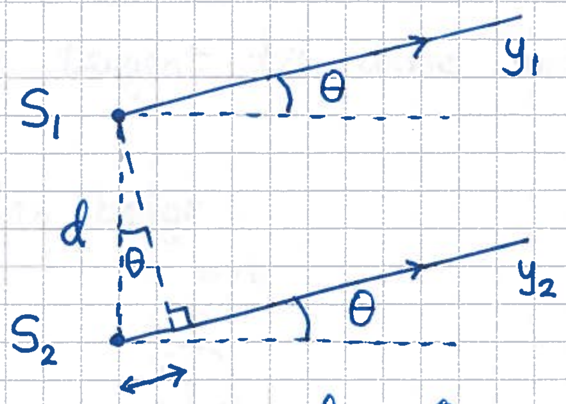
$$\Rightarrow y(x,t) = 2 y_0 \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \cos\left(kx - \omega t + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

Dvs: Amplituden avhenger av faseforskjellen $\Delta\varphi$

Konstruktiv interferens: $\Delta\varphi = 0$; y_1 og y_2 <u>i fase</u>.
Hvis y_1 alene gir intensitet I_1, gir $y_1 + y_2$ intensitet $4 I_1$

Destruktiv interferens: $\Delta\varphi = \pi$; y_1 og y_2 <u>i motfase</u> ;
$I = 0$

2 Retningsavhengig interferens med 2 kilder



Anta at S_1 og S_2 sender ut identiske bølger i fase.

$\Delta r = d \sin\theta$ = veilengdeforskjellen mellom y_1 og y_2

Summen $y = y_1 + y_2$ detekteres i stor avstand L fra de to kildene, dvs $L \gg d$.

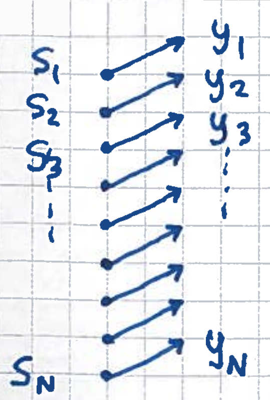
Konstruktiv interferens hvis y_1 og y_2 ankommer detektoren i fase, dvs når

$$\Delta r = d \sin\theta = n\lambda \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Destruktiv interferens hvis y_1 og y_2 ankommer detektoren i motfase, dvs når

$$\Delta r = d \sin\theta = (n + \tfrac{1}{2})\lambda \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

3 Som 2, men med mange kilder i fase



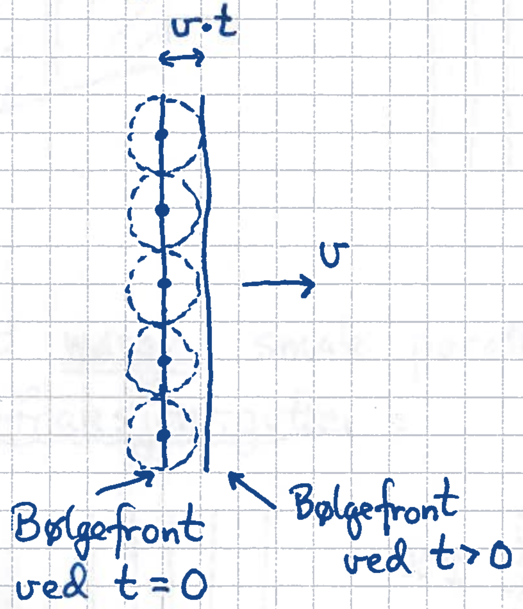
Veilengdeforskjell mellom S_1 og S_2 : $d\sin\theta$

Mellom S_1 og S_3 : $2d\sin\theta$ osv.

$\Rightarrow$ Høy intensitet når $d\sin\theta = n\lambda$,
men $I \approx 0$ i alle andre retninger pga interferens med mange "tilfeldige" faser.

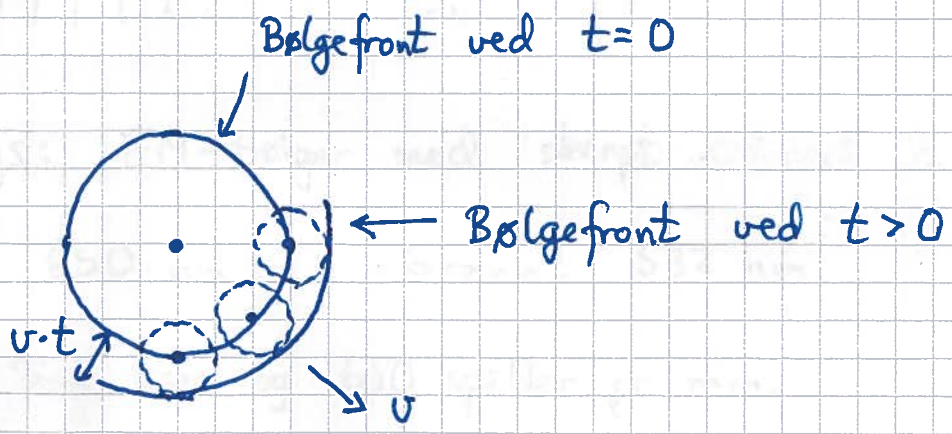
Huygens' prinsipp : Alle punkter på en bølgefront er kilde til en "liten" kulebølge. Neste bølgefront er tangent til disse "småbølgene".

Plan bølge :



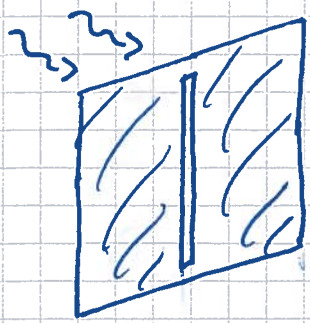
OK!

Kulebølge :

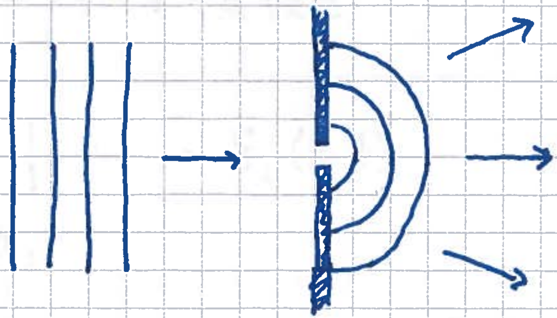


OK!

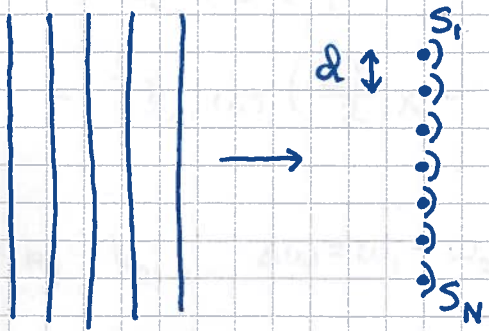
Plan bølge inn mot smal spalte (åpning) gir dermed en (halv) sylinderbølge:



Sett ovenfra:



Med <u>mange</u> smale parallelle spalter får vi et <u>diffraksjonsgitter</u>:



Til høyre for de N spaltene fås N sylinderbølger som interfererer.

Laserlys: EM-bølger med skarpt definert λ

Rød: 650 nm Grønn: 532 nm

Eks: Rød laser og 600 spalter pr mm.

$\Rightarrow d = \frac{1}{600}\ \mathrm{mm} = 1.67 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}$, $\lambda = 650 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}$

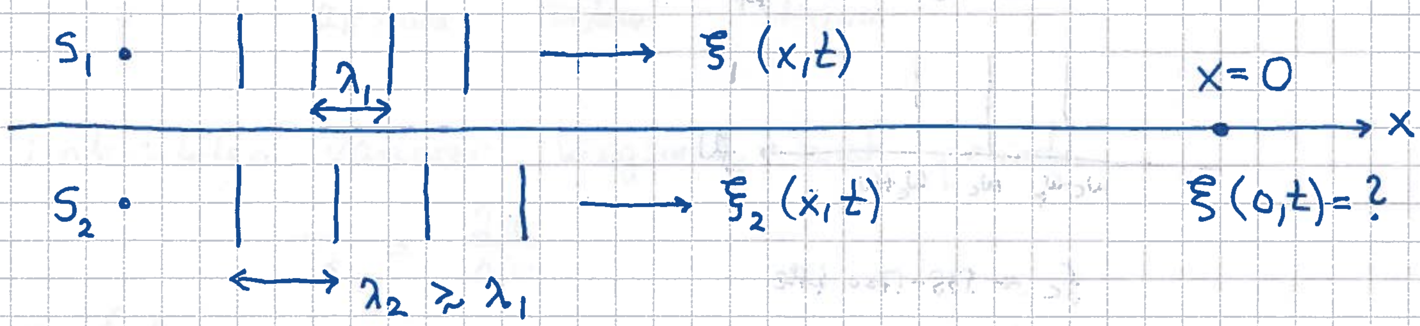
$\Rightarrow \sin\theta_1 = \frac{\lambda}{d} = 0.39 \Rightarrow \theta_1 = 23^\circ$

$\sin\theta_2 = \frac{2\lambda}{d} = 0.78 \Rightarrow \theta_2 = 51^\circ$

($3\lambda/d = 1.17 > 1 \Rightarrow$ får bare $n = 0, \pm 1$ og ± 2 her)

4 Svevning ; interferens i tid [YF 16.7 ; LL 10.7]

To bølgekilder med litt forskjellig frekvens :



Vi bruker $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$ og får

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t)$$

$$= \xi_0\cos(k_1x - \omega_1 t) + \xi_0\cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$= 2\xi_0\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cdot\cos(kx - \omega t)$$

der

$$\Delta k = k_1 - k_2\,,\quad \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2\,,\quad k = \frac{k_1+k_2}{2}\,,\quad \omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$$

og $\Delta k \ll k\,,\quad \Delta\omega \ll \omega$

Detektor (f.eks. øret) ved $x=0$:

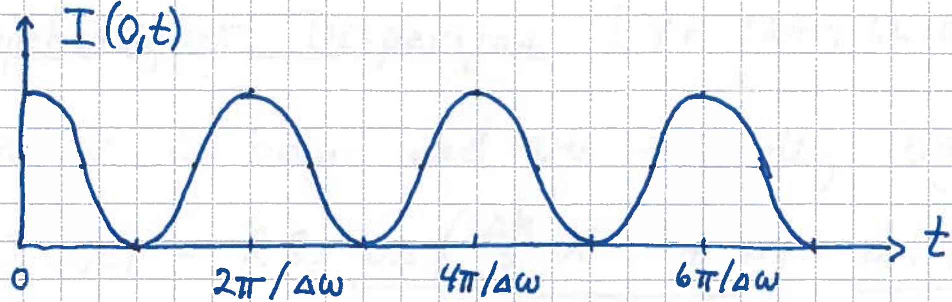
$$\xi(0,t) = 2\xi_0\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cdot\cos(\omega t)$$

Intensitet ved $x=0$ (s. 97) :

$$I(0,t) = \langle\varepsilon\rangle\cdot v = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2(2\xi_0)^2\, v\cdot\cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

$$= \rho\,\omega^2\xi_0^2\, v\left\{1 + \cos(\Delta\omega\cdot t)\right\}$$

Har her midlet ε over en periode av den raske svingningen, $\langle\cos^2\omega t\rangle = 1/2$, og brukt $\cos^2(a/2) = \frac{1}{2}(1+\cos(a))$.



Intensiteten varierer langsomt, med periode

$$T_s = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

og frekvens

$$f_s = \frac{1}{T_s} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \Delta f = f_1 - f_2$$

Vi hører <u>svevning</u> (beats).

Eks:

Stemmegaffel : $f_1 = 440$ Hz (kammertonen)

Stemmegaffel med litt tape : $f_2 = 437$ Hz

$\Rightarrow$ Svevning, med 3 svingninger i intensitet pr sekund.

AM radio (amplitude modulation) :

Bærebølge : $c(t) = A \sin \omega_c t$ (carrier wave)

$$f_c \sim 535 - 1700 \text{ kHz}$$

Signalet (tale, musikk; $f_m \ll f_c$) overføres ved hjelp av en amplitudevariasjon :

$$\xi(t) = c(t) + \frac{1}{2} M \left\{ \sin[(\omega_c + \omega_m)t] + \sin[(\omega_c - \omega_m)t] \right\}$$

$$= A \sin \omega_c t \left\{ 1 + \frac{M}{A} \cos \omega_m t \right\}$$

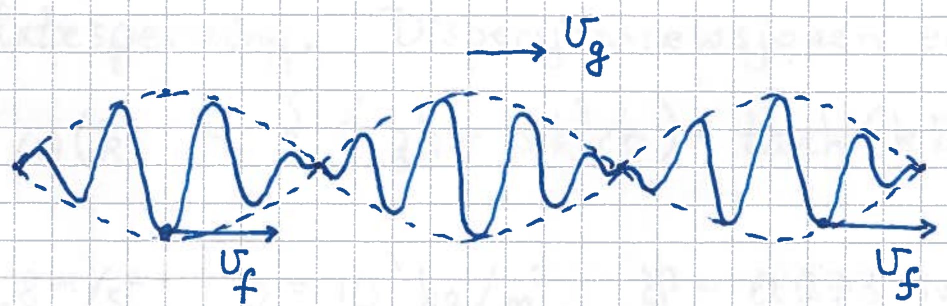
Gruppehastighet. Dispersjon [YF 33.4 ; LL 10.7, 10.10]

Sum av to bølger med litt forskjellig bølgelengde er

$$\xi(x,t) = 2\xi_0 \underbrace{\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)}_{\text{modulasjonsbølge}} \cdot \underbrace{\cos(kx - \omega t)}_{\text{bærebølge}}$$

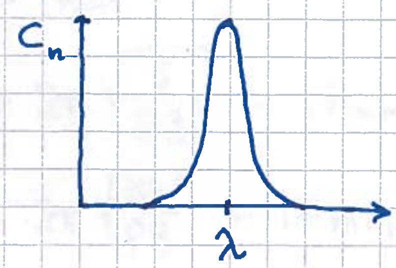
Bærebølgens hastighet: $v = v_f = \frac{\omega}{k}$ = fasehastigheten

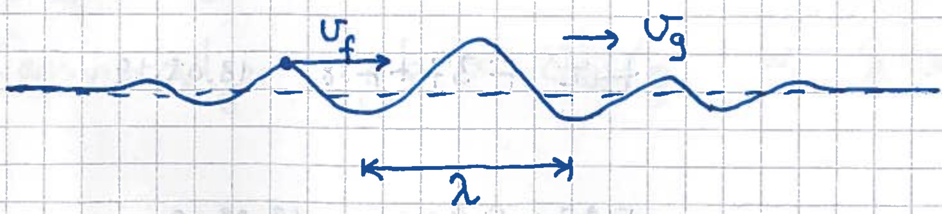
Modulasjonsbølgens — " — : $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$ = gruppehastigheten



Mens en ren sinusbølge har uendelig utstrekning, vil en romlig avgrenset <u>bølgepakke</u> med midlere bølgelengde λ kunne beskrives som en sum av mange sinusbølger med bølgelengder omkring λ:

$$\xi(x,t) = \sum_n c_n \sin(k_n x - \omega_n t)$$





Bølgepakken, og dermed bølgeenergien, forplanter seg med gruppefarten $v_g = d\omega/dk$, mens en gitt bølgetopp har hastighet $v_f = \omega/k$. Bølger på streng, lydbølger i fluid og EM-bølger i vakuum har alle en v_f som er uavhengig av bølgetallet k.

Da er $\omega(k) = v_f \cdot k$ en lineær funksjon av k,
og $v_g = d\omega/dk = v_f$; vi har lineær dispersjon.

For noen (viktige!) bølgefenomener / bølgetyper har vi ikke-lineær dispersjon:

- Overflatebølger på vann

Dynamikken bestemmes av tyngdekrefter og overflatespenning. Dispersjonsrelasjonen er

$$\omega(k) = \left\{ \left(gk + \gamma k^3/\rho \right) \cdot \tanh(kD) \right\}^{1/2}$$

med

$g = 9.8 \, m/s^2$, $\rho = 10^3 \, kg/m^3$, $\gamma = 0.073 \, N/m$

(γ = overflatespenningen) og D = vanndybden

Dypt vann: $kD \gg 1$; $\tanh(kD) \approx 1$

Grunt vann: $kD \ll 1$; $\tanh(kD) \approx kD$

Tyngdebølger: $gk \gg \gamma k^3/\rho \Rightarrow \lambda \gg 2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \approx 17 \, mm$

Kapillærbølger: $gk \ll \gamma k^3/\rho \Rightarrow \lambda \ll 2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \approx 17 \, mm$

Tyngdebølger på dypt vann:

$$\omega(k) \approx \sqrt{gk} \Rightarrow v_f \approx \sqrt{g/k}, \quad v_g \approx \frac{1}{2}\sqrt{g/k} = \frac{1}{2} v_f$$

$\Rightarrow$ Bølgetoppene beveger seg dobbelt så fort som bølgepakken

Kapillærbølger på dypt vann:

$$\omega(k) \approx \sqrt{\gamma k^3/\varrho} \Rightarrow v_f \approx \sqrt{\gamma k/\varrho}\ ,\ v_g \approx \frac{3}{2}\sqrt{\gamma k/\varrho} = \frac{3}{2} v_f$$

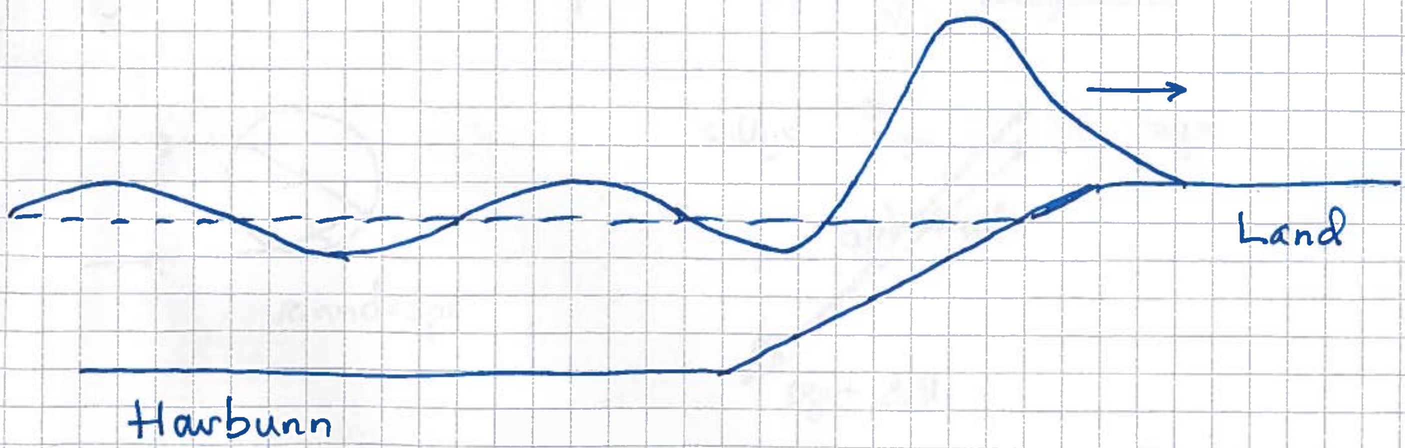
$\Rightarrow$ Bølgetoppene beveger seg saktere enn bølgetoget

[Se filmer og notat på hjemmesiden.]

Tyngdebølger på grunt vann:

$$\omega(k) = \sqrt{gk \cdot kD} = \sqrt{gD} \cdot k \Rightarrow v_g = v_f = \sqrt{gD}$$

Tsunami: Jordskjelv på havbunnen kan gi bølger på overflaten med $\lambda > 100$ km. Da er $D \ll \lambda$, og $v_g = \sqrt{gD}$. Siden dybden D avtar innover mot land, vil v_g avta inn mot land. Med konstant intensitet $I = \bar{\varepsilon} \cdot v_g$ og avtagende v_g vil energitettheten $\bar{\varepsilon}$, og dermed bølgens amplitude ξ_0, øke inn mot land.

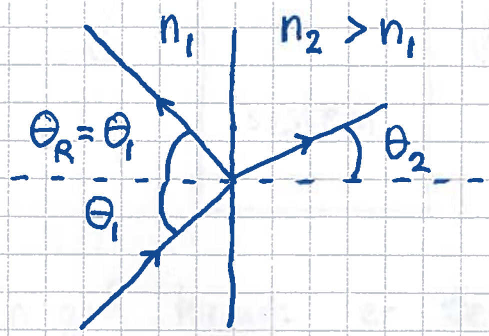


- Elektromagnetiske bølger i isolatorer

$v = c/n$; n = stoffets brytningsindeks
$c = 3\cdot 10^8$ m/s = lysfarten i vakuum

Luft: $n \approx 1.0$ Vann: $n \approx 1.34$ Glass: $n \approx 1.52$

Gir geometrisk optikk :

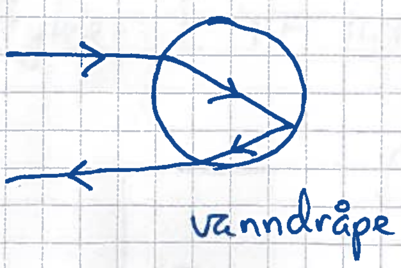


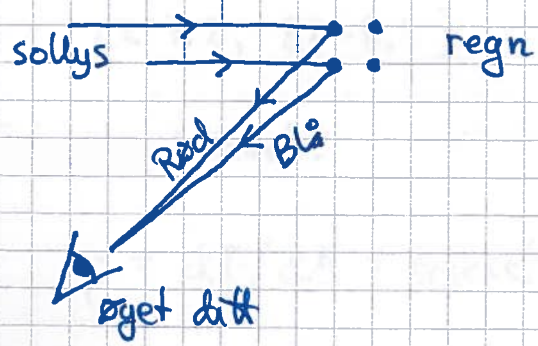
Refleksjonsloven: $\theta_R = \theta_1$

Snells lov (Brytningsloven):

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Dispersjon: For vann og glass (etc) øker n med økende frekvens for synlig lys, dvs n(blått) > n(rødt). Da brytes blått lys mest og rødt lys minst når hvitt sollys går fra luft og inn i vanndråper. Dette gir regnbue :





Vi ser rødt øverst og blått nederst.