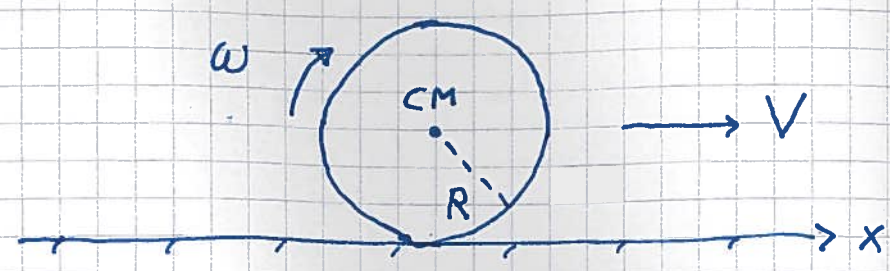


Ren rulling [YF 10.3 ; LL 6.7]



Ved ren rulling (dvs uten å gli) gjelder rullebetingelsen

$$V = \omega R$$

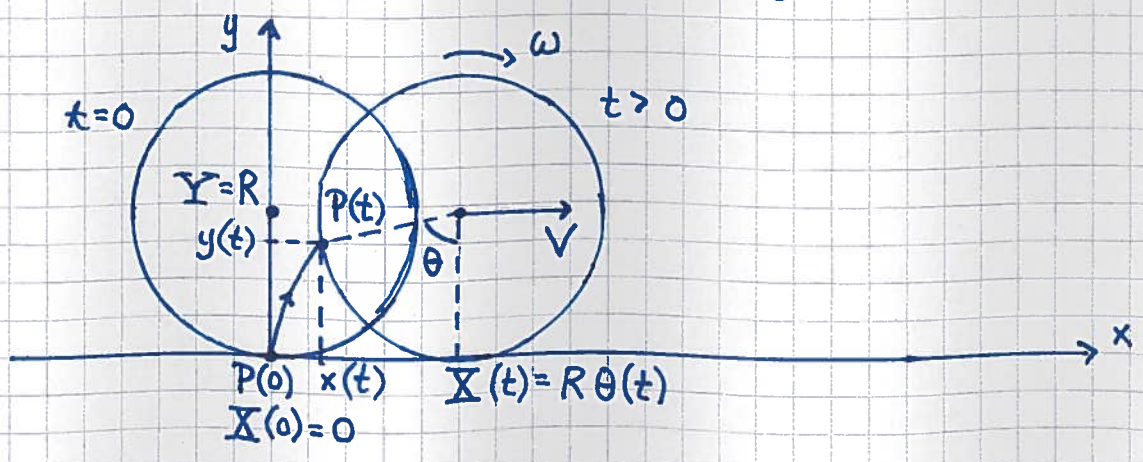
som er lett å innse:

Hvis ω er konstant, tar en omdreining tiden $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

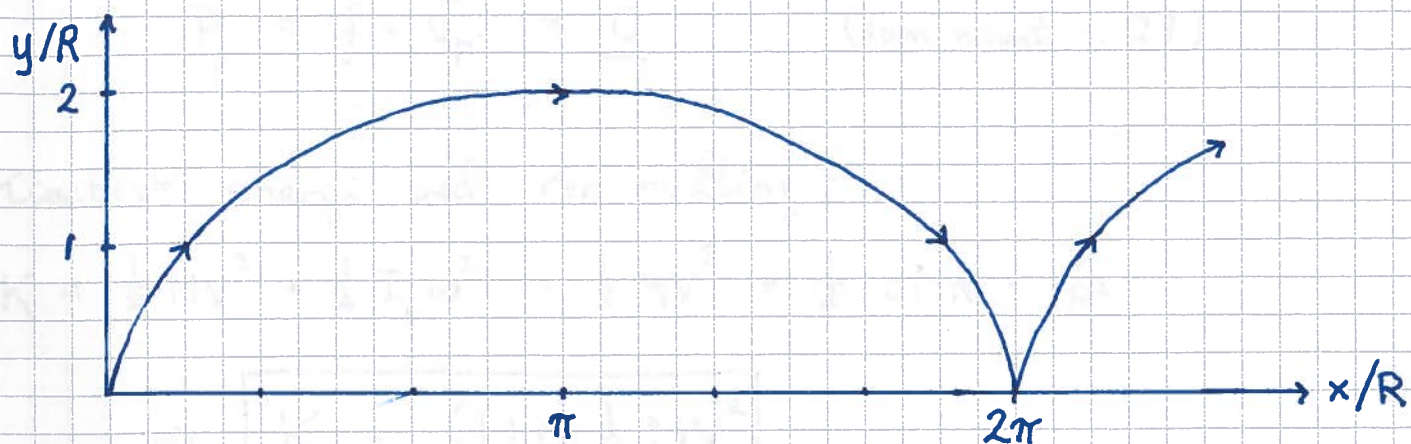
På den tiden har CM flyttet seg $2\pi R$ mot høyre, slik at $V = 2\pi R / T = \omega R$.

Hvis ω endrer seg med tiden, kan vi se på rulling en liten vinkel $d\theta = \omega dt$. Da flyttes CM en liten lengde $dx = R d\theta = R \omega dt$ mot høyre, slik at $V = dx / dt = \omega R$.

Et punkt P på periferien følger en sykloide :



Fra figuren: $x = X - R \sin \theta = R \theta - R \sin \theta$
 $y = Y - R \cos \theta = R - R \cos \theta$

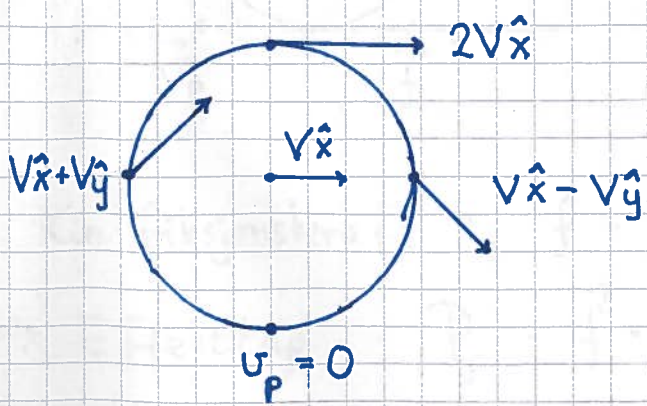


Bewegelsen til CM:

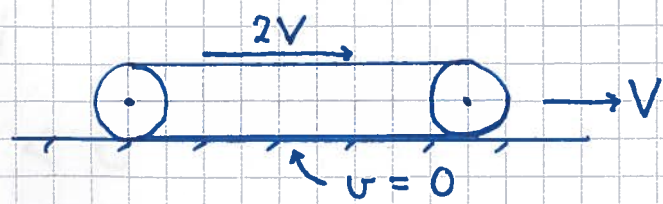
$$\begin{aligned} \vec{R}_{CM} &= X \hat{x} + Y \hat{y} = R \theta \hat{x} + R \hat{y} \\ \vec{V} &= R \dot{\theta} \hat{x} = R \omega \hat{x} \\ \vec{A} &= R \ddot{\theta} \hat{x} = R \dot{\omega} \hat{x} = R \alpha \hat{x} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \vec{R}_{CM} \\ \vec{V} \\ \vec{A} \end{aligned}} \right\} \text{Rullebetingelse(r)}$$

Bewegelsen til P:

$$\begin{aligned} \vec{U}_P &= \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} = (R \dot{\theta} - R \dot{\theta} \cos \theta) \hat{x} + R \dot{\theta} \sin \theta \hat{y} \\ &= V(1 - \cos \theta) \hat{x} + V \sin \theta \hat{y} \end{aligned}$$



Eks: Gravemaskinbelte, (samlebånd)



$V = \text{konst.}$ gir $\vec{a}_P = V \dot{\theta} \sin \theta \hat{x} + V \dot{\theta} \cos \theta \hat{y}$, dvs $|\vec{a}_P| = V \dot{\theta} = \frac{V^2}{R}$
 (OK!)

Vi ser at $v_p = 0$ når P er i kontakt med underlaget.

Da er effekttapet pga friksjon

$$P_f = \vec{f} \cdot \vec{v}_p = \underline{0} \quad (\text{som nevnt s. 27})$$

Kinetisk energi ved ren rulling:

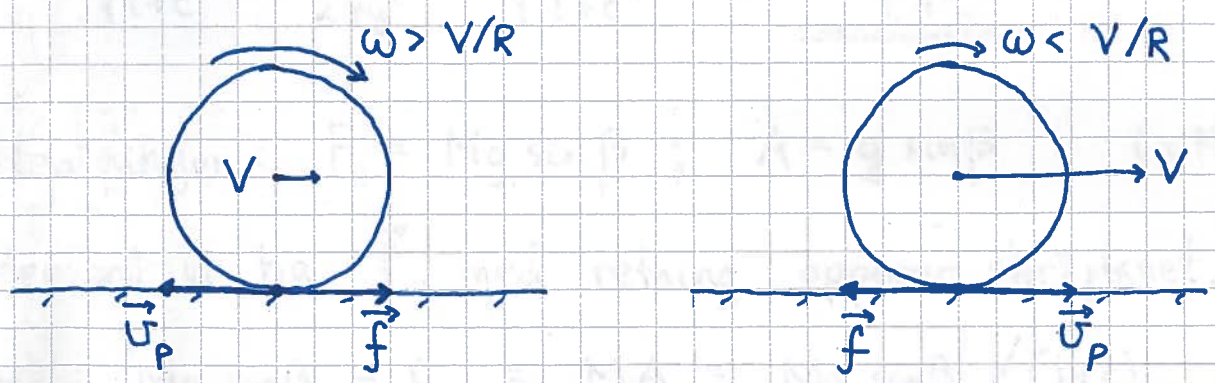
$$K = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I_o \omega^2 = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} \cdot cMR^2 \cdot \frac{V^2}{R^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{K = (1+c) \frac{1}{2} MV^2}$$

(Ring: $c=1$. Kuleskall: $c = \frac{2}{3}$. Kompakt skive: $c = \frac{1}{2}$.
Kompakt kule: $c = \frac{2}{5}$.)

Sluring [LL 6.7]

$\omega \neq v/R \Rightarrow v_p = v - \omega R \neq 0 \Rightarrow$ Objektet glir:

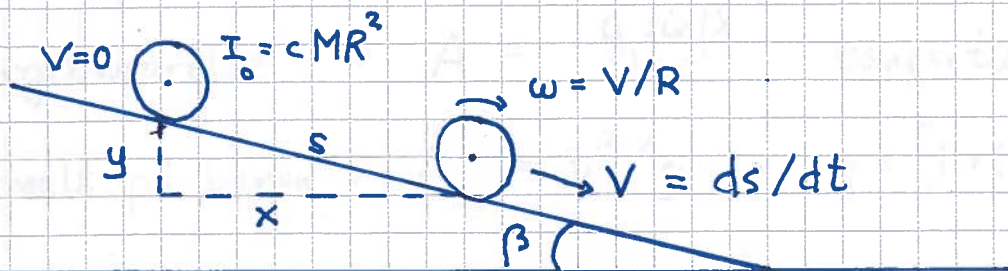


Kin. friksjonskraft: $f = \mu_k N$

$$\Rightarrow \text{Effekttap: } P_f = \vec{f} \cdot \vec{v}_p < 0$$

Dvs: Vi taper mekanisk energi pr tidsenhet
lik $|P_f|$.

Ren rulling på skråplan [YF 10.3; LL 6.8]



Finn V , A , f og minste μ_s / største β som gir ren rulling.

Energibevarelse: $Mgy = (1+c) \frac{1}{2} MV^2$

$$\Rightarrow \underline{\underline{V = \sqrt{\frac{2gy}{1+c}}}}$$

$$\Rightarrow V(\text{kule}) > V(\text{skive}) > V(\text{kuleskall}) > V(\text{hul sylinder})$$

$$A = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{1+c}} \cdot \frac{1}{2} y^{-1/2} \cdot \sin\beta \cdot V$$
$$= \sqrt{\frac{2g}{1+c}} \cdot \frac{\sin\beta}{2\sqrt{y}} \cdot \sqrt{\frac{2gy}{1+c}} = \underline{\underline{\frac{g \sin\beta}{1+c}}}$$

Uten friksjon: $F_{||} = Mg \sin\beta$; $A = g \sin\beta$ (s. 17)

Her må vi ha \vec{f} , med retning oppover skråplanet.

$$N2: Mg \sin\beta - f = MA = Mg \sin\beta / (1+c)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f = \frac{c}{1+c} Mg \sin\beta}}$$

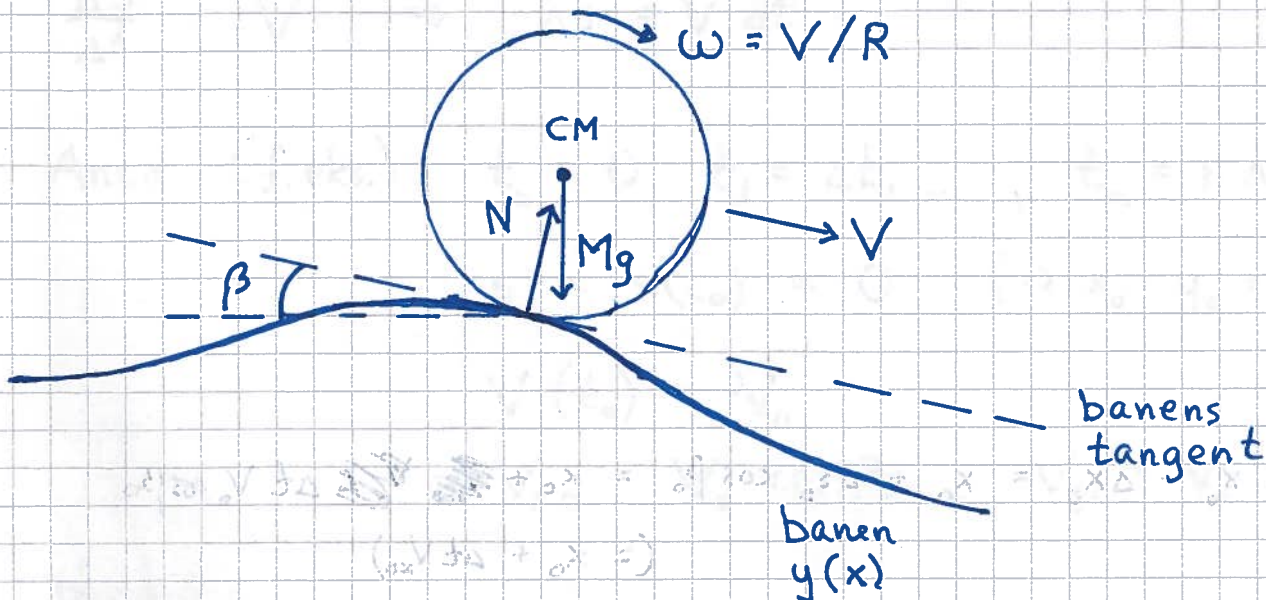
Men $f_{\max} = \mu_s N = \mu_s Mg \cos\beta$. Ren rulling kan hvis $f \leq f_{\max}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mu_s \geq \frac{c}{1+c} \tan\beta}} \quad \text{ert.} \quad \underline{\underline{\beta \leq \arctan\left\{\frac{\mu_s (1+c)}{c}\right\}}}$$

Ren rulling på krum bane (Lab!)

Energibevarelse $\Rightarrow A = \frac{g \sin \beta}{1+c}$ tangentielt til banen

Normalt på banen: $A_{\perp} = v^2/g$; $g = [1+(y')^2]^{3/2} / |y''|$



$N \perp$ banen: $MA_{\perp} = \begin{cases} Mg \cos \beta - N; & \text{krumning ned} \\ N - Mg \cos \beta; & \text{krumning opp} \end{cases}$

Merk at $\tan \beta = dy/dx = y'$, dvs $\beta = \arctan(y')$.

Dermed kan N beregnes når V og y' er kjent.

Eksperimentene gir målt bevegelse $x(t)$ og $y(t)$, og dermed $y(x)$ (for objektets CM).

Målt $x(t)$ og $y(t)$ kan sammenlignes med en beregnet $x(t)$ og $y(t)$, som tar utgangspunkt

i $A = \frac{dv}{dt} = \frac{g \sin \beta}{1+c}$ med kjent $\beta = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)$

Må gjøres numerisk, f.eks. med Euler-metoden. (53)

"Skisse" :

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{g \sin \beta}{1+c} \Rightarrow \Delta V = \frac{g \sin \beta}{1+c} \Delta t = A \Delta t$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = V \Rightarrow \Delta s = V \Delta t$$

Anta (f.eks.) $t_0 = 0, t_1 = \Delta t, \dots, t_n = n \Delta t$

$$s_0 = s(t_0) = 0 \quad (\Rightarrow x_0 = y_0 = 0)$$

$$V(t_0) = V_0$$

$$\Rightarrow V_{x_0} = V_0 \cos \beta_0, \quad V_{y_0} = V_0 \sin \beta_0$$

Dermed :

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0 = x_0 + \Delta s_0 \cos \beta_0 = x_0 + \Delta t V_0 \cos \beta_0$$

$$y_1 = y(x_1) \quad (\text{fra banens kjente form})$$

$$V_1 = V_0 + \Delta V_0 = V_0 + \frac{g \sin \beta_0}{1+c} \Delta t$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x_1 = x_1 + \Delta t V_1 \cos \beta_1$$

$$y_2 = y(x_2)$$

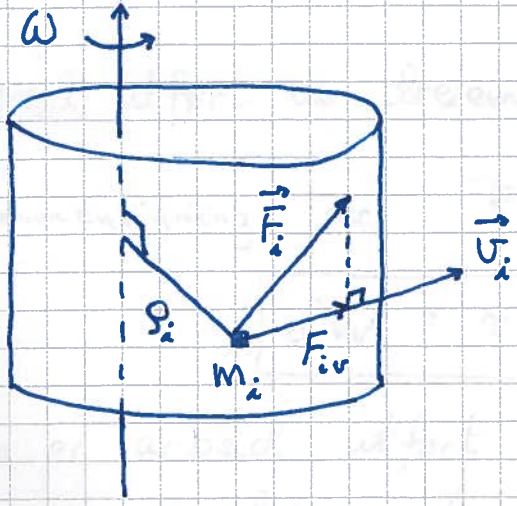
$$V_2 = V_1 + \frac{g \sin \beta_1}{1+c} \Delta t$$

OSU OSU

Rotasjon og krefter : Rotasjonsdynamikk

Akse med fast orientering [YF 10.1, 10.2 ; LL 6.2]

Dvs rotasjon om fast akse (ren rotasjon) eller rotasjonsdelen av total bevegelse ved f.eks. rulling.



$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$$

$$v_i = \rho_i \omega$$

F_{iv} = komponent langs \vec{v}_i av ytre kraft \vec{F}_i på masse-element m_i

(Ved "pen rulling" er $\vec{F}_i \parallel \vec{v}_i$)

Ytre kraft \Rightarrow Legemet tilføres effekten

$$P = \sum_i P_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i F_{iv} v_i = \left\{ \sum_i F_{iv} \rho_i \right\} \omega = \tau \omega$$

der $\tau = \sum_i F_{iv} \rho_i =$ netto ytre dreiemoment på legemet, mhp rotasjonsaksen ("kraft ganget med arm")

Da øker legemets kinetiske energi (se s 24):

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right\} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} I \frac{d}{dt} \omega^2 = \frac{1}{2} I \cdot 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dt} = I \omega \frac{d\omega}{dt}$$

der $I = \sum_i m_i \rho_i^2 =$ legemets treghetsmoment mhp rotasjonsaksen

Sammenligning av de to uttrykkene for P gir nå

55

$$\tau = I \frac{d\omega}{dt}$$

som er Newtons 2. lov for rotasjon om akse med fast orientering.

Jf. N2 for translasjon: $F = m \frac{dv}{dt}$

Arbeid utført av dreiemomentet [YF 10.4; LL 6.4]

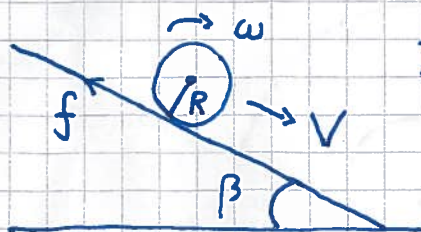
Sammenligning av $P = \tau \omega = \tau \frac{d\varphi}{dt}$ og $P = \frac{dW}{dt}$ gir

$$dW = \tau d\varphi$$

som er arbeid utført av dreiemomentet τ ved en vinkelendring (omløpt vinkel) $d\varphi$

Jf. arbeid utført ved translasjon: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Eks 1: Ren rulling på skråplan



$$I_0 = cMR^2; \quad \omega = v/R; \quad \dot{\omega} = \dot{v}/R$$

$$N2, \parallel: Mg \sin \beta - f = M\dot{v}$$

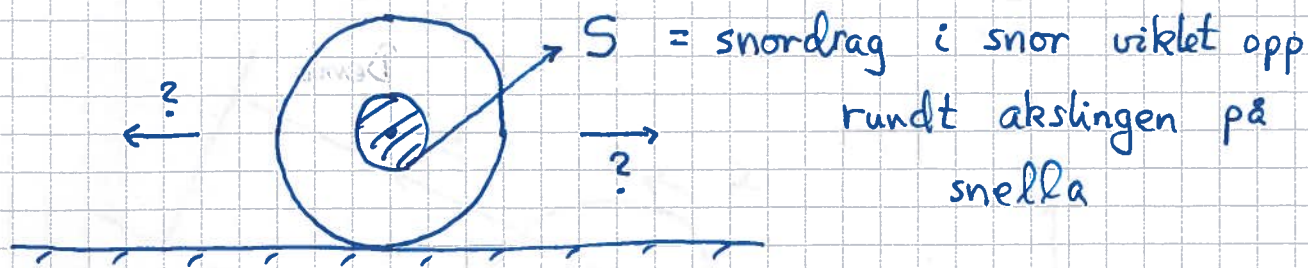
N2, rot. om akse gjennom CM: $\tau = I_0 \dot{\omega}$, med $\tau = f \cdot R$.
(Både \vec{N} og $M\vec{g}$ har null arm relativt akse gjennom CM.)

$$\Rightarrow fR = cMR^2 \dot{v}/R \Rightarrow f = cM\dot{v} \Rightarrow Mg \sin \beta - cM\dot{v} = M\dot{v}$$

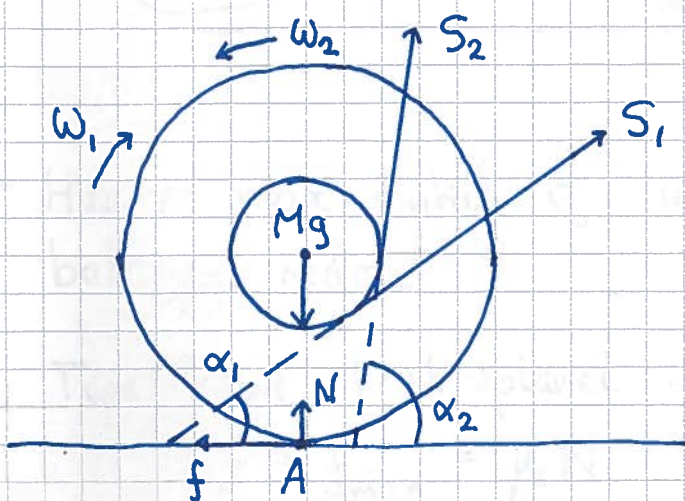
$$\Rightarrow \underline{\underline{\dot{v} = \frac{g \sin \beta}{1+c}}}, \text{ som på s. 51}$$

Eks 2: Ruller snella mot høyre eller venstre?

(56)



Lurt valg er kontaktpunktet mellom snelle og underlag som referanseakse A:

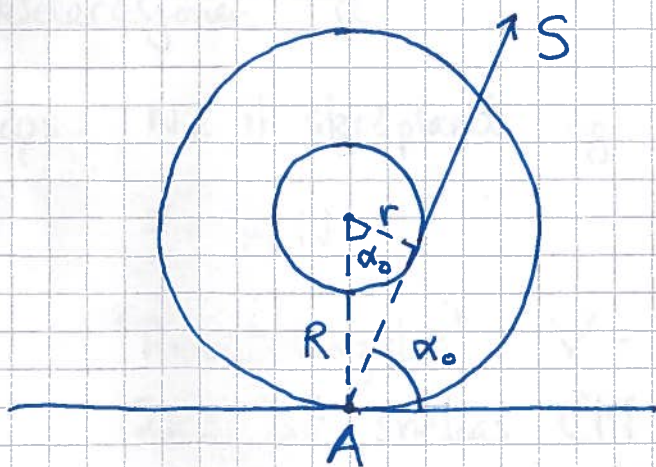


Kun S har arm, og dermed dreiemoment, mhp aksen A.

S_1 : liten $\alpha_1 \Rightarrow$ mot høyre

S_2 : stor $\alpha_2 \Rightarrow$ mot venstre

Hvis også \vec{S} går gjennom A (og vi har nok friksjon), blir snella liggende i ro:



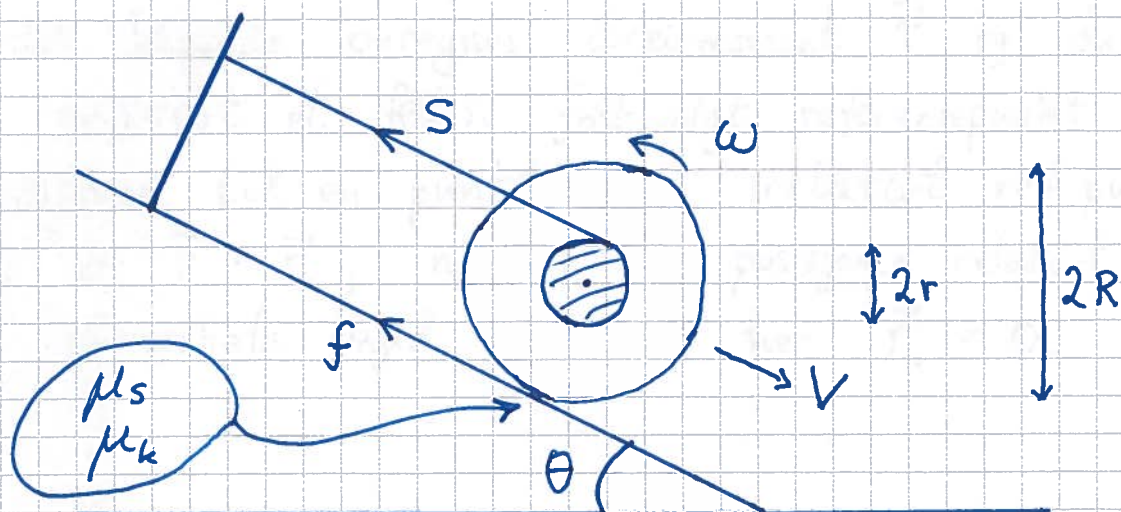
$$\sum \tau_A = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\omega} = 0$$

\Rightarrow ingen rotasjon

Ser fra figuren: $\cos \alpha_0 = \frac{r}{R}$

Eks: Snelle baklengs nedover skråplan (Øving 6)



- Hva er max vinkel θ_0 uten at snella slurer baklengs nedover?

Tips: $N1 \parallel$ skråplanet og $N1$ rot. om CM.
 $f = f_{\max} = \mu_s N$ når $\theta = \theta_0$.

- Med $\theta > \theta_0$, hva blir snordraget S og akselerasjonen a ?

Tips: $N2 \parallel$ skråplanet og $N2$ rot. om CM.

$$f = \mu_k N$$

"Rullebetingelse" $v = \omega r$ (fordi en translasjon $2\pi r$ av snellas CM tar samme tid som én hel omdreining, som er en omløpt vinkel 2π).

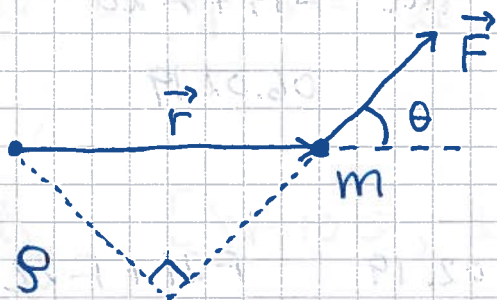
Tredimensjonal rotasjonsdynamikk

I det følgende beregnes dreiemoment $\vec{\tau}$ og dreieimpuls \vec{L} relativt et felles, fritt valgt referansepunkt \vec{r}_0 .

Posisjonen til en punktmasse, relativt ref.punktet, blir da $\vec{r} - \vec{r}_0$, når \vec{r} er posisjonen relativt origo.

For lettvinthets skyld velger vi her $\vec{r}_0 = 0$.

Dreiemoment [YF 10.1 ; LL 5.5, 6.4]



Kraftens dreiemoment på m :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{\tau} \perp \vec{r}$ og \vec{F} (Her: Ut av planet ; H.H.regel !)

$$\tau = |\vec{\tau}| = r \cdot F \cdot \sin \theta = g \cdot F$$

g = kraftens arm = avstanden fra ref.punktet til kraftens forlengelseslinje (som s. 54).

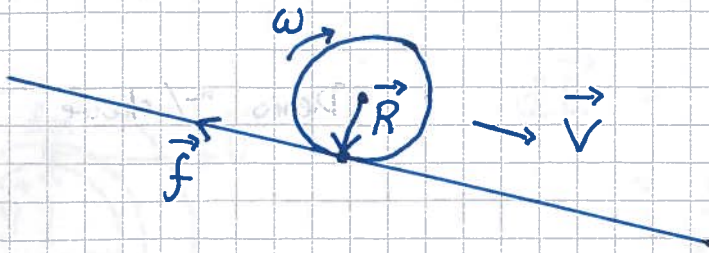
Generalisering til partikkelsystem :



$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \int d\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{F} \\ &= \text{netto dreiemoment p\aa systemet} \end{aligned}$$

Eks: Rulling på skrålplan (jf s. 55)

59



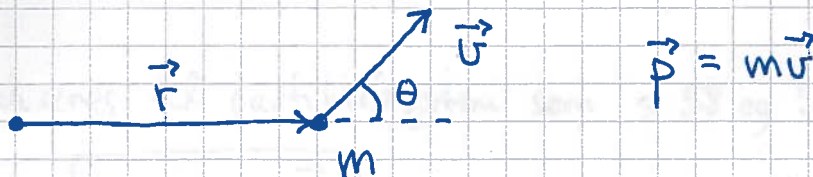
Med CM som ref.punkt: ($\vec{\tau}_N = \vec{\tau}_g = 0$)

$\vec{\tau} = \vec{\tau}_f = \vec{R} \times \vec{f} =$ vektor inn i planet,

med abs.verdi $\tau = R \cdot f$ (da $\vec{R} \perp \vec{f}$)

Her er også $\vec{\omega}$ og $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ vektorer inn i planet.

Dreieimpuls [YF 10.5; LL 6.6]

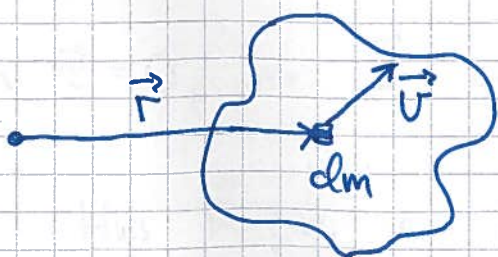


Massens dreieimpuls:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$\vec{L} \perp \vec{r}$ og \vec{p} ; $L = |\vec{L}| = r \cdot p \cdot \sin \theta$

Generalisering til partikkelsystem:



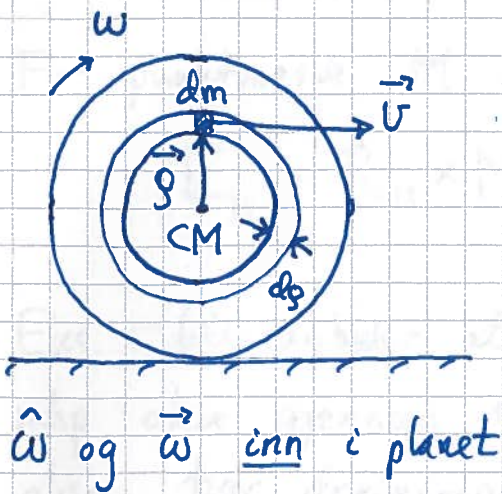
$$d\vec{p} = dm \cdot \vec{v}; \quad d\vec{L} = \vec{r} \times d\vec{p}$$

$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times d\vec{p} =$$

systemets totale dreieimpuls

Eks: Rullende kompakt skive, \vec{L} mhp CM.

(60)



$$\begin{aligned}d\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{v} dm \\&= \rho \cdot \omega \rho \cdot dm \cdot \hat{\omega} \\&= (\rho^2 dm) \cdot \vec{\omega} = dI_0 \cdot \vec{\omega} \\ \Rightarrow \vec{L} &= \int d\vec{L} = \left(\int \rho^2 dm \right) \vec{\omega} = \underline{\underline{I_0 \vec{\omega}}} \\ &\text{(med } I_0 = \frac{1}{2} MR^2 \text{)}\end{aligned}$$

N2 for rotasjon ("spinnsetsen") [YF 10.5; LL 6.6]

$$\underline{\underline{\frac{d\vec{L}}{dt}}} = \frac{d}{dt} \{ \vec{r} \times \vec{p} \} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 + \vec{r} \times \vec{F} = \underline{\underline{\vec{\tau}}}$$

(generaliseres til partikkelsystem som s 58 og 59 for $\vec{\tau}$ og \vec{L})

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

$\vec{\tau}$ = netto ytre dreiemoment på systemet
 \vec{L} = systemets totale dreieimpuls

Jf. $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$; N2 for translasjon

Hvis $\vec{\tau} = 0$, er \vec{L} bevart.

Jf: Hvis $\vec{F} = 0$, er \vec{p} bevart.

Total dreieimpuls \vec{L} for stirt legeme [YF 10.5; LL 6.6]

For punktmasse M med hastighet \vec{V} i posisjon \vec{R}_{CM} :

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} \quad (\text{ref. punkt i origo})$$

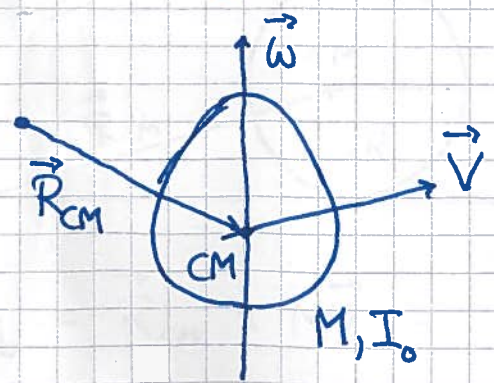
Eks. s. 60 antyder at stirt legeme med treghetsmoment I_0 mhp akse gjennom CM og vinkelhastighet $\vec{\omega}$ langs samme akse, har dreieimpuls

$$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega} \quad \text{mhp CM}$$

Kan vises (se utlagt notat) at stirt legeme, med en "viss symmetri" (*) mhp rotasjonsaksen gjennom CM, har total dreieimpuls

$$\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} + I_0 \vec{\omega}$$

[(*) Refleksjonssymmetri, dvs symmetrisk / uendret når $\vec{g} \rightarrow -\vec{g}$]

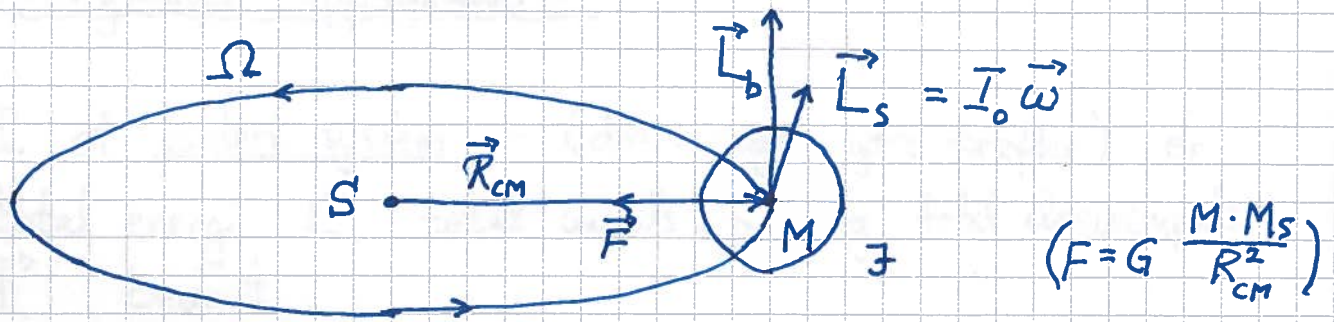


Banedreieimpuls pga CMs bevegelse : $\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}$

Indre dreieimpuls ("spinn") pga rotasjon om CM : $\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega}$

Eks 1: \vec{L} for jorda med sola som ref. punkt

(62)



$$\vec{\tau} = \vec{R}_{cm} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \text{konstant}$$

$$L_b = R_{cm} M V = R_{cm}^2 M \Omega \approx (1.5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot \frac{2\pi}{1 \text{ år}}$$

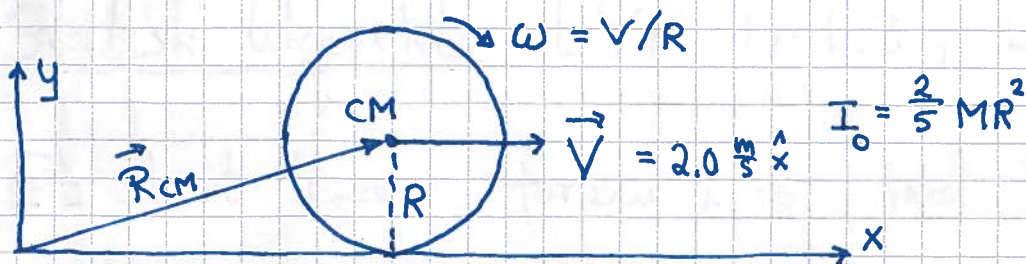
$$\approx 3 \cdot 10^{40} \text{ Js}$$

$$L_s = I_0 \omega \approx \frac{1}{3} M R^2 \omega \approx \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (6.37 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \cdot \frac{2\pi}{1 \text{ døgn}}$$

$$\approx 6 \cdot 10^{33} \text{ Js} \ll L_b$$

$$\Rightarrow L \approx L_b \approx 3 \cdot 10^{40} \text{ Js}$$

Eks 2: Rent rullende snookerkule, \vec{L} mhp origo



$$R = 26.25 \text{ mm}$$

$$M = 130 \text{ g}$$

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{cm} \times M \vec{V} = - R M V \hat{z}$$

$$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega} = - \frac{2}{5} R M V \hat{z}$$

$$\vec{L} = - \frac{7}{5} R M V \hat{z} ; L = 1.4 \cdot 26.25 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 0.130 \text{ kg} \cdot 2.0 \text{ m/s}$$

$$\approx 9.6 \cdot 10^{-3} \text{ Js}$$

(Mhp CM: $\vec{L} = \vec{L}_s$)

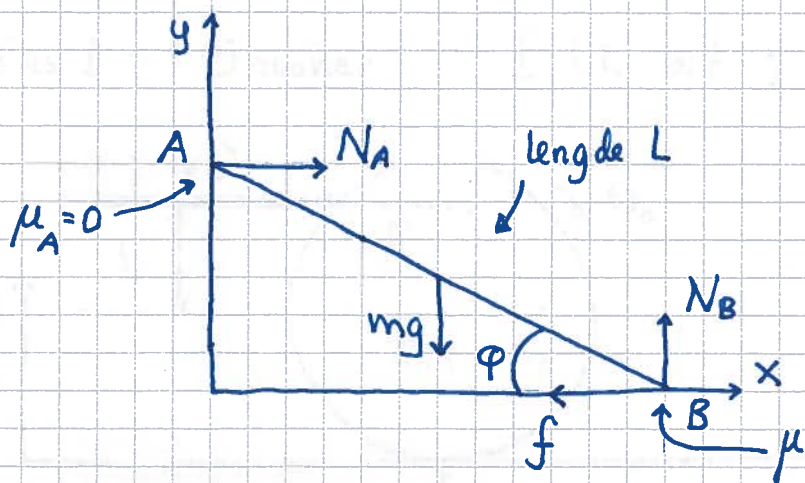
Bevaringslover oppsummert

- I et isolert system (dvs: ingen ytre krefter) er total energi E , total impuls \vec{p} og total dreieimpuls \vec{L} bevart.
- I et konservativt system er total mekanisk energi, $K + U$, bevart.
- Hvis netto ytre kraft \vec{F} på et system er null, er total impuls \vec{p} bevart.
- Hvis netto ytre dreiemoment $\vec{\tau}$ på et system er null, er total dreieimpuls \vec{L} bevart.

Statisk likevekt [YF 11.1-11.3 ; LL 7.1]

Et stivt legeme forblir i r_0 , med $\vec{p}=0$ og $\vec{L}=0$, bare dersom netto ytre kraft \vec{F} og netto ytre dreiemoment $\vec{\tau}$ begge er lik null.

Eks: Stige



Funne minste vinkel φ som gjør at stigen ikke glir.

Statisk likevekt for stigen gir 3 ligninger,

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum \tau = 0$$

som er nok til å fastlegge de 3 ukjente kreftene

$$N_A, N_B \text{ og } f$$

Maksimal $f = \mu N_B$ tilsvarer minimumsvinkelen φ .

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow f = N_A \quad ; \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow N_B = mg$$

Med B som ref.punkt:

$$\sum \tau_B = 0 \Rightarrow mg \frac{L}{2} \cos \varphi - N_A \frac{L}{2} \sin \varphi = 0$$

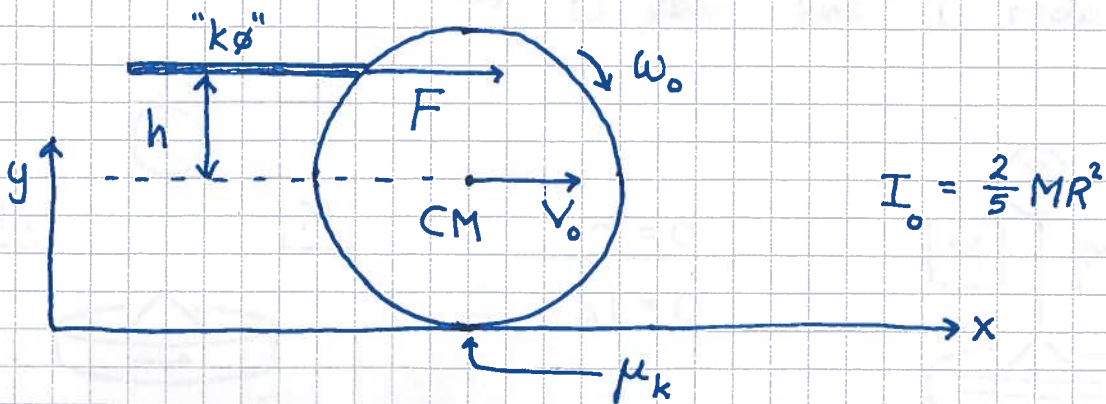
$$\Rightarrow \frac{1}{2} mg \cos \varphi = f \sin \varphi = \mu N_B \sin \varphi = \mu mg \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \tan \varphi = \frac{1}{2\mu}$$

[Hvis $\mu_A > 0$, har vi 4 ukjente krefter og bare 3 ligninger. Systemet er "statisk ubestemt". Trenger 1 ligning til! Oppnås f.eks. ved å ta hensyn til at stigen bøyes litt ned på midten.]

Rotasjonsdynamikk, eksempler

Eks 1: Snooker [LL 6.7 ; Øving 6]



Kortvarig støt med køen, i høyde h over (ert under, $h < 0$) senterlinja. Kraft F , varighet Δt .

Anta $F \gg f$ i selve støtet ; f = friksjonskraften fra underlaget på kula.

N2, trans: $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow F \Delta t = M V_0$

N2, rot. om CM: $\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow F h \Delta t = I_0 \omega_0$

\Rightarrow Toppspinn hvis $\omega_0 > V_0 / R$

Underskru hvis $\omega_0 < V_0 / R$

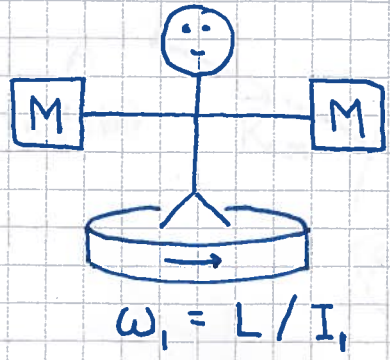
Ren rulling umiddelbart for bestemt verdi av h .

Uansett ren rulling etter hvert, pga kinetisk friksjon når kula "slurer".

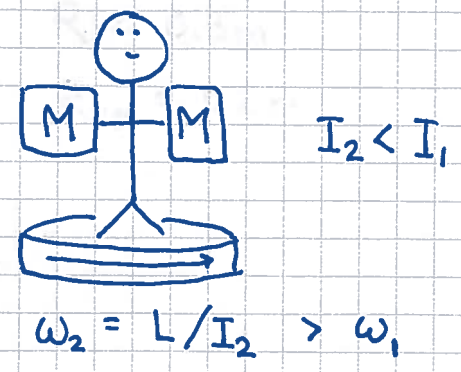
(Se også Eks 2, s. 62.)

Eks 2: Piruett [YF 10.6 ; LL 6.5]

Prinsipp: $\tau = 0 \Rightarrow L = I\omega = \text{konstant}$
 $\Rightarrow \omega$ øker hvis I reduseres



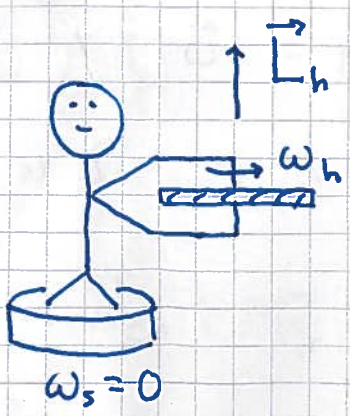
$\tau = 0$
 $\Delta L = 0$



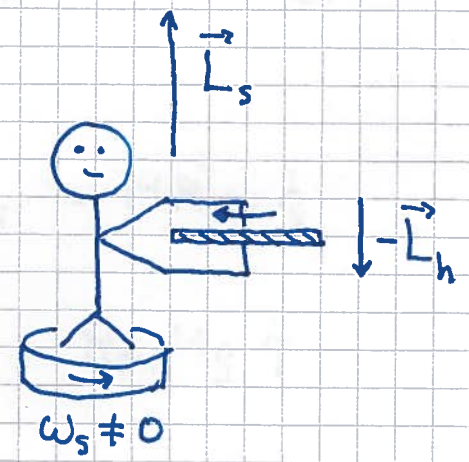
Men muskelarbeid på de to massene M gir økt rotasjonsenergi:

$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} L \omega_1$
 $K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} L \omega_2 = K_1 \cdot \omega_2 / \omega_1 > K_1$

Eks 3: Student med sykkelhjul



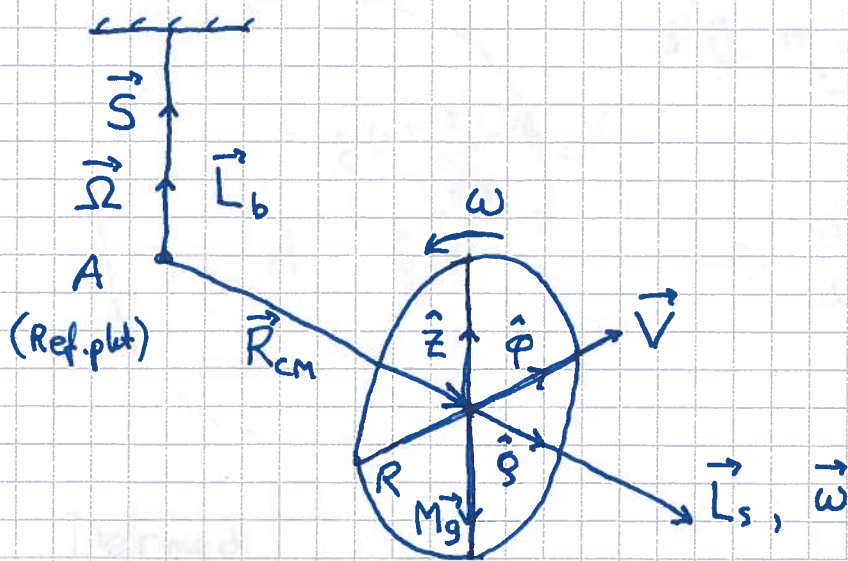
Snu hjulet
 $\tau_{\text{ytre}} = 0$
 $\Delta \vec{L} = 0$



Før: $\vec{L} = \vec{L}_h$

Etter: $\vec{L} = \vec{L}_s - \vec{L}_h$
 $\vec{L}_s = 2\vec{L}_h$
 $\omega_s \neq 0$

Eks 4: Preesjon [YF 10.7; LL 6.10]



$$I_0 \approx MR^2$$

$$M \approx 5 \text{ kg}$$

$$R \approx 0.3 \text{ m}$$

$$R_{cm} \approx 0.2 \text{ m}$$

Exp. gir $T_\Omega = 2\pi/\Omega \approx 5 \text{ s}$

Finn sammenheng mellom ω og Ω

Løsning: Bruker N2 for rot. om A

$$\vec{\tau}_A = d\vec{L}_A / dt ; \quad \vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s$$

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{cm} \times M\vec{V} = R_{cm} \hat{g} \times MV \hat{\phi} = R_{cm} MV \hat{z} = R_{cm}^2 M \Omega \hat{z}$$

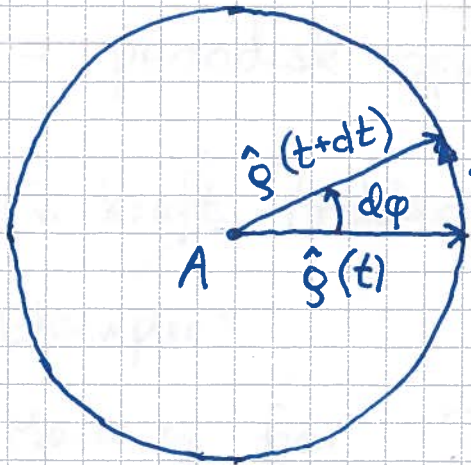
$$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega} = MR^2 \omega \hat{g}$$

$$\omega \gg \Omega \Rightarrow L_s \gg L_b \Rightarrow \vec{L}_A \approx \vec{L}_s = MR^2 \omega \hat{g}$$

$$\vec{\tau}_A = \vec{R}_{cm} \times M\vec{g} = R_{cm} \hat{g} \times (-Mg \hat{z}) = R_{cm} Mg \hat{\phi}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = MR^2 \omega \frac{d\hat{g}}{dt}$$

Sett ned langs z-aksen:



$$d\hat{g} = \underbrace{|\hat{g}|}_{=1} \cdot d\varphi \cdot \hat{\varphi} = d\varphi \hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{g}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \hat{\varphi} = \Omega \hat{\varphi}$$

Dermed:

$$R_{cm} Mg \hat{\varphi} = MR^2 \omega \Omega \hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{R_{cm} g}{R^2 \Omega} \Rightarrow T_{\omega} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{(2\pi R)^2}{R_{cm} g T_{\Omega}} ; T_{\Omega} = \frac{2\pi}{\Omega}$$

Tallverdier:

$$T_{\omega} \approx \frac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10 \cdot 5} \approx \frac{2^2}{10} = \underline{0.4s}$$

$$\Rightarrow f_{\omega} = \frac{1}{T_{\omega}} \approx 2.5 \text{ omdreinger pr sekund}$$

Swingninger [YF 14; LL 9]

(69)

= periodisk oppførsel omkring en likevekt

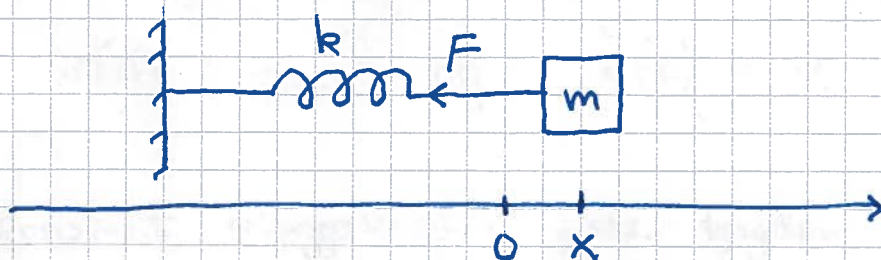
En kraft trekker systemet tilbake mot likevekt

Eksempler:

Masse og fjær. Pendler. Gitarstreng.

Atomer i molekyler og faste stoffer. Etc.

Harmonisk oscilator [YF 14.2; LL 9.1-9.3]



Likevekt, $F=0$, når m er i posisjon $x=0$

$x = \text{pos. til } m = \text{fjæras forlengelse } (x > 0)$
ert. forkortelse $(x < 0)$

$F(x) = \text{kraft på } m \text{ fra fjæra; drar } (x > 0)$
ert. skyver $(x < 0)$ m mot likevekt

Ideell fjær oppfyller Hookes lov:

$$F = -kx$$

$k = \text{fjærkonstanten}$
 $[k] = \text{N/m}$

$$N2 \Rightarrow -kx = m\ddot{x}$$

som med $\omega_0^2 = k/m$ blir på formen

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

som er bevegelsesligningen for en harmonisk oscillator i 1D.

Generell løsning:

$$x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t$$

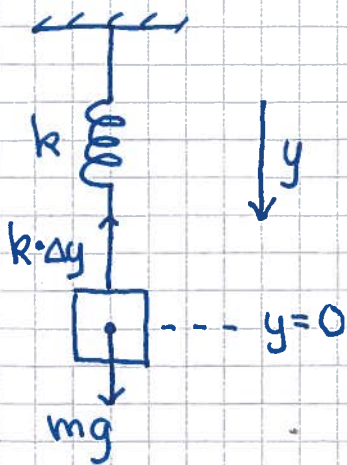
evt.

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Konstantene B, C evt A, φ fastlegges med to initialbetingelser, f.eks. ved at vi kjenner

$$x(0) = x_0 \quad \text{og} \quad \dot{x}(0) = v_0$$

En konstant tilleggskraft, f.eks. tyngden mg, endrer likevektsposisjonen men ikke bevegelsesligningen:



Fjæras forlengelse Δy når m er i likevekt er gitt ved N1:

$$k \cdot \Delta y = mg \Rightarrow \Delta y = mg/k$$

Anta m i pos. $y=0$ i "strukket likevekt"

$$N2 \text{ med } m \text{ i pos. } y : m\ddot{y} = mg - k(\Delta y + y) = -ky$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad \text{med} \quad \omega_0^2 = k/m$$

\Rightarrow Harmonisk svingning omkring strukket likevekt