Harmoniske svingninger har mye til felles med sirkelbevegelse:

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ = utsving fra likevekt

$A$ = amplitude = maks. utsving ; $[A] = [x]$

$\omega_0$ = vinkelfrekvens = faseendring pr tidsenhet ; $[\omega_0] = s^{-1}$

$T = 2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr hele svingning ; $[T] = s$

$f = 1/T$ = frekvens = antall svingn. pr tidsenhet; $[f] = Hz = s^{-1}$

$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

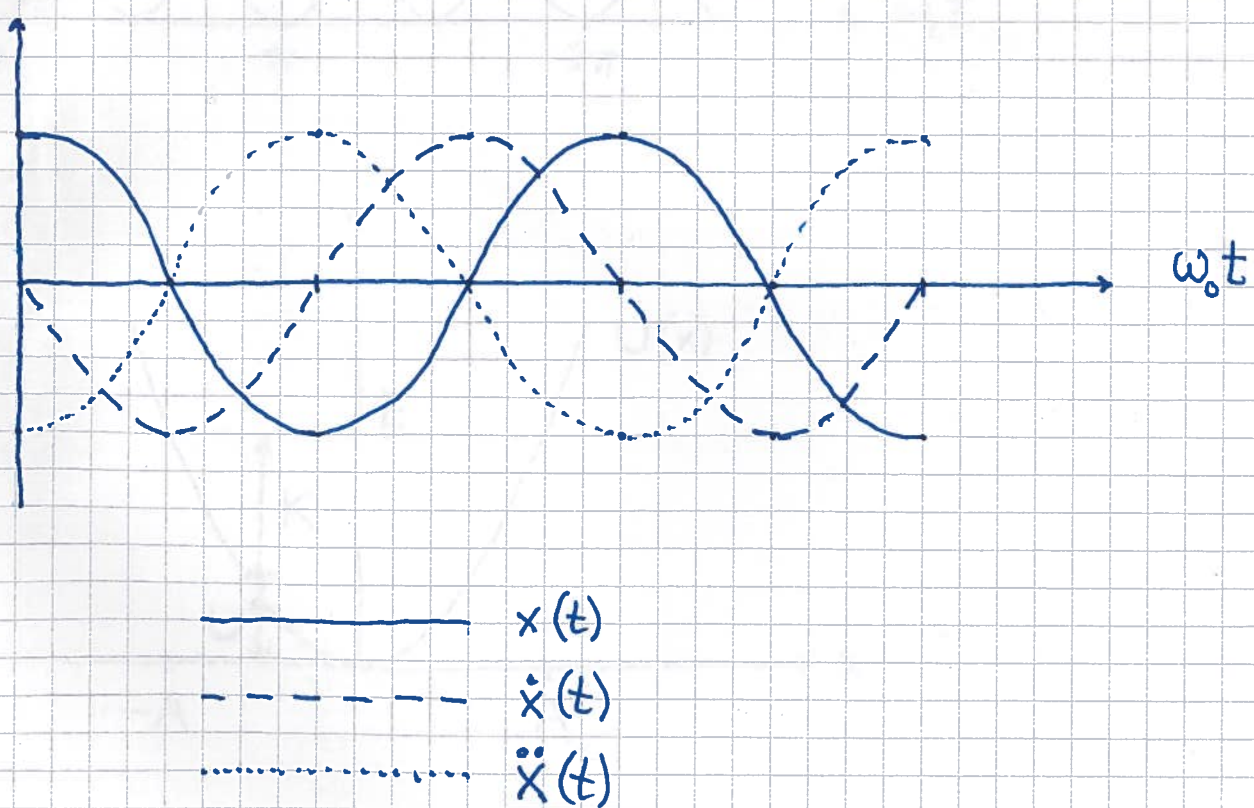
$\varphi$ = fasekonstant ; $[\varphi] = 1$

Med (for enkelhets skyld) $\varphi = 0$:

$x(t) = A\cos\omega_0 t$

$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin\omega_0 t = \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \pi/2)$ (hastigheten)

$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A\cos\omega_0 t = \omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \pi)$ (akselerasjonen)



# Energi i harmonisk oscillator [YF 14.3 ; LL 9.4]

Konservativt system, med potensiell energi:

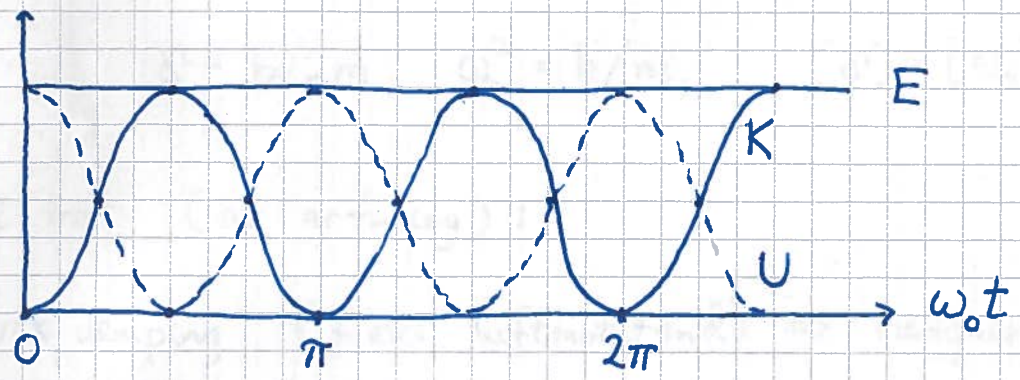
$$U = -\int_0^x (-kx)\,dx = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega_0 t$$

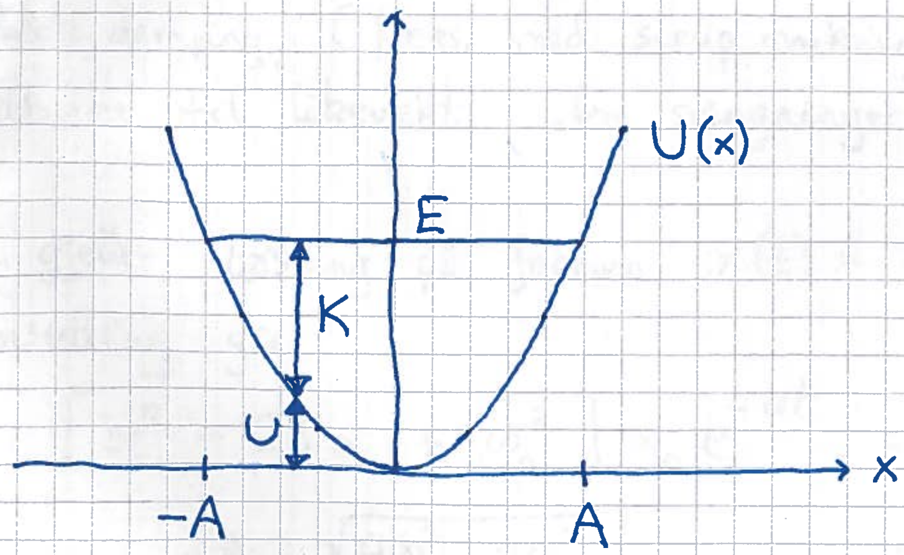
Kinetisk energi:

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2\omega_0 t = \frac{1}{2}kA^2\sin^2\omega_0 t$$

$\Rightarrow$ Total mekanisk energi er bevart:

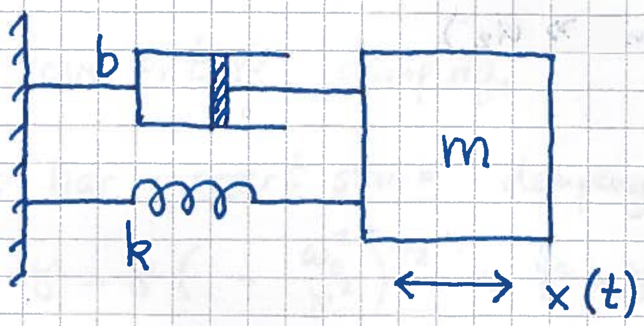
$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2 \qquad \text{(uavhengig av } t\text{)}$$



# Dempet fri svingning [YF 14.7 ; LL 9.7]

Antar friksjonskraft $f = -b\dot{x}$ (som for langsom bevegelse i et fluid).




N2: $-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\gamma = b/2m, \quad \omega_0^2 = k/m, \qquad [\gamma] = [\omega_0] = s^{-1}$$

Vi vet (av erfaring):

Svak demping (f.eks. luftmotstand) $\Rightarrow$ svingninger med avtagende amplitude.

Sterk demping (f.eks. med sirup omkring) $\Rightarrow$ Langsomt tilbake til likevekt, uten svingninger.

Vi gjetter løsning på formen $x(t) = x_0 e^{-\alpha t}$; innsetting gir

$$[\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega_0^2]\, x_0 e^{-\alpha t} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Dvs, generell løsning dersom $\gamma > \omega_0$ er:

$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}$$

$$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad , \quad \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Kalles overkritisk demping.

Hvis vi har svært sterk demping, dvs $\gamma \gg \omega_0$, er

$$\alpha_2 = \gamma - \gamma \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}\right)^{1/2} \approx \gamma - \gamma \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}\right) = \frac{\omega_0^2}{2\gamma} = \frac{k}{b}$$

(mens $\alpha_1 \approx 2\gamma = b/m \gg \alpha_2$)

Da går leddet $A e^{-\alpha_1 t}$ raskt mot null, mens

$$x(t) = B e^{-\alpha_2 t} = B e^{-kt/b}$$

går langsomt mot null, uavhengig av massen $m$.

Kritisk demping:

Hvis $\gamma = \omega_0$, er $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma$. Generell løsn. er da

$$x(t) = (A + Bt)\, e^{-\gamma t}$$

Dette tilsvarer minste demping som ikke gir svingninger.

Bra i støtdempere!

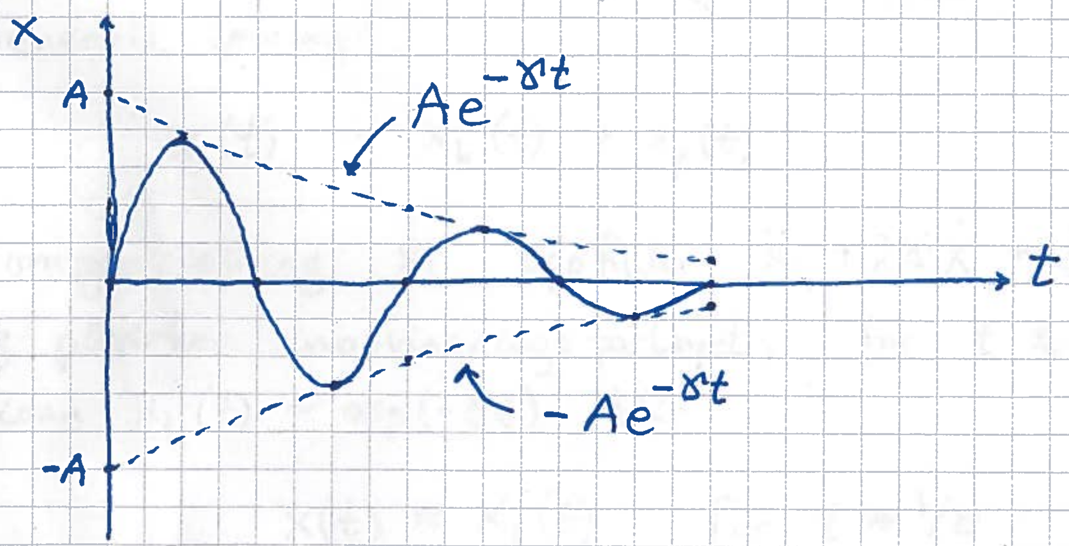
<u>Underkritisk</u> demping: Hvis $\gamma < \omega_0$, er

$\alpha = \gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, og generell løsning er

(siden $e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta$):

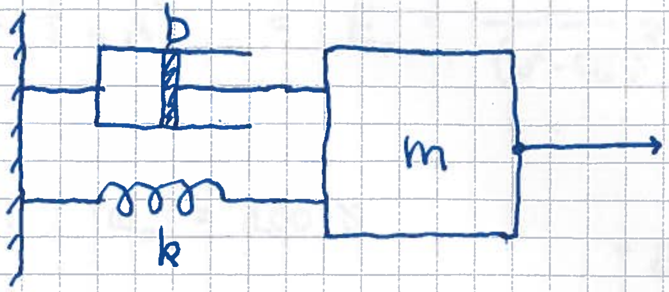
$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) \quad ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

dvs svingning med amplitude $Ae^{-\gamma t}$ som avtar eksponentielt med tiden $t$. Etter en "typisk" tid $\tau = 1/\gamma$ er amplituden redusert til $Ae^{-1} \approx 0.37A$.




Med <u>svak</u> demping, dvs $\gamma \ll \omega_0$, er $\omega \approx \omega_0$.

# Tvungen svingning og resonans [YF 14.8; LL 9.9]




$$F = F_0 \cos \omega t$$

N2: $$-kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad ; \quad \gamma = b/2m, \quad \omega_0^2 = k/m$$

Generell løsning:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Homogen løsning $x_h$ oppfyller $\ddot{x}_h + 2\gamma \dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$ og påvirker innsvingningsforløpet, for $t \lesssim 3 \cdot 1/\gamma$. Siden $x_h(t) \sim \exp(-\gamma t)$ blir

$$x(t) \approx x_p(t) \quad \text{for } t \gg 1/\gamma$$

"Gjetter"

$$x(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

hvoretter innsetting gir

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\left[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2\right]^{1/2}} \quad ; \quad \tan \varphi(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}$$

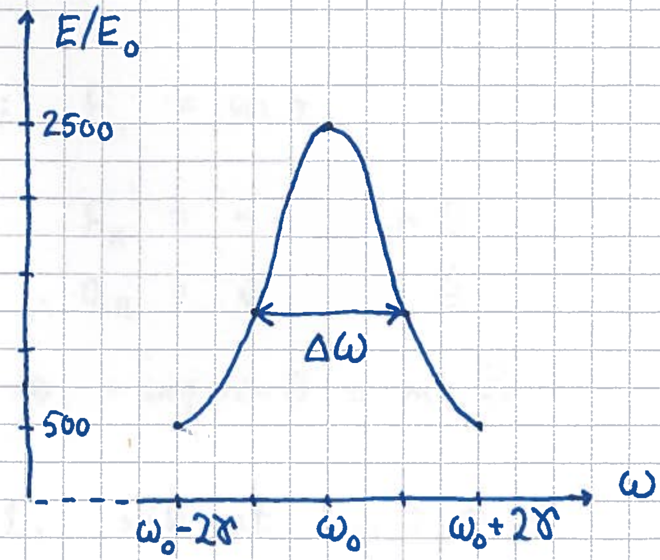
Resonans: Stor $A$ hvis $\gamma \ll \omega_0$ og $\omega \approx \omega_0$.

Energi i oscillatoren:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \quad ; \quad E_0 = \frac{F_0^2}{2k}$$

Eks: $\omega_0 = 100\,\gamma$

| $\omega$ | $E/E_0$ |
|---|---|
| $\omega_0$ | 2500 |
| $\omega_0 \pm \gamma$ | 1250 |
| $\omega_0 \pm 2\gamma$ | 500 |




Resonanskurvens halvverdibredde: $\Delta\omega \approx 2\gamma$

("Full Width Half Maximum")

Oscillatorens Q-faktor: $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx \frac{\omega_0}{2\gamma}$

Dvs: Høy Q-verdi når resonanskurven er smal.

---

Exp. med mekanisk oscillator:

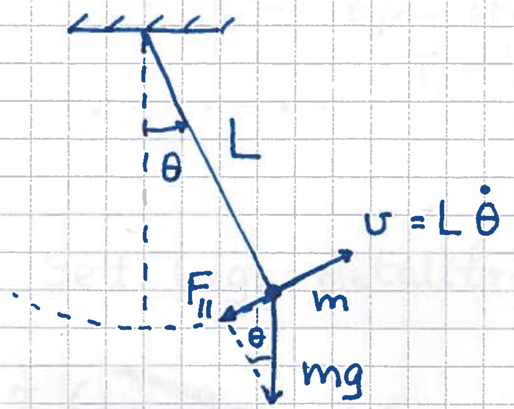
$T_0 \approx 0.65\,s$, $f_0 \approx 1.5$ Hz

Måler mye større amplitude når ytre kraft har frekvens ca 1,5 Hz, enn med f.eks. 1.0 og 2.0 Hz.

# Pendler

## Matematisk pendel [YF 14.5 ; LL 9.6]

Punktmasse $m$ i masseløs snor med lengde $L$




N2: $F_{\parallel} = m a_{\parallel}$

med

$$F_{\parallel} = -mg\sin\theta$$

$$a_{\parallel} = \dot{v} = L\ddot{\theta}$$

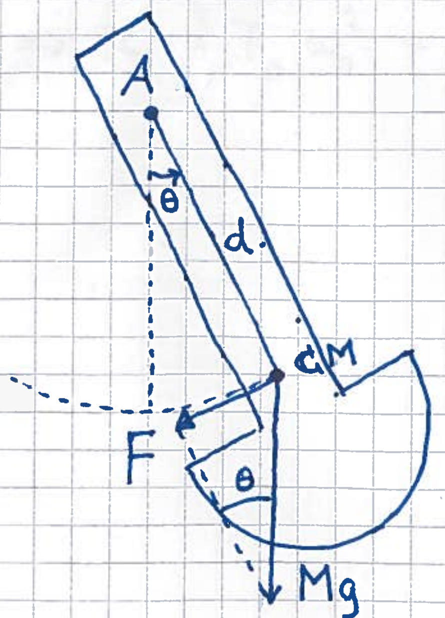
$$\Rightarrow \quad -mg\sin\theta = mL\ddot{\theta}$$

Anta små utsving, $|\theta| \ll 1$, slik at $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = g/L}$$

## Fysisk pendel [YF 14.6 ; LL 9.6]

Stivt legeme, masse $M$, treghetsmoment $I$ mhp $A$




N2, rot. om (fast akse) $A$:

$$\tau = I\ddot{\theta}$$

med $\tau = -F\cdot d = -Mgd\sin\theta$

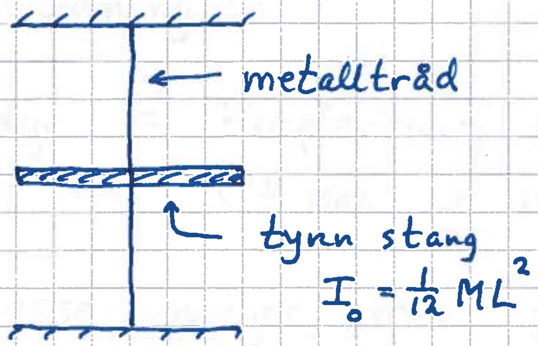
($\tau > 0$ mot klokka)

$$\Rightarrow \quad -Mgd\sin\theta = I\ddot{\theta}$$

Anta $|\theta| \ll 1$ slik at $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{Mgd}{I}}$$

# Torsjonspendel [YF 14.4 ; LL 9.6]




Hookes lov: Vridning av metalltråden en vinkel $\theta$ gir dreiemoment

$$\tau = -\kappa\,\theta$$

på stanga; $\kappa$ er metalltrådens torsjonsstivhet

Sett langs metalltråden:


N2, rot. om trådaksen: $\tau = I_0 \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = \kappa / I_0}$$

Exp: $M = 50\,g$ , $L = 11\,cm$ , $T = 0.8\,s$

$$\Rightarrow \kappa = I_0\,\omega_0^2 = \frac{1}{12} ML^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \approx \underline{\underline{0.003\ Nm}}$$