Størrelser og enheter [YF1]

Eks:

Dekadisk forstavelse (k = kilo = 10^3)

Masse $m = 79.2$ kg

↑ Fysisk størrelse ↑ Symbol ↑ Tallverdi (med 3 gjeldende siffer) ↑ SI-enhet

Notasjon: $[m] = \text{kg}$

(SI-enheten til masse er kilogram)

SI-systemet:

Grunnenheter:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Lengde} & [l] = \text{m} \\ \text{Masse} & [m] = \text{kg} \\ \text{Tid} & [t] = \text{s} \end{array}\right\} \text{Mekanikk}$$

Strømstyrke $[I] = \text{A}$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Temperatur} & [T] = \text{K} \\ \text{Stoffmengde} & [n] = \text{mol} \end{array}\right\} \text{Termodynamikk}$$

Lysstyrke $[I] = \text{cd}$

Sammensatte enheter:

Hastighet $[v] = m/s$

Impuls $[p] = kg\ m/s$ osv

Avledete enheter:

Kraft $[F] = kg\ m/s^2 = N$

Energi $[W] = N\,m = J$ osv

---

1 s = 9192631770 perioder av stråling pga en bestemt elektronovergang i atomet ^{133}Cs

1 m = lengden som lys tilbakelegger i vakuum i løpet av 1/299792458 s

1 kg = massen av en platina-iridium-sylinder i Paris

Fra 20.05.2019 (vedtatt 16.11.2018) får kg, A, K og mol nye definisjonen, basert på eksakt definerte tallverdier for naturkonstanter:

$h \equiv 6.62607015 \cdot 10^{-34}\ kg\ m^2/s$ (Plancks konstant)

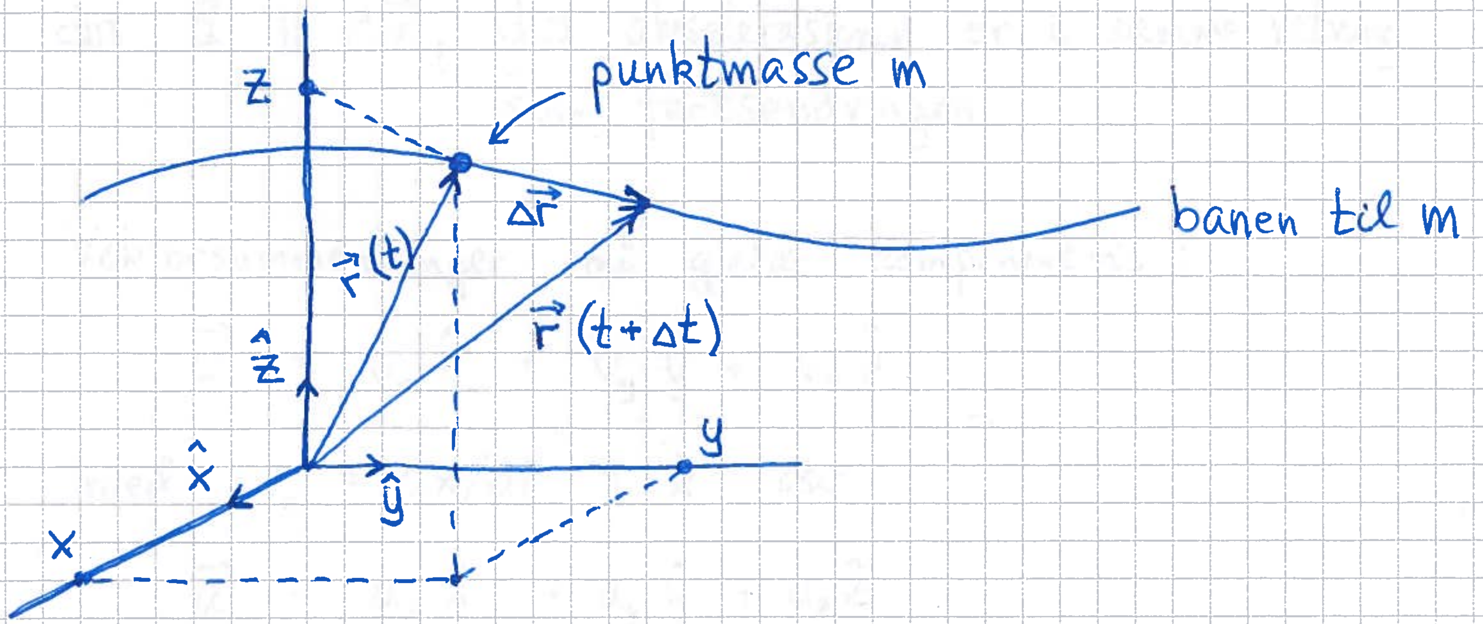
$e \equiv 1.602176634 \cdot 10^{-19}\ A\,s$ (Elementærladningen)

$k_B \equiv 1.380649 \cdot 10^{-23}\ J/K$ (Boltzmanns konstant)

$N_A \equiv 6.02214076 \cdot 10^{23}\ mol^{-1}$ (Avogadros konstant)

MEKANIKK [YF 2-11, 14 ; LL 1-7, 9]

Kinematikk [YF 2, 3 ; LL 1]



Enhetsvektorer : $|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$; $[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1$ (dimensjonsløse)

$$\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1$$

$$\hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{x}\cdot\hat{z} = \dots = 0$$

Posisjonen til m (ved tid t) :

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z}$$

Forflytning (i løpet av Δt) :

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

Hastighet $\stackrel{\text{def}}{=}$ forflytning pr tidsenhet

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

dvs $\vec{v} \parallel \Delta\vec{r}$, dvs hastigheten er tangentiell til banen

Akselerasjon $\stackrel{def}{=}$ hastighetsendring pr tidsenhet

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

dvs $\vec{a} \parallel d\vec{v}$, dvs akselerasjonen er i samme retning som fartsendringen

Vektorsammenhenger må gjelde komponentvis:

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$$

med $v_x = dx/dt = \dot{x}$ osv

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$$

med $a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$ osv

Finner $\vec{r}$ fra $\vec{v}$ med integrasjon:

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}\,dt \Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t)\,dt$$

Finner $\vec{v}$ fra $\vec{a}$ med integrasjon:

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a}\,dt \Rightarrow \int_{\vec{v}(0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int_0^t \vec{a}(t)\,dt$$

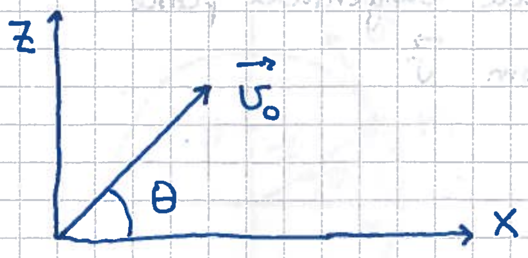
$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t)\,dt$$

Hvis $\vec{a}$ er konstant:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\cdot t \;; \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2$$

$$(\vec{v}(0) = \vec{v}_0 \;; \quad \vec{r}(0) = \vec{r}_0)$$

Eks: Bevegelse i tyngdefeltet



$\vec{a} = -g\hat{z}$

Startbetingelser:

$\vec{r}(0) = 0$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$

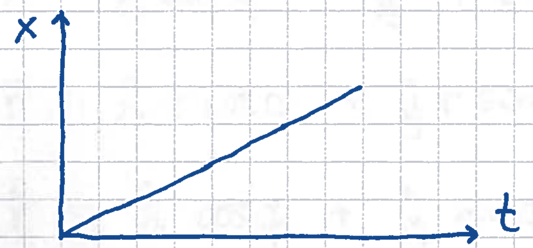
Finn $\vec{r}(t)$ og banen $z(x)$

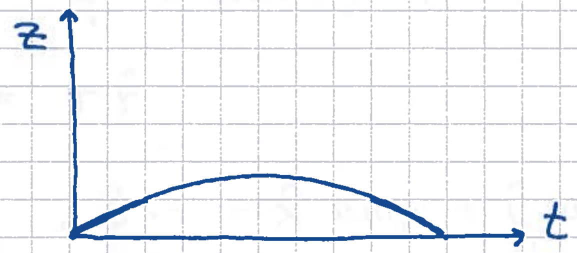
Løsning:

$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t = \vec{v}_0 - gt\,\hat{z}$

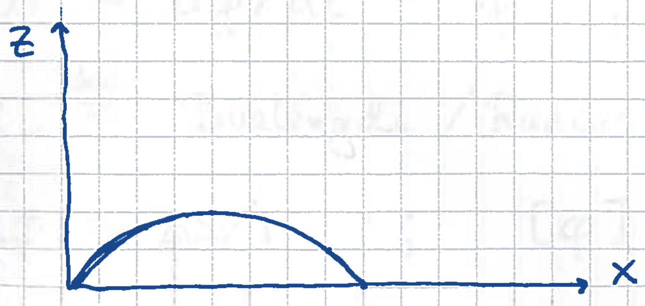
$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2\,\hat{z}$

$\Rightarrow x(t) = v_0 t\cos\theta, \quad z(t) = v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$



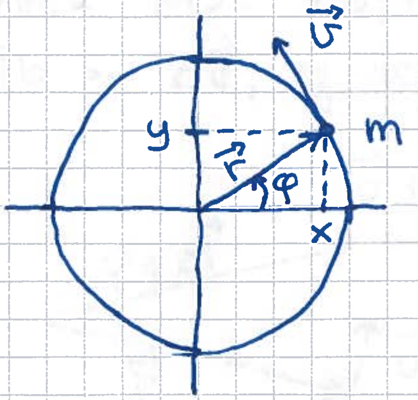


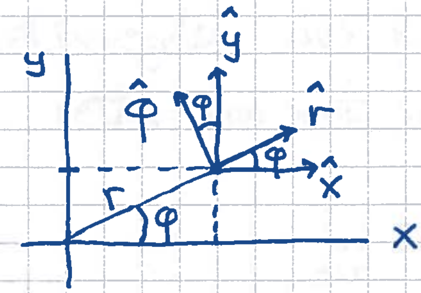
Banen: $t = x/v_0\cos\theta \quad \Rightarrow z(x) = x\tan\theta - \dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$



Parabel (som observert)

Sirkelbevegelse [YF 3.4; LL 1.7, 1.8]





Polarkoordinater: r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom $\hat{x}$ og $\hat{r}$; positiv mot klokka

Fra figur:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\vec{r} = \hat{x}\, r\cos\varphi + \hat{y}\, r\sin\varphi = r\hat{r}$$

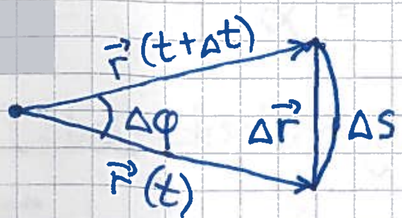
$$\hat{r} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi, \qquad \hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$$

Vinkelhastighet $\stackrel{\text{def}}{=}$ Omløpt vinkel pr tidsenhet

$$\omega = d\varphi/dt = \dot{\varphi} \quad ; \quad [\omega] = s^{-1}$$

Vinkel $\stackrel{\text{def}}{=}$ Buelengde / Radius

$$\Delta\varphi = \Delta s/r \quad ; \quad [\varphi] = 1 \quad \text{(rad)}$$



$\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta\varphi \to 0$

$\Delta r \to \Delta s = r\Delta\varphi$

$\Delta\vec{r} \perp \vec{r}$

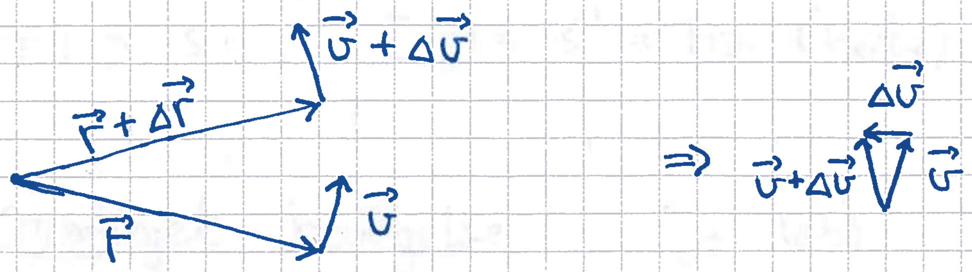
$$\Rightarrow v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = r\dot{\varphi} = r\omega$$

$$\vec{v} \parallel \Delta\vec{r} \text{ og } \Delta\vec{r} \perp \vec{r} \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{r} \Rightarrow \vec{v} = v\hat{\varphi} = r\omega\hat{\varphi}$$

Akselerasjon ved sirkelbevegelse :

Anta først <u>uniform</u> sirkelbevegelse, dvs konstante ω og v.

Da er $\Delta\vec{v}$, og dermed $\vec{a}$, rettet <u>inn mot sirkelens sentrum</u> :



Anta $\varphi(0) = 0$:

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^{t} dt \quad \Rightarrow \varphi(t) = \omega t$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \hat{x}\, r \cos\omega t + \hat{y}\, r \sin\omega t$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = -\hat{x}\, \omega r \sin\omega t + \hat{y}\, \omega r \cos\omega t$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{\perp}(t) = -\hat{x}\, \omega^2 r \cos\omega t - \hat{y}\, \omega^2 r \sin\omega t$$

$$= -\omega^2 \vec{r}(t) = \underline{\text{sentripetalakselerasjonen}}$$

Hvis $\dot{v} \neq 0$, har vi også <u>baneakselerasjon</u>,

$$a_{\parallel} = \dot{v} = r\dot{\omega}$$

og <u>vinkelakselerasjon</u>,

$$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad ; \quad [\alpha] = s^{-2}$$

<u>Total</u> akselerasjon :

$$\vec{a} = \vec{a}_{\perp} + \vec{a}_{\parallel} = -\omega^2 r\,\hat{r} + \dot{\omega} r\,\hat{\varphi}$$

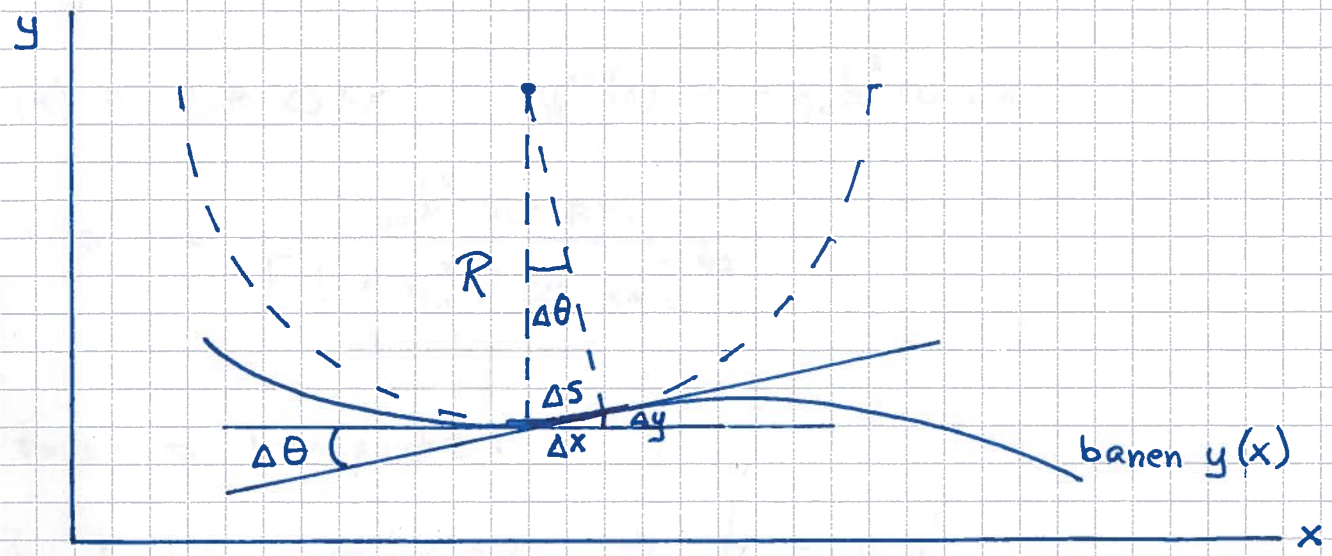
$$\omega = v/r \Rightarrow \vec{a}_{\perp} = -\frac{v^2}{r}\,\hat{r}$$

Periode = Tid pr omløp : $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$

Frekvens = Antall omløp pr tidsenhet : $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

$[T] = s$; $[f] = s^{-1} = Hz$ (hertz) ; $[\omega] = s^{-1}$

Krumlinjet bevegelse (jf lab)



$a_\perp = v^2/R$ med R = radius i "tenkt" sirkel som best tangerer banen ; R = krumningsradien

Ser på små Δs og $\Delta\theta$: $\Delta s \to ds$, $\Delta\theta \to d\theta$

Vinkeldef.: $d\theta = ds/R \Rightarrow 1/R = d\theta/ds$

Pythagoras: $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \Rightarrow ds = dx\sqrt{1 + (dy/dx)^2}$

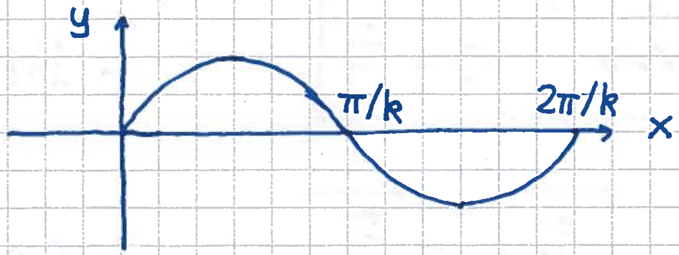
Kjerneregel: $\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \left[1 + (dy/dx)^2\right]^{-1/2}$

Fra figur: $\tan\theta = dy/dx \Rightarrow \theta = \arctan(dy/dx)$
= banens helningsvinkel

$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dx} = \left[1 + (y')^2\right]^{-1} \cdot y''$; $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R} = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}$$ (velger R som positiv)

Eks: $y(x) = y_0 \sin kx$



$y'(x) = y_0 k \cos kx, \qquad y''(x) = -y_0 k^2 \sin kx$

$$\Rightarrow \quad 1/R = \frac{|y_0 k^2 \sin kx|}{[1 + y_0^2 k^2 \cos^2 kx]^{3/2}}$$

I topp- og bunnpunkt:

$\sin kx = \pm 1, \quad \cos kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R} = y_0 k^2$

I vendepunktene, $kx = n\pi$: $\quad \frac{1}{R} = 0 \quad \Rightarrow a_\perp = 0$

Newtons lover [YF 4, 5 ; LL 2, 3]

$m, \vec{v}, \vec{a}$ = legemets masse, hastighet, akselerasjon

$\vec{F}$ = netto ytre kraft på legemet

N1 : $\boxed{\vec{F} = 0 \iff \vec{v} = \text{konstant}}$

N2 : $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$

N3 : $\boxed{\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}}$

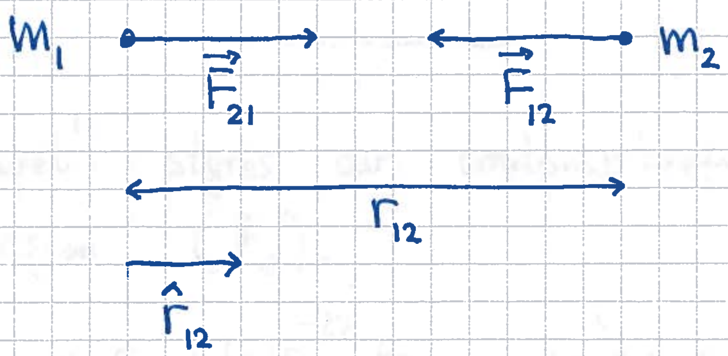
Dvs, krefter er <u>vekselvirkninger</u> mellom legemer.

Hvis A virker på B med $\vec{F}_{AB}$, virker B på A med $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

$[F] = kg \cdot \frac{m}{s^2} = N$ (newton)

Fundamentale krefter i naturen [YF 5.5 ; LL 2.1] (11)

- Gravitasjon (Tyngdekrefter). Svak tiltrekning mellom masser.

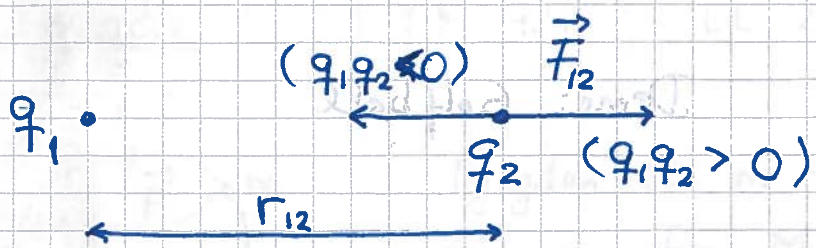


Newtons gravitasjonslov : $\vec{F}_{21} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$

Gravitasjonskonstanten : $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \ Nm^2/kg^2$

- Elektromagnetisk v.v. "Coulombkrefter".

Tiltrekning og frastøtning mellom ladninger.



Coulombs lov : $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$

$[q] = C$ (coulomb) ; $1 C = 1 As$

Vakuumpermittiviteten : $\varepsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \ C^2/Nm^2$

- Kjernekrefter, svake og sterke. Meget kort rekkevidde. Relevant for hhv radioaktivitet, og stabilitet av atomkjerner.

"Dagliglivet" styres av coulombkrefter (F_E) og gravitasjon (F_G).

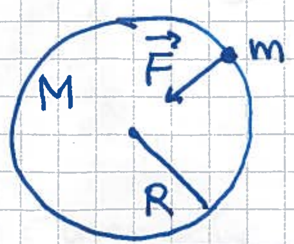
Proton: $m_p \approx 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg, $q = +e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C
Elektron: $m_e \approx 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, $q = -e$

$\Rightarrow$ $F_E \gg F_G$ mellom atomer, molekyler og "dagligdagse" objekter

$F_G \gg F_E$ mellom himmellegemer

$F_G \gg F_E$ mellom dagligdags objekt og jordkloden

Tyngde [YF 4.4 ; LL 2.5]



Tyngden til m = Gravitasjonskraften på m fra M:

$$F = G Mm / R^2$$

Jorda: $M \approx 6 \cdot 10^{24}$ kg, $R \approx 6370$ km

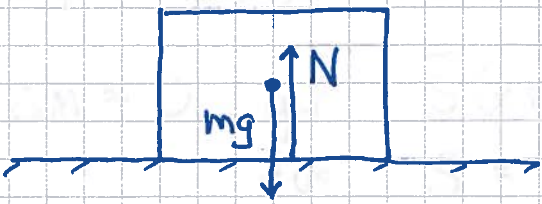
$\Rightarrow$ $g = GM/R^2 \approx 9.81\ m/s^2$ = tyngdens akselerasjon (nær jordas overflate

Fritt fall: mg er eneste kraft på m
N2 gir da: $mg = ma$, dvs $\underline{a = g}$

Kontaktkrefter [YF 4.1 ; LL 3]

Normalkraft : N = netto frastøtende coulombkraft mellom to legemer i kontakt ; $\vec{N} \perp$ kontaktflaten

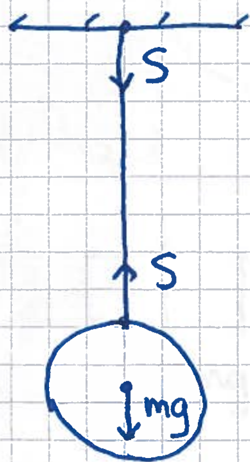
Eks :



Kloss i ro gir $N = mg$ (pga N1)

Snorkraft : S = netto tiltrekkende coulombkraft mellom snora og legemet som henger i snora ; $\vec{S}$ i snoras retning

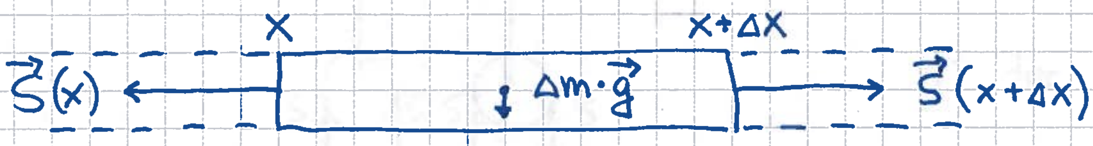
Eks :



Kule i ro gir $S = mg$ (pga N1)

[Finn selv "N3-motkreftene" til mg, N og S]

Lett og stram snor blir rett, med konstant snordrag S: 14

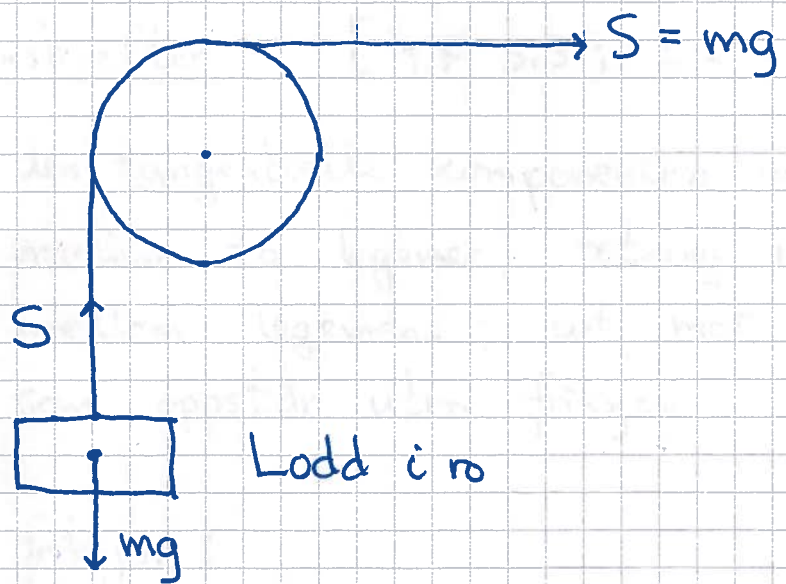


N2 : $\vec{S}(x) + \vec{S}(x+\Delta x) + \Delta m \cdot \vec{g} = \Delta m \cdot \vec{a}$

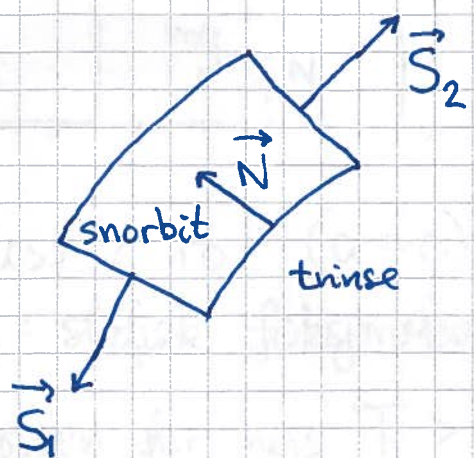
$\Delta m \approx 0$ gir $\vec{S}(x+\Delta x) = -\vec{S}(x)$

dvs $S = |\vec{S}| = $ konstant

Friksjonsfri trinse endrer kun retningen på $\vec{S}$:

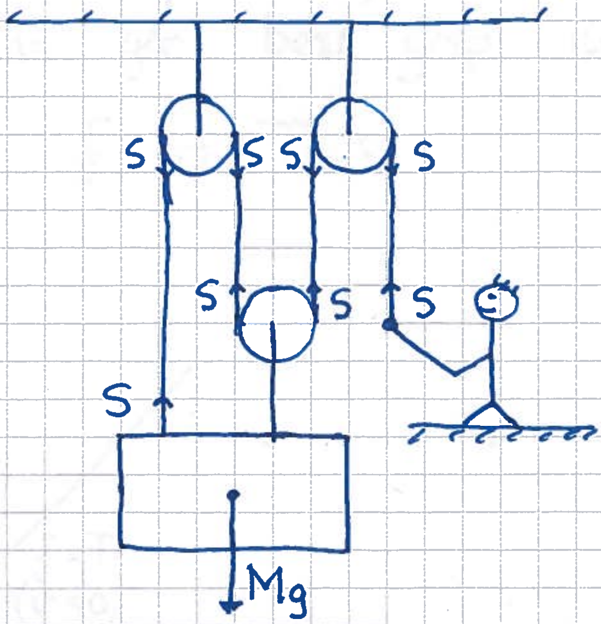


Liten bit av snora:



$|\vec{S}_1| = |\vec{S}_2|$

Talje:



N1 for kassa:

$$3 \cdot S - Mg = 0$$

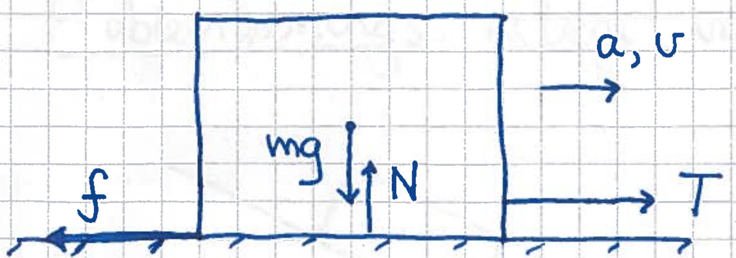
$$\Downarrow$$

$$\underline{S = \tfrac{1}{3} Mg}$$

Friksjonskrefter [YF 5.3; LL 3.1]

f = den tangentielle komponenten av kontaktkraften mellom to legemer; retning mot relativ bevegelse mellom legemene; evt. mot relativ bevegelse som oppstår uten friksjon

Tørr friksjon:



T = trekk-kraft

f = friksjonskraft

N2: $T - f = ma$

Kloss i ro $(a=0)$: $f = T$; $f_{max} = \mu_s \cdot N$

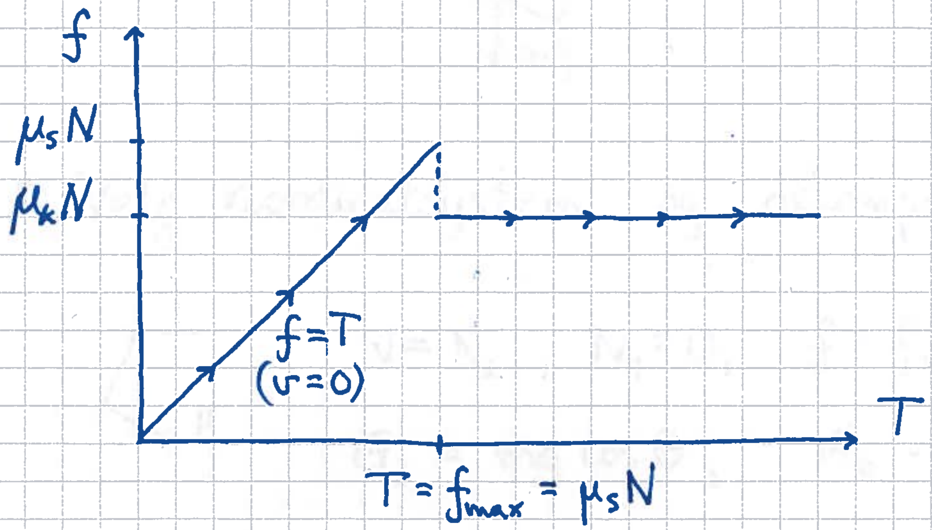
μ_s = statisk friksjonskoeffisient

Klossen glir hvis $T > f_{max}$; da er $f = \mu_k \cdot N$

μ_k = kinetisk friksjonskoeffisient

Som regel er $\mu_k \lesssim \mu_s$: Ujevnheter å overflatene gir best grep når $v = 0$

Grafisk, f vs T :



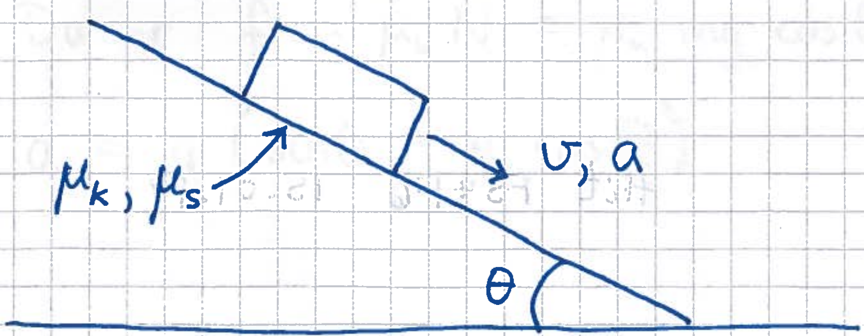
Et par tallverdier :

Stål mot is : $\mu_s \approx 0.03$

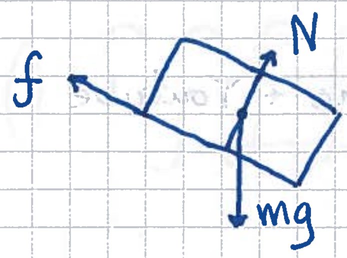
Gummi mot plast : $\mu_s \sim 1$ (lab)

Våt svamp mot bordplate : $\mu_s > 1$

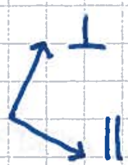
<u>Problemløsningsstrategi</u> via et enkelt eksempel :



- Finn alle ytre krefter og tegn "fritt-legeme-diagram"



- Velg koordinatsystem og dekomponer



$$N = N_\perp \,, \quad N_\parallel = 0, \quad f = f_\parallel \,, \quad f_\perp = 0$$

$$G_\perp = mg\cos\theta \,, \quad G_\parallel = mg\sin\theta$$

- Bruk N1 $\left(\sum_i \vec{F}_i = 0\right)$ eller N2 $\left(\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i / m\right)$ og løs resulterende ligning(er)

N1, $\perp$: $\quad N = mg\cos\theta$

N2, $\parallel$: $\quad mg\sin\theta - f = ma$

Hvis kloss/svamp i ro : $\quad f = mg\sin\theta \qquad (a = 0)$

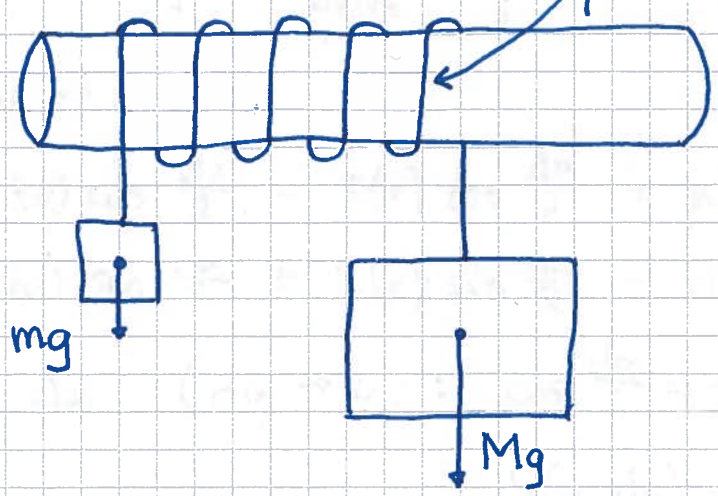
Glir hvis $mg\sin\theta > f_{max} = \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta$,
dvs hvis $\tan\theta > \mu_s$

Da er $f = \mu_k N = \mu_k mg\cos\theta$, slik at

$$a = g\left(\sin\theta - \mu_k \cos\theta\right)$$

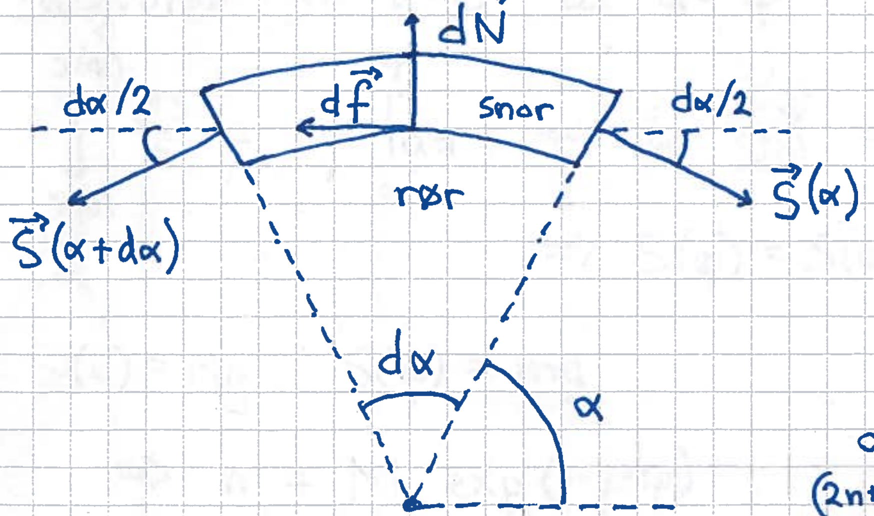
Eks: Snorfriksjon ("Med livet som innsats")

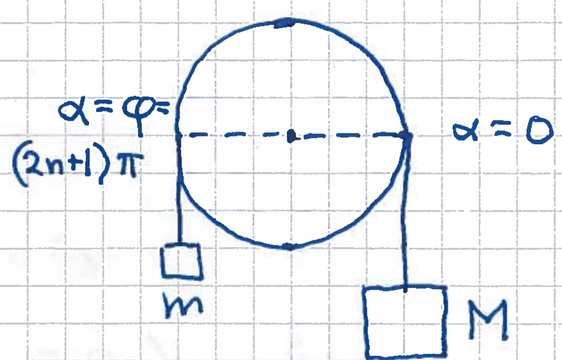
μ = statisk friksjonskoeff. mellom snor og rør



Bestem minste m som holder M oppe, med kontaktvinkel φ mellom snor og rør.
(I fig. ovenfor er $\varphi = 9\pi$.)

Løsning: Bruker N1 for liten snorbit





$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{S}(\alpha + d\alpha) + \vec{S}(\alpha) + d\vec{N} + d\vec{f} = 0$$

med $\vec{S}$ = snordrag, fra resten av snora
$d\vec{N}$ = normalkraft, fra røret
$d\vec{f}$ = friksjonskraft, — " —

Minst mulig m når statisk friksjon er størst mulig, dvs $df = df_{max} = \mu \cdot dN$

Dekomponerer:

$$\parallel : \; S(\alpha+d\alpha)\cos\frac{d\alpha}{2} - S(\alpha)\cos\frac{d\alpha}{2} + \mu\, dN = 0$$

$$\perp : \; S(\alpha+d\alpha)\sin\frac{d\alpha}{2} + S(\alpha)\sin\frac{d\alpha}{2} - dN = 0$$

Med liten $d\alpha$ $(d\alpha \to 0)$: $\cos\frac{d\alpha}{2} \approx 1$, $\sin\frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$

$$S(\alpha+d\alpha) - S(\alpha) = dS$$

$$S(\alpha+d\alpha) + S(\alpha) = 2S$$

Dermed:

$$dS = -\mu\, dN, \qquad S\, d\alpha = dN$$

$$\Rightarrow dS/S = -\mu\, d\alpha$$

Integrerer fra $\alpha = 0$ til $\alpha = \varphi$:

$$\int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = -\mu \int_0^{\varphi} d\alpha \Rightarrow \ln\frac{S(\varphi)}{S(0)} = -\mu\varphi$$

$$\Rightarrow S(\varphi) = S(0)\, e^{-\mu\varphi}$$

$S(0) = Mg$, $S(\varphi) = mg$

$$\Rightarrow m = M \cdot \exp(-\mu\varphi)$$

Exp: $\mu \approx 0.17$, $M = 1\,\mathrm{kg}$, $\varphi = 9\pi$

$$\Rightarrow m = 1000\,\mathrm{g} \cdot \exp(-0.17 \cdot 9\pi) \approx 8\,\mathrm{g}$$

Omvendt: Påkrevd kraft for å heise M opp er

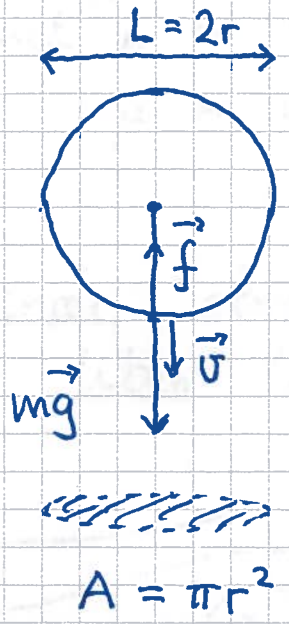
$$S(\varphi) = S(0) \cdot \exp(+\mu\varphi)$$

$$\Rightarrow m = 1\,\mathrm{kg} \cdot \exp(+0.17 \cdot 9\pi) \approx 122\,\mathrm{kg}$$

Friksjon i fluider [YF 5.3 ; LL 8]

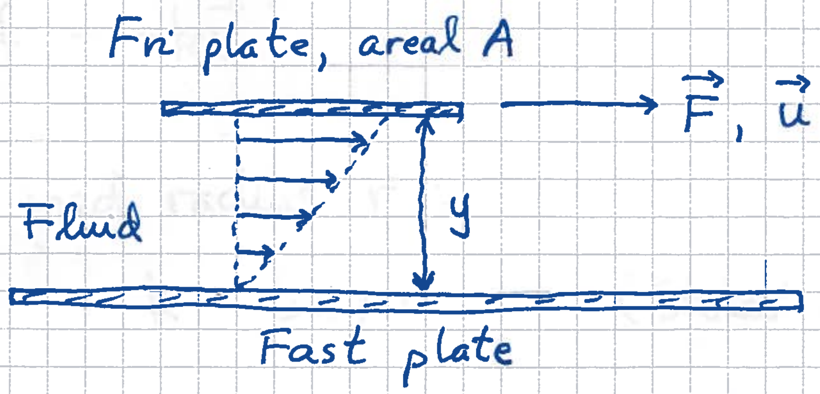
Anta symmetrisk legeme med lineær utstrekning L på tvers av $\vec{v}$, og et omgivende fluid (gass, væske) med massetetthet ρ og dynamisk viskositet μ.

Eks: Ball som faller i luft



$\vec{f}$ = luftmotstand

Definisjon og måling av μ:



Med liten fart u på den frie plata fås lineær fartsprofil i fluidet mellom platene.

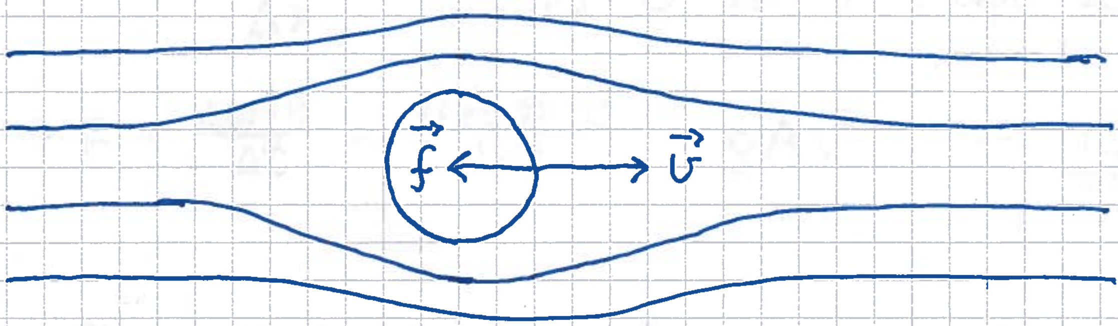
Exp. gir $F = \mu \cdot \frac{A \cdot u}{y}$

der μ = fluidets dynamiske viskositet ; $[\mu] = \frac{kg}{m \cdot s}$

Eks (v/ 20°C) :

Luft $\mu \approx 2 \cdot 10^{-5}$
Vann $\mu \approx 10^{-3}$
Glyserol $\mu \approx 1$
Sirup $\mu \approx 10^{2}$

Laminær strømning (pen, lagdelt) når v er liten (nok) :



$\vec{f} = -k\vec{v}$

Kule med radius r :

$k = 6\pi\mu r$ (Stokes' lov)

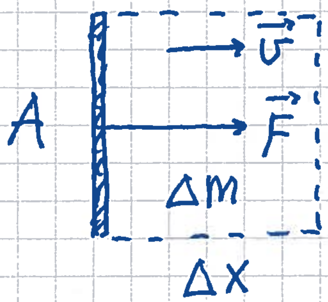
Turbulent strømning (uordnet, virvler) når v er stor (nok):

$$\vec{f} = -\left(\tfrac{1}{2}\rho A C_d\right) v^2 \hat{v}$$

C_d = drag-koeffisienten

(Kule: $C_d \approx 0.5$)

Eks: C_d for plate



Må skyve med kraft F for å holde konstant fart v, fordi luftmassen $\Delta m = \rho \Delta V = \rho A \Delta x$ endrer sin fart fra 0 til v i løpet av $\Delta t = \Delta x / v$

$$\Rightarrow F = \frac{\Delta m \cdot v}{\Delta t} = \frac{\rho A \Delta x \cdot v}{\Delta t} = \rho A v^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{C_d = 2}}$$

Eks: Bilen Revolve har $A \approx 1.1\ m^2$ og $C_d \approx 1.35$. Luftmotstand ved fart 60 km/h er da

$$f = \tfrac{1}{2}\rho A C_d v^2$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot 1.2 \cdot 1.1 \cdot 1.35 \cdot \left(\tfrac{60}{3.6}\right)^2 \ N$$

$$\approx \underline{\underline{250\,N}}$$

[Luft: $\rho \approx 1.2\ kg/m^3$]