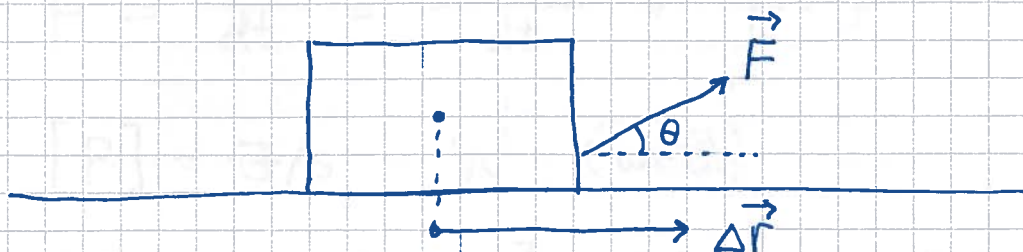


# Arbeid og energi [YF 6, 7 ; LL 4]

(23)

## Arbeid [YF 6.1-6.3 ; LL 4.1]



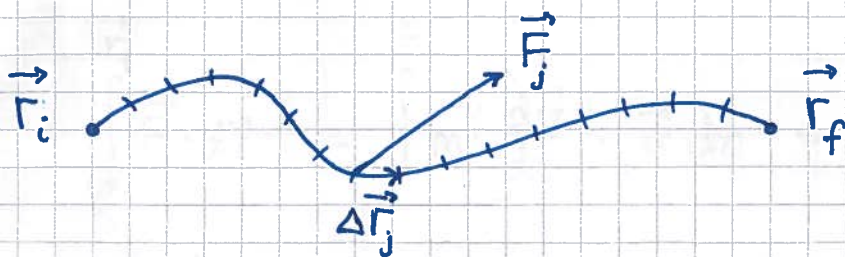
arbeid  $\stackrel{\text{def}}{=} \text{kraft} \times \text{forflytning}$

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta$$

= arbeid utført av  $\vec{F}$  på klossen når forflytningen er  $\Delta \vec{r}$

$$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J} \quad (\text{joule})$$

Generelt:



$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \xrightarrow{\Delta \vec{r}_j \rightarrow 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arbeid utført av  $\vec{F}$  ved forflytning fra  $\vec{r}_i$  til  $\vec{r}_f$

## Effekt [YF 6.4 ; LL 4.1]

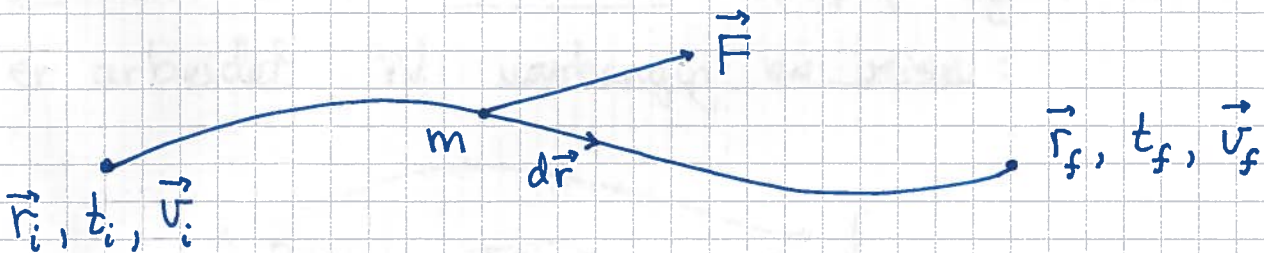
effekt  $\stackrel{\text{def}}{=}$  arbeid (eller energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$[P] = \text{J/s} = \text{W} \quad (\text{watt})$$

$$1 \text{ kWh} = 1000 \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 3600 \text{ s} = 3.6 \text{ MJ}$$

## Kinetisk energi [YF 6.2 ; LL 4.2]



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_i^f m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int_i^f \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{v} \cdot d\vec{v} + d\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(v^2)$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \int_{v_i^2}^{v_f^2} d(v^2) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$K =$  kinetisk energi  $\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2$

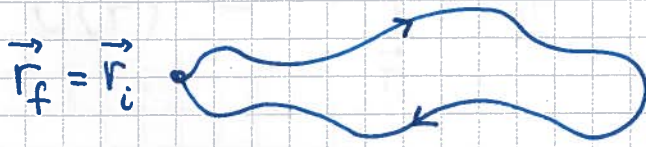
$$\Rightarrow \boxed{W = \Delta K = K_f - K_i}$$

Arbeid  $W$  utført på legemet tilsvarer endringen i legemets kinetiske energi  $\Delta K$



# Konservative krefter [YF 7.3 ; LL 4]

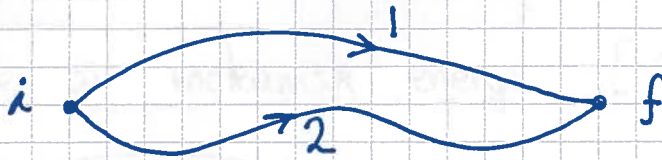
Anta at  $\vec{F}$  virker på legeme som returnerer til sin startposisjon, dvs  $\vec{r}_f = \vec{r}_i$  :



Hvis  $K_f = K_i$ , er  $W = \Delta K = 0$ , dvs

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Da er  $\vec{F}$  en konservativ kraft, og i såfall er arbeidet  $W$  uavhengig av veien :



$$\begin{aligned} \text{Bevis: } 0 &= \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_1 + \left\{ \int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_2 \\ &= W_1 - W_2 \Rightarrow \underline{W_1 = W_2} \quad (\text{qed}) \end{aligned}$$

Konservative krefter: Tyngdekraft, coulombkraft

Friksjonskrefter er ikke konservative.

## Potensiell energi [YF 7.1-7.4; LL 4.3-4.4]

Hvis  $\vec{F}$  er konservativ, definerer vi en tilhørende potensiell energi

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

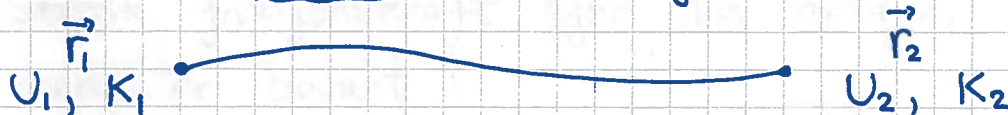
der vi har valgt  $U=0$  i pos.  $\vec{r}=\vec{r}_0$ .

Dvs: Bare forskjeller i pot. energi har fysisk betydning.

Fra def. ovenfor er altså  $dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$ . Samtidig gjelder generelt at  $dU = \nabla U \cdot d\vec{r}$ . Følgelig er

$$\vec{F} = -\nabla U$$

## Bevarelse av mekanisk energi [YF 7.1-7.3; LL 4.5]



$$\Delta K = K_2 - K_1 = W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (0, 1, 2 \hat{=} \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = - \int_0^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} - \left( - \int_0^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} \right) = \int_2^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W$$

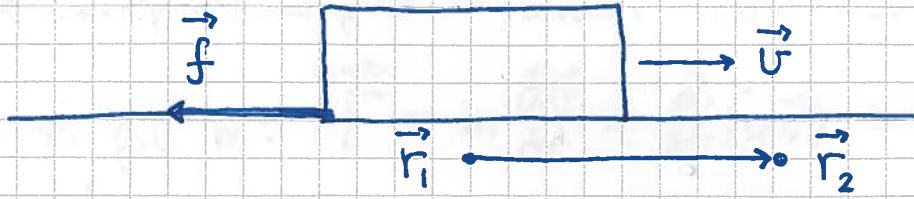
$$\Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$\Rightarrow$  Total mekanisk energi,  $E = K + U$ ,

er bevart i et konservativt system.



# Friksjonsarbeid [YF 7.3 ; LL 4.5]



$$W_f = \int_1^2 \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \quad \text{fordi } \vec{f} \text{ alltid er rettet mot } d\vec{r}$$

⇒ Mekanisk energi tapes og omdannes til varme, lyd etc.

Har  $\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ , så  $\vec{f}$  er ikke konservativ.

Merk: På lab studerer de fleste (alle?) rulling uten å gli, såkalt ren rulling.

Da er kulas kontaktpunkt i ro ( $d\vec{r} = 0$ ), slik at  $W_f = 0$  selv om  $\vec{f} \neq 0$ .

Statisk friksjonskraft gjør ikke arbeid, og mekanisk energi er bevart!

Eks: Fallende bordtennisball



$$m = 2.7g \\ r = 20 \text{ mm} \\ C_d = 0.5$$

- Hva er max fart?
- Hva er lapt andel mek. energi etter å ha falt 10 m?

Løsn:

Anta  $f = \frac{1}{2} \rho A C_d v_t^2$  når  $v = v_{\max} = v_t = \text{terminalhastighet}$ .

$$N1: f = mg \Rightarrow v_t = \sqrt{2mg / \rho A C_d} \approx \underline{8.4 \text{ m/s}} \quad (\rho = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; A = \pi r^2)$$

$$E_i = U_i = mgh; \quad E_f = \frac{1}{2} m v_t^2$$

$$\Rightarrow \frac{E_i - E_f}{E_i} = 1 - \frac{m}{\rho A C_d h} \approx \underline{64\%} \quad \left( \text{Fritt fall i 10 m gir } v_f = \sqrt{2gh} \approx 14 \text{ m/s} \right)$$

# Impuls [YF 8 ; LL 5]

(28)

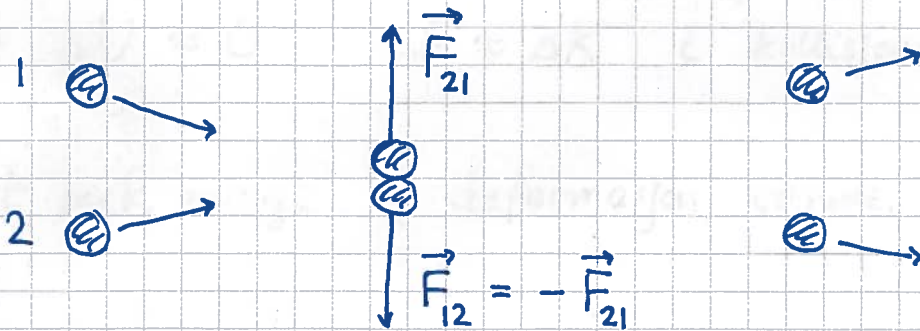
(= bevægelsesmengde = linear momentum)

$$N2 \text{ for gitt } m: \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{p} \stackrel{\text{def}}{=} m\vec{v} = \text{massens } \underline{\text{impuls}}; [p] = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

Dermed: Hvis  $\vec{F} = \sum \vec{F}_{\text{ytre}} = 0$ , er  $\vec{p}$  bevart

Indre krefter mellom legemer i et system endrer ikke systemets totale impuls:



$$N3 \Rightarrow \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$$

$$\stackrel{N2}{\Rightarrow} \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \{ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konstant}$$



## Kollisjoner [YF 8.3, 8.4 ; LL 5]

Så lenge ytre krefter kan neglisjeres, er total impuls bevart i en kollisjon. Hva med mek. energi?

Elastisk støt:  $\Delta E = 0$

Uelastisk støt:  $\Delta E < 0$

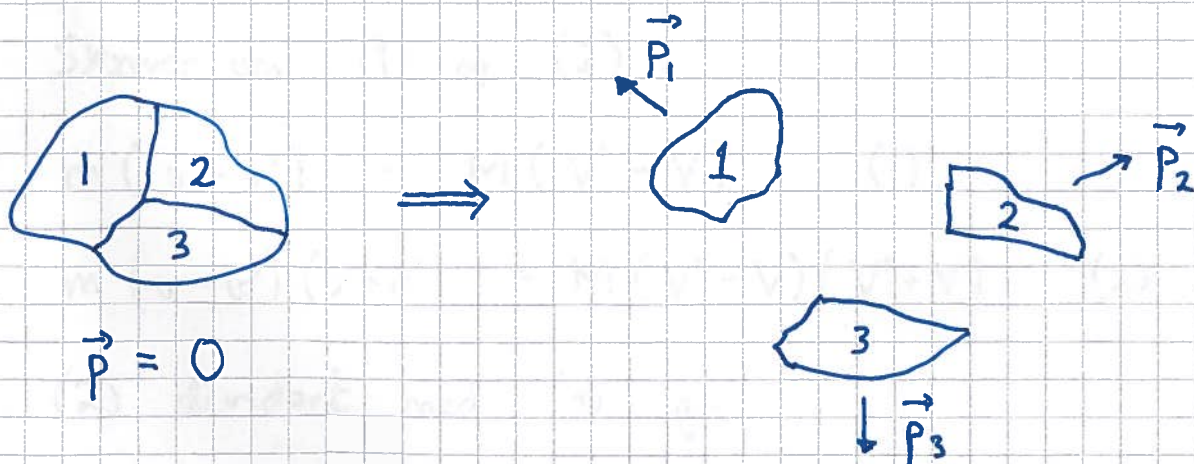
Fullstendig uelastisk støt: Legemene henger sammen med felles hastighet etter kollisjonen. Gir maksimalt tap av mekanisk energi.

Har typisk kortvange kollisjoner, på et gitt sted

$\Rightarrow \Delta U \approx 0$ ,  $\Delta E \approx \Delta K$  i kollisjonen

Tapte mek. energi  $\rightarrow$  deformasjon, varme, lyd

Eksplisjon = omvendt fullstendig uelastisk støt:



$$\sum_{j=1}^3 \vec{p}_j = 0$$

# Sentralt støt [YF 8.2-8.4 ; LL 5.3]

(30)

Kollisjon mellom  $m$  og  $M$  i 1D (langs ei linje) :

Før :  $m \bullet \rightarrow v$        $V \leftarrow \bullet M$        $\rightarrow +$

Etter :  $v' \leftarrow \bullet m$        $M \bullet \rightarrow V'$

$$\Delta p = 0 \Rightarrow mv + MV = mv' + MV' \quad (1)$$

(a) Fullstendig uelastisk støt :

$$v' = V' = \frac{mv + MV}{m + M}$$

(b) Delvis uelastisk støt : "Ikke løsbart", har bare 1 ligning, men 2 ukjente.

(c) Elastisk støt :

$$\Delta K = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2 \quad (2)$$

Skriver om (1) og (2) :

$$m(v - v') = M(V' - V) \quad (1)$$

$$m(v - v')(v + v') = M(V' - V)(V' + V) \quad (2)$$

(2) dividert med (1) gir

$$v + v' = V' + V \quad (3)$$

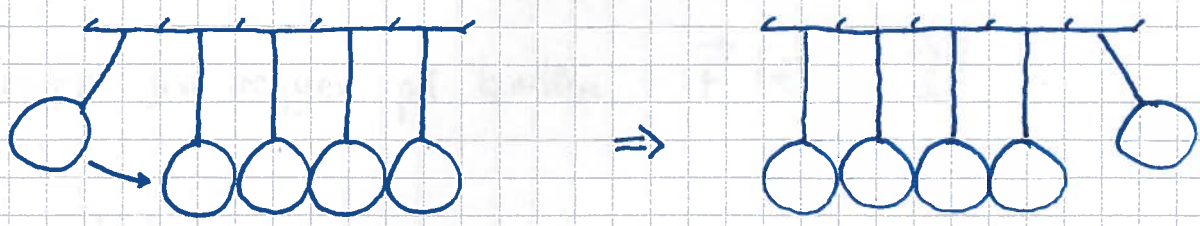


(3) · M - (1) og (3) · m + (1) ger

$$u^r = \frac{M}{m+M} \left\{ 2V + u \cdot \frac{m-M}{M} \right\}$$

$$V^r = \frac{m}{M+m} \left\{ 2u + V \cdot \frac{M-m}{m} \right\}$$

Eks 1: Newtons vugge



$m = M \Rightarrow V^r = u, u^r = V = 0$

Eks 2: Elastisk ball mot vegg



$$u^r = \frac{M}{m+M} \left\{ 0 + u \cdot \frac{m-M}{M} \right\} \stackrel{m \ll M}{=} -u \quad (\text{OK})$$

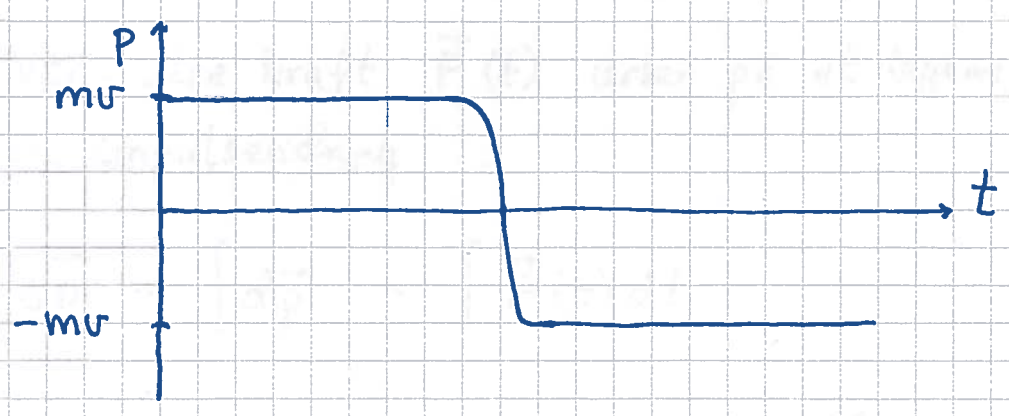
$$K^r = \frac{1}{2} m u^{r^2} = \frac{1}{2} m u^2 = K \quad (\text{OK})$$

$$p^r = m u^r = -m u \quad (\text{ballen})$$

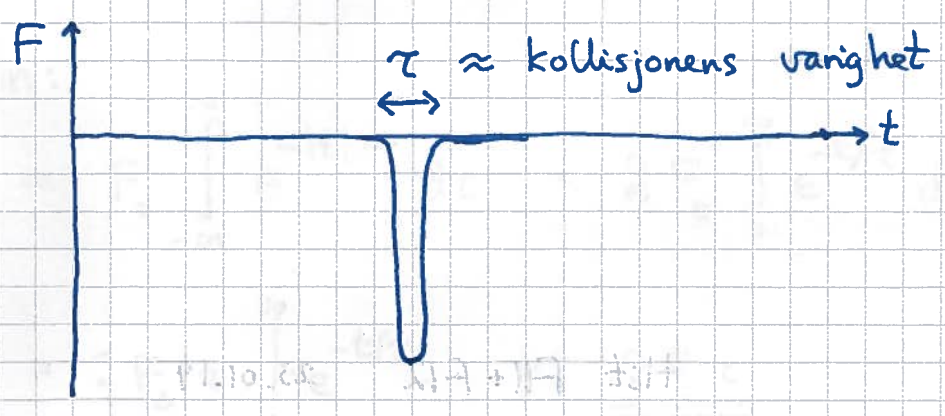
$$P^r = M V^r = M \cdot \frac{m}{m+M} \cdot 2u = 2 m u \quad (\text{veggen})$$

$$\Rightarrow P_{\text{tot}}^r = p^r + P^r = m u = P_{\text{tot}} \quad (\text{OK})$$

La oss følge ballens  $p(t)$ , kvalitativt :



Kraft fra vegg på ballen,  $\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt}$  :



Estimat: Anta  $\tau = 2 \text{ ms}$  og  $\Delta v = 40 \text{ m/s}$ .

Da er midlere akselerasjon i støtet

$$\langle a \rangle \approx \frac{40 \text{ m/s}}{0.002 \text{ s}} = 20 \text{ km/s}^2$$

så tyngden  $mg$  er åpenbart neglisjerbar i selve kollisionen.



"Kraftstøt" (eng: impulse):

Når ytre kraft  $\vec{F}(t)$  virker på et legeme, får legemet en impulsending

$$\Delta \vec{p} = \int d\vec{p} = \int \vec{F}(t) dt$$

Eks: Anta at  $F(t) = F_0 \exp(-|t|/\tau)$

Hva blir total impulsending?

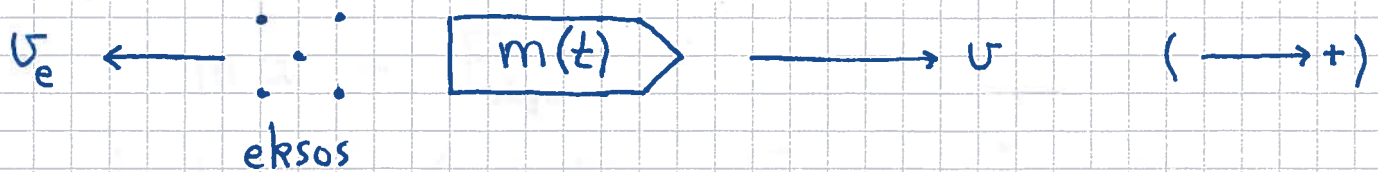
Løsn:

$$\begin{aligned} \Delta p &= F_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|/\tau} dt = 2F_0 \int_0^{\infty} e^{-t/\tau} dt \\ &= 2F_0 \tau \int_0^{\infty} e^{-t/\tau} dt = \underline{\underline{2F_0 \tau}} \end{aligned}$$

# Rakett

[ YF 8.6 ; LL 5.4 ]

(34)



Eksosfart relativt raketten :  $u < 0$

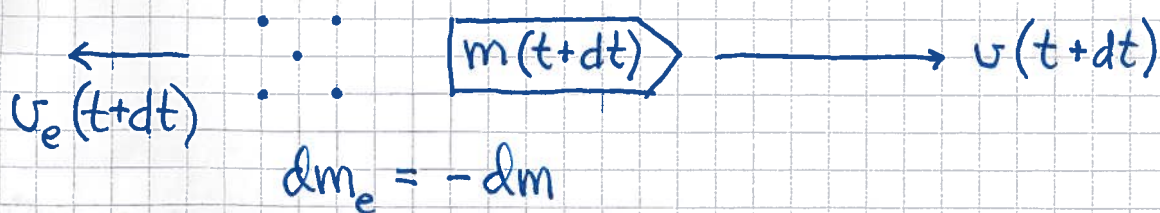
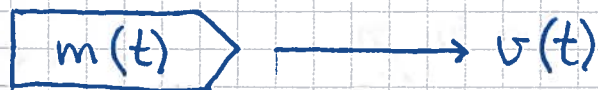
Rakettfart relativt fast system :  $v > 0$

Eksosfart " " :  $u_e = u + v$

Drivstoff-forbruk pr tidsenhet :  $dm/dt < 0$

Anta konstant  $u$ , og (inntil videre)  $F_{ytre} = 0$ .

For en gitt masse må vi nå ha impulsbevarelse fra et tidspunkt  $t$  til et tidspunkt  $t + dt$  :



Ved tid  $t$  :  $p(t) = m(t)v(t)$

Ved tid  $t + dt$  :  $p(t+dt) = m(t+dt)v(t+dt) + dm_e \cdot u_e(t+dt)$   
 $= [m(t) + dm][v(t) + dv] - dm[u + v(t) + dv]$   
 $= m(t)v(t) + m(t)dv - u dm$

Siden  $p(t+dt) = p(t)$ , må vi ha :  $m dv - u dm = 0$



Divisjon med  $dt$  gir:  $m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt}$

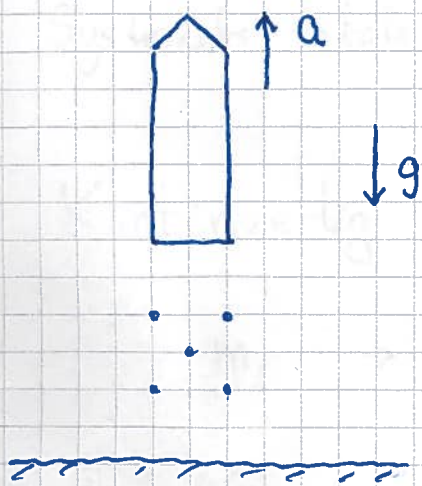
Dette er Newtons 2. lov,

$$ma = F_{\text{skyr}}$$

med skyrkraft (rekyl)  $F_{\text{skyr}} = u \dot{m} > 0$

Ved oppskyting fra bakkenivå har vi i tillegg

$$F_{\text{ytre}} = -mg$$



$$\Rightarrow ma = u \dot{m} - mg$$

Dvs, total kraft på raketten er nå

$$F = u \dot{m} - mg$$

og vi må selvsagt sørge for  $u \dot{m} > mg$  for å kunne ta av.

[Øving:

$$-mg + u \frac{dm}{dt} = m \frac{dv}{dt} \quad / \cdot \frac{dt}{m}$$

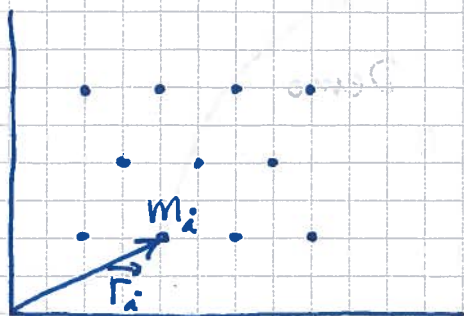
$$\Rightarrow -g dt + u \frac{dm}{m} = dv$$

som kan integreres ]

# Massesenter

[YF 8.5 + oppg 8.115 og 116 ;  
LL 5.6, 5.8, 6.1]

(36)



N punktmasser  $m_1, m_2, \dots, m_N$   
i posisjoner  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$

Systemets massesenter : 
$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

Systemets totale masse : 
$$M = \sum_i m_i$$

Kontinuerlig massefordeling :

$$m_i \rightarrow dm \quad \text{og} \quad \sum_i \rightarrow \int$$

slik at

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm \quad ; \quad M = \int dm$$

Masseelement  $dm$  :

1D :  $dm = \lambda dl$  ;  $\lambda =$  masse pr lengdeenhet ;  $dl =$  lengdeelement

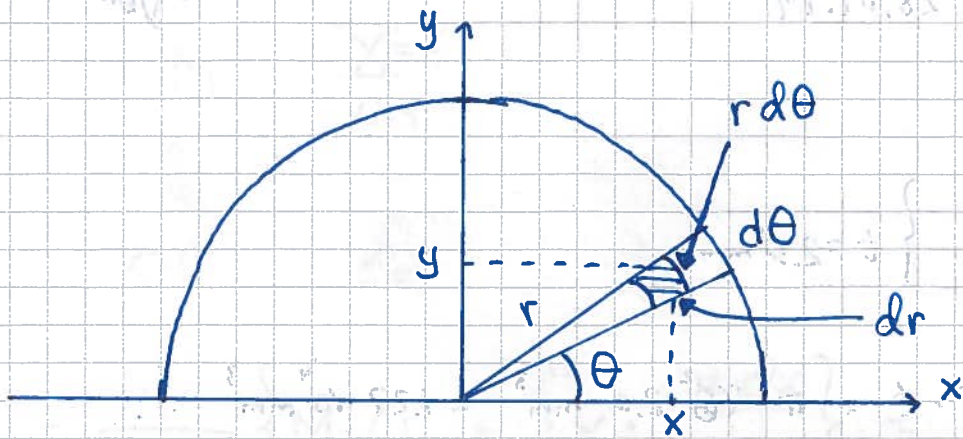
2D :  $dm = \sigma dA$  ;  $\sigma =$  —" — flakenhet ;  $dA =$  flate —" —

3D :  $dm = \rho dV$  ;  $\rho =$  —" — volumenhet ;  $dV =$  volum —" —

Med uniform massefordeling : 
$$\frac{dm}{M} = \frac{dV}{V} \quad \text{osv}$$



Eks 1:  $\vec{R}_{cm}$  for halvparten av tyynn plate, radius  $R$  (37)



$X = 0$  pga symmetri  $\Rightarrow \vec{R}_{cm} = Y \hat{y}$  med

$$Y = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{A} \int y dA, \quad \text{med } A = \pi R^2 / 2,$$

$$dA = dr \cdot r d\theta, \quad \text{og } y = r \sin \theta$$

$$\Rightarrow Y = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi r \sin \theta dr r d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta$$

$$= \underbrace{R^3/3}_{= R^3/3} \underbrace{\int_0^\pi (-\cos \theta) d\theta}_{= 1+1=2} = 1+1=2$$

$$= \underline{\underline{\frac{4R}{3\pi} \approx 0.42R}}$$

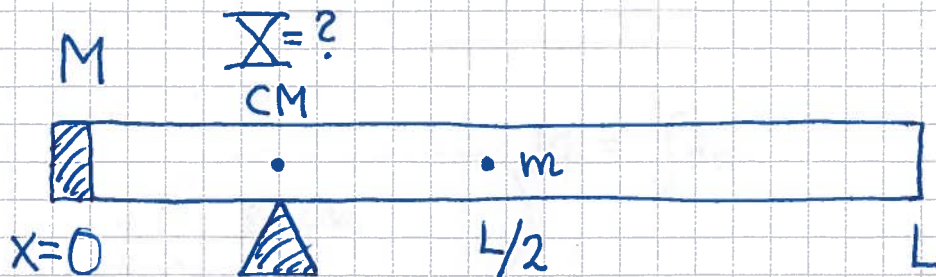
Finns selv:

Halvparten av tyynn ring:  $Y = \frac{2R}{\pi}$

————— " ————— kompakt kule:  $Y = \frac{3R}{8}$

Eks 2: Rør med <sup>(ball)</sup> lodd ( $\approx$  punktmasse) i enden

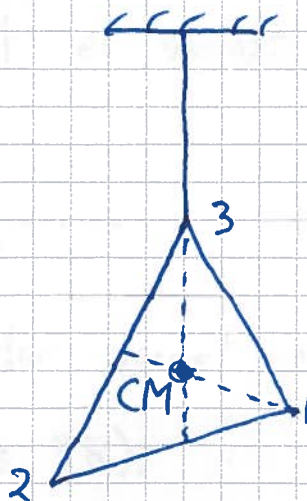
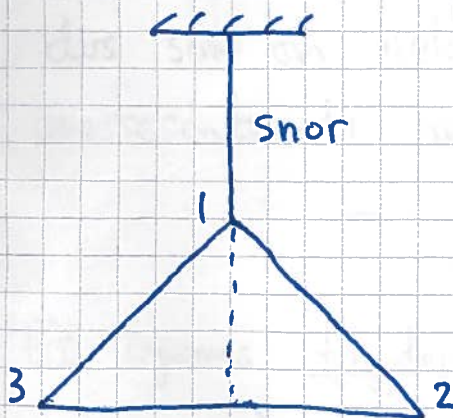
38



$$\bar{X} = \frac{1}{m+M} \left\{ M \cdot 0 + \int_0^L x \cdot \frac{m dx}{L} \right\} = \frac{mL}{2(m+M)}$$

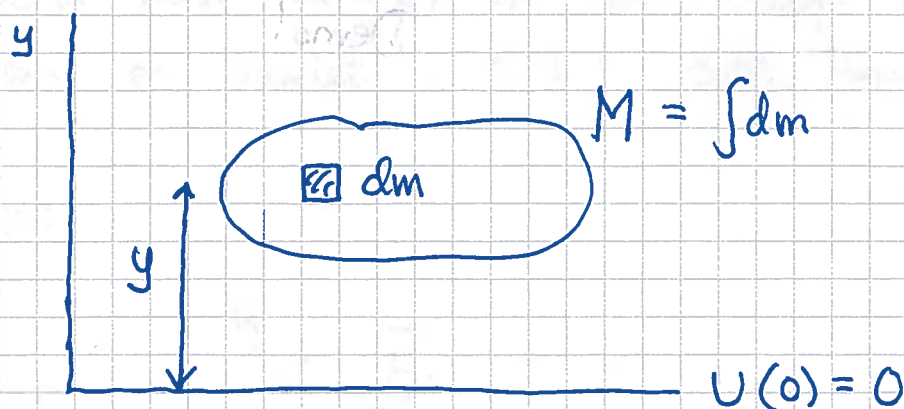
$m = 284 \text{ g}, M = 52.4 \text{ g}, L = 85 \text{ cm} \Rightarrow \bar{X} = 36 \text{ cm}$

Eks 3: Eksperimentell lokalisering av CM





## Eks 4: Potensiell energi i tyngdefeltet



$$U = \int dU = \int g y dm$$

Antar  $g = \text{konstant}$  (dvs:  $y_{\text{max}} - y_{\text{min}} \ll \text{jordradien}$ )

$$\Rightarrow U = g \cdot \int y dm = g \cdot M \cdot Y$$

dvs som om hele massen  $M$  er samlet i massesenterets høyde  $Y$

---

Et legemes tyngdepunkt er der legemet vil balansere.

(f.eks. som røret i Eks 2 s 38).

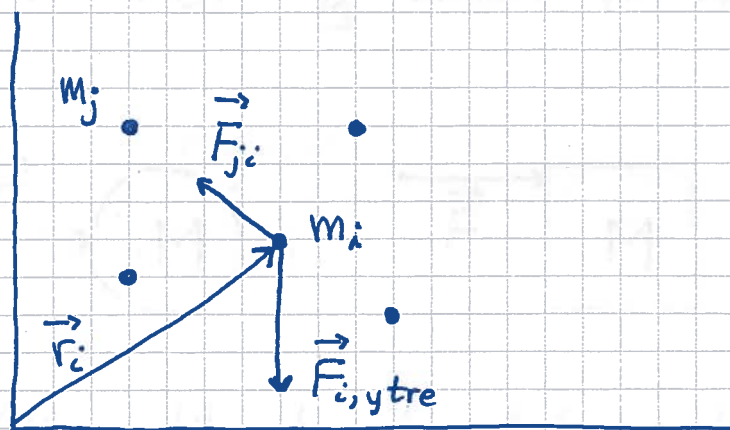
Hvis alle deler av systemet opplever samme verdi for  $g$ , vil tyngdepunktet og massesenteret være samme sted.

# Massecenterets bevegelse [YF 8.5; LL 5.8]

(40)

Plastrør-kast antyder at CM beveger seg som om hele massen er samlet i CM; dette stemmer!

Beris:



N2 for  $m_i$ :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\vec{F}_{i,ytre}}_{\text{ytre kraft p\aa } m_i} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{\text{indre kraft p\aa } m_i}$$

Ta  $\sum_i$  p\aa begge sider.

$$VS: \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \sum_i m_i \vec{r}_i \right\} = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ M \vec{R}_{cm} \right\} = M \ddot{\vec{R}}_{cm}$$

$$HS: \sum_i \vec{F}_{i,ytre} = \vec{F}_{ytre} = \text{netto ytre kraft p\aa systemet}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}_{=0} + \dots + \underbrace{\vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N}}_{=0} = 0$$



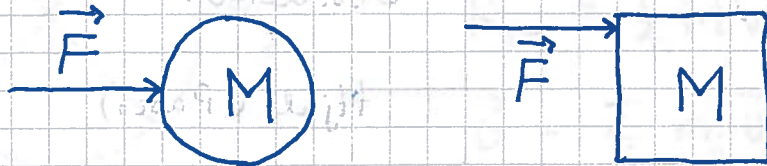
Dermed:

$$\vec{F}_{\text{ytre}} = M \ddot{\vec{R}}_{\text{CM}}$$

(41)

Bewegelsen til CM blir som om hele massen  $M$  er samlet i  $\vec{R}_{\text{CM}}$  og utsettes for netto ytre kraft  $\vec{F}_{\text{ytre}}$ .

Eks:



$\vec{A}_{\text{CM}} = \vec{F}/M$ , like stor for kula og klossen, så lenge massen  $M$  og den ytre kraften  $\vec{F}$  er like store

---

I tillegg til CMs translasjonsbevegelse har vi,

for stive legemer: rotasjon om CM,

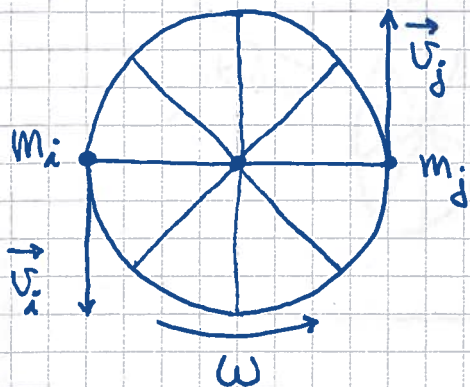
for ikke helt stive legemer: vibrasjon.

# Rotasjon [ YF 9,10 ; LL 6 (5) ]

42

Vå skal, blant annet, se nærmere på :

- Ren rotasjon (ofte om CM, men ikke alltid)



Med CM i ro er

$$K_{CM} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 = 0$$

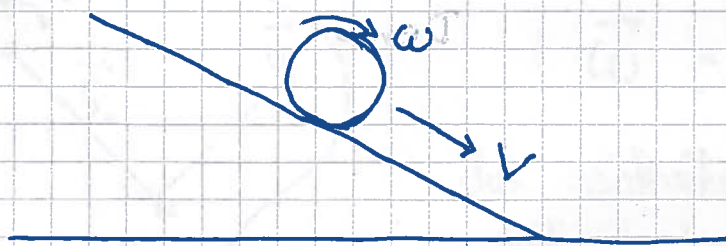
$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{u}_i = 0$$

Men vi har kinetisk rotasjonsenergi

$$K_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i u_i^2 > 0$$

og såkalt dreieimpuls  $\vec{L} \neq 0$  (Mer senere!)

- Rulling = translasjon av CM + rotasjon om CM

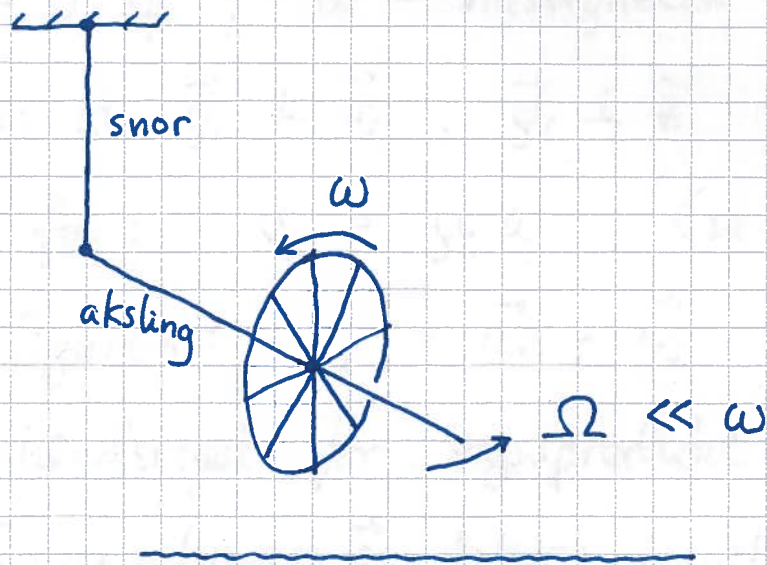


$\dot{v} > 0$  pga netto ytre kraft nedover langs skråplanet

$\dot{\omega} > 0$  pga netto ytre dreiemoment mhp CM



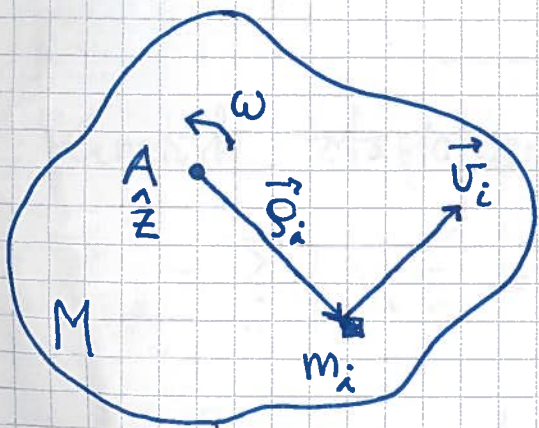
• Komplisert dynamikk



Preesjon (Gyroskop)

Rotasjonsenergi og treghetsmoment [YF 9.4; LL 6.4, 6.3]

Vi ser stort sett på stive legemer, og vi ser først på ren rotasjon om en fast akse (som ikke nødvendigvis går gjennom CM) :



Med rotasjonsaksen A langs  $\hat{z}$ , ut av planet, kan vi skrive

$$\vec{\omega} = \omega \hat{z},$$

dvs vinkelhastigheten er en vektor langs rotasjonsaksen!

Høyrehåndsregel: La 4 fingre på høyre hånd "følge" rotasjonsbevegelsen (her: mot klokka).

Da peker tommelen langs  $\vec{\omega}$ .



$$\vec{g}_i = g_i \hat{g} ; g_i = \text{avstand fra rot.aksen til } m_i$$

$$\vec{v}_i = v_i \hat{\phi} ; \vec{v}_i = \text{hastigheten til } m_i$$

Vi ser at  $\vec{g}_i \perp \vec{v}_i$ ,  $\vec{g}_i \perp \hat{z}$  og  $\vec{v}_i \perp \hat{z}$ .

$$\text{Fra før: } v_i = g_i \omega \quad (\text{se s. 6})$$

$$\text{Fra figuren: } \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{g}_i$$

Høyrehandsregel for kryssprodukt:

4 fingre langs  $\vec{a}$  bøyes i retning langs  $\vec{b}$ .

Da peker tommelen langs vektoren  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ .

Vi bruker her sylinderkoordinater  $g, \phi$  og  $z$ ,  
dvs polarkoordinater  $g$  og  $\phi$ , samt  $z$ .

[Reserverer  $\vec{r}_i$  til posisjonsvektoren fra origo til  $m_i$  ;  
derfor  $\vec{g}_i$  for vektoren fra rot.aksen til  $m_i$ ]

Kinetisk rotasjonsenergi for det stive legemet blir nå :

$$K_{\text{rot}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i g_i^2 \right\} \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

der  $I$  er legemets tregghetsmoment mhp aktuell rot.akse:

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i g_i^2$$

Med kontinuerlig massefordeling:  $m_i \rightarrow dm$ ;  $\sum_i \rightarrow \int$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int g^2 dm} \quad g = \text{avstand fra aksen til } dm$$



Den generelle bewegelsen til et stivt legeme er en translasjon av CM, med hastighet  $\vec{V}$ , samt rotasjon om en akse gjennom CM, med vinkelhastighet  $\vec{\omega}$ .

Total kinetisk energi blir ganske enkelt

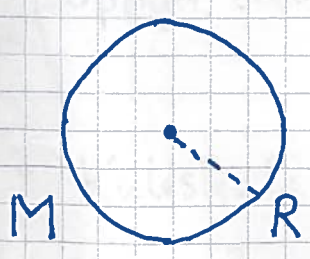
$$K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

[Se utlagt notat for bevis.]

Notasjon:  $I_0$  betyr treghetsmoment mhp akse gjennom CM.

### Treghetsmoment; eksempler [YF 9.6; LL 6.3]

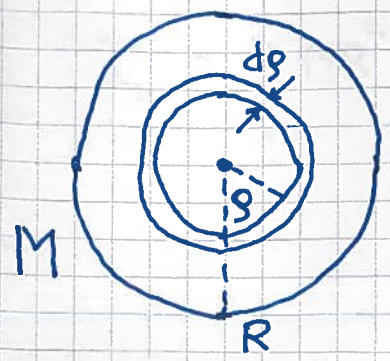
- Ring og hul sylinder



$$I_0 = \int \rho^2 dm = R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$$

[Oppgis ikke til eksamen.]

- Skive og kompakt sylinder

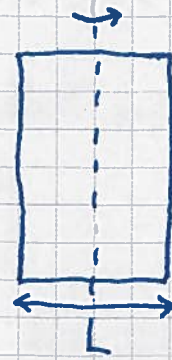
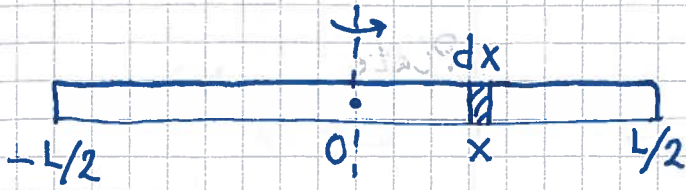


Bidrag fra tynn ring med radius  $\rho$ , tykkelse  $d\rho$ , areal  $dA = 2\pi\rho d\rho$ , masse  $dm = M \cdot dA / \pi R^2$ :

$$dI_0 = \rho^2 dm = 2M\rho^3 d\rho / R^2$$

$$\Rightarrow I_0 = \int dI_0 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho = \underline{\underline{\frac{1}{2}MR^2}} \text{ [Oppgis]}$$

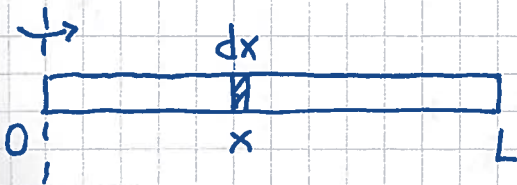
- Tynn stang og tynn plate



$$g = x, \quad dm = M \cdot dx / L$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 M dx / L = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}} \quad [\text{Oppgis}]$$

Mhp akse ved stangas/platas ende:



$$I = \int_0^L x^2 M dx / L = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}$$

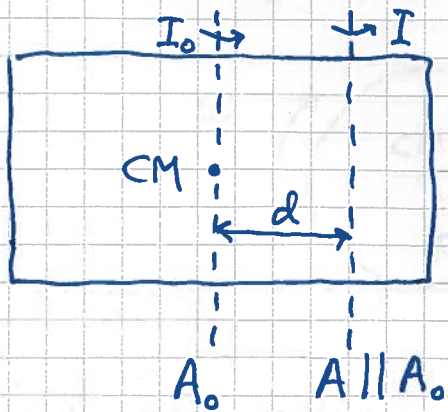
[Oppgis ikke; se Steiners sats neste side]

- Kuleskall :  $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$
  - Kompakt kule :  $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$
- } Oppgis.  
Se øving/LF for detaljer.



# Steiners sats (Parallellakse-teoremet) [YF 9.5 ; LL 6.3]

(47)

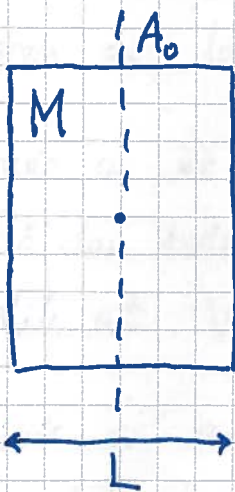


A er akse parallell med ~~A0~~ A0

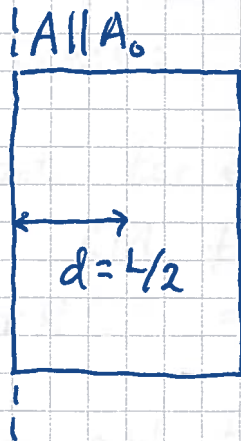
$$I = I_0 + Md^2$$

[Se notat for bevis]

Eks 1: Dør



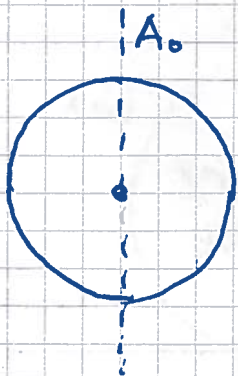
$$I_0 = \frac{1}{12} ML^2$$



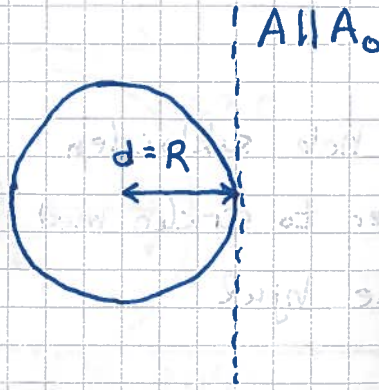
$$I = I_0 + M \cdot (L/2)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

(som s. 46)

Eks 2: Kompakt kule



$$I_0 = \frac{2}{5} MR^2$$



$$I = I_0 + MR^2 = \frac{7}{5} MR^2$$