BØLGEFYSIKK [YF 15, 16, 11.4 ; LL 10, 7.2]

Innledning :

Bølge = Forplantning av forstyrrelse fra likevekt
(f. eks. en svingning)

Masse svinger, men forplanter seg ikke
Energi svinger og forplanter seg med bølgen

Transversale bølger (T) :
Masse svinger $\perp$ bølgens forplantningsretning

Longitudinale bølger (L) :
Masse svinger $\parallel$ bølgens forplantningsretning

Eksempler :
Streng, snor (evt fjær) : T - utsving av masse i strengen, snora (fjæra)
Lyd : L - utsving av molekyler i mediet
Overflatebølger på vann : T- og L-utsving av vann nær overflaten

Elektromagnetiske (EM) bølger : Elektrisk felt $\vec{E}$ og magnetfelt $\vec{B}$ som svinger $\perp$ forplantningsretningen

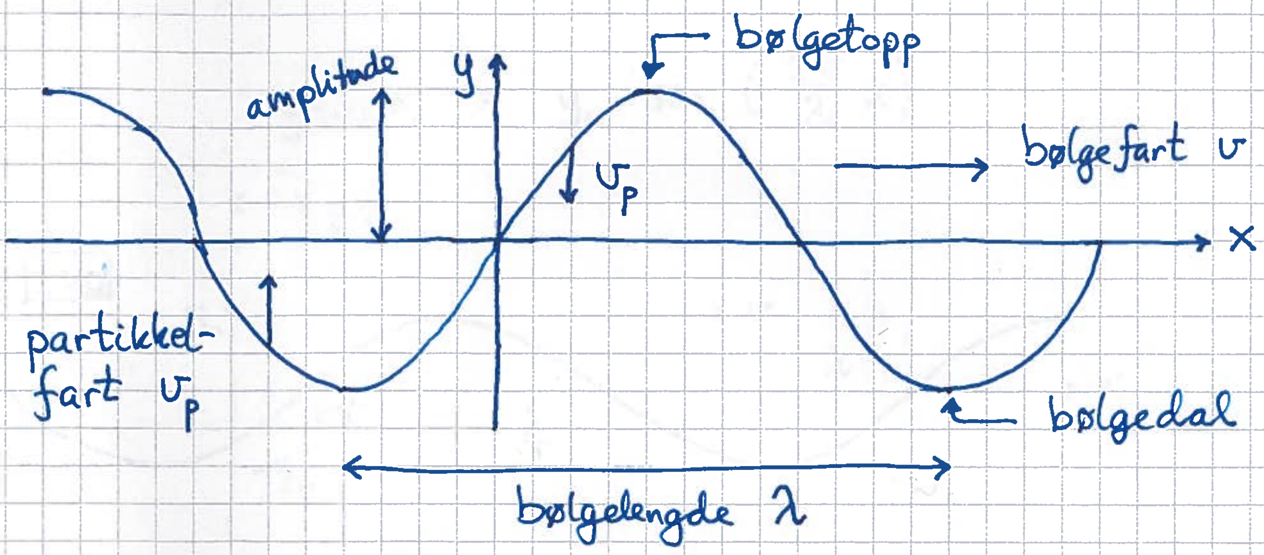
Bølgefenomener :
Interferens og diffraksjon ; Stående bølger (resonans) ; Dopplereffekt ; Brytning ; Dispersjon ($\Rightarrow$ regnbue m.m) ; Sjokkbølger

Harmonisk<u>e bølger</u> [YF 15.2, 15.3 ; LL 10.2]

= (co-) sinusbølger, med gitt bølgelengde λ

Anta f.eks. T-bølge på (uendelig lang) streng

$y(x,t)$ = utsving fra likevekt i pos. x ved tid t



Periode: T = tiden som bølgemønsteret bruker på å flytte seg en bølgelengde λ

$\Rightarrow$ Bølgehastigheten er $v = \frac{\lambda}{T}$ (= fasehastigheten)

Frekvens: f = antall svingninger pr tidsenhet ved en gitt posisjon x

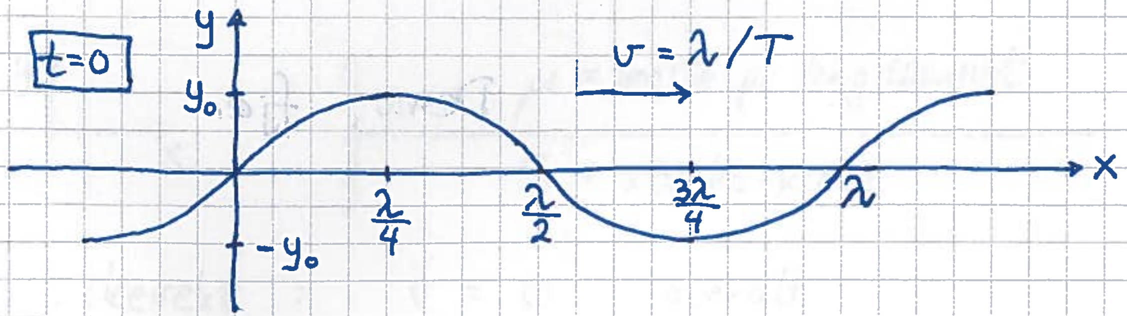
$\Rightarrow f = 1/T \qquad \Rightarrow \boxed{v = \lambda f}$

Vinkelfrekvens: ω = bølgens faseendring pr tidsenhet ved en gitt posisjon x

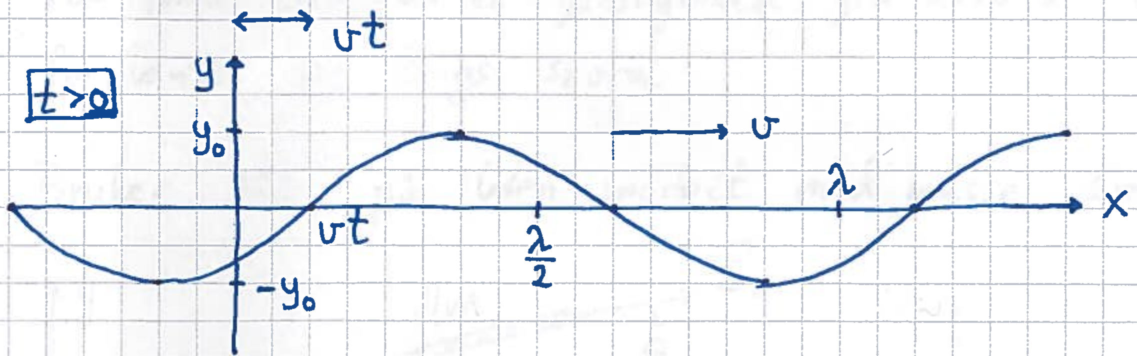
$\Rightarrow \omega = 2\pi/T = 2\pi f$

Partikkelhastighet: $v_p = \frac{dy}{dt}$

Matematisk beskrivelse av harmonisk bølge:



$$y(x,0) = y_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$



$$y(x,t) = y_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$

Bølgetall : $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ = faseendring pr lengdeenhet ved et gitt tidspunkt t

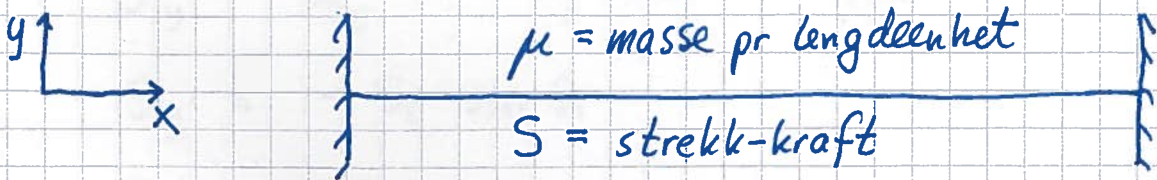
Dermed: $v = \lambda/T = \lambda f = \lambda\omega/2\pi = \omega/k$

$$\Rightarrow \boxed{y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t)}$$

Harmonisk bølge, forpl. i pos. x-retn., bølgefart $v = \omega/k$

Dersom forpl. i neg. x-retn. $\boxed{y(x,t) = y_0 \sin(kx + \omega t)}$

Transversale bølger på streng/snor [YF 15.4 ; LL 10.1]

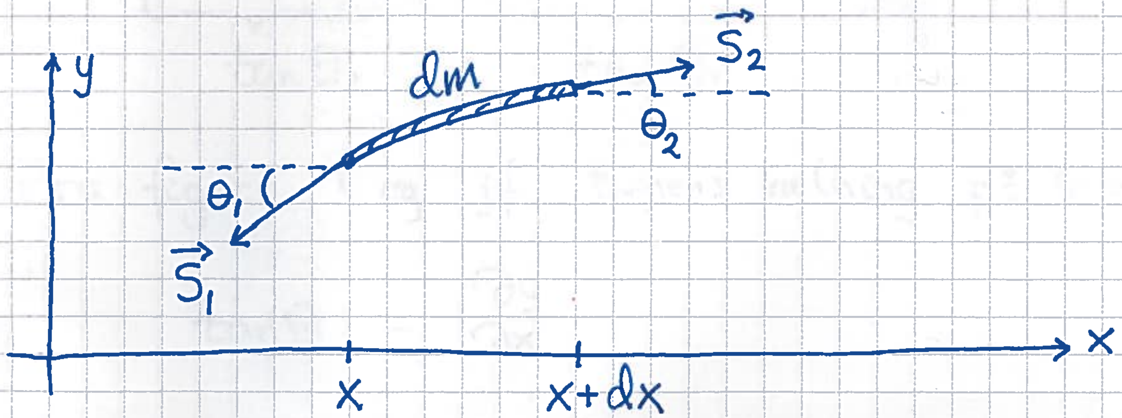


Likevekt : $y = 0$ overalt

Anta *lett* snor, med neglisjerbar tyngde

Vil finne hvordan en forstyrrelse fra likevekt vil forplante seg langs snora.

Bruker N2 på liten snorbit med masse $dm = \mu \cdot dx$:



Anta *små utsving* fra likevekt, $|y| \ll \lambda$ overalt.

Anta kun *vertikal bevegelse* av masse.

$$\Rightarrow \sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow |S_{1x}| = |S_{2x}| = S_x \approx S$$

$$S_{1x} = -S_1 \cos\theta_1 = -S$$

$$S_{2x} = S_2 \cos\theta_2 = S$$

N2 vertikalt:

$$S_{1y} + S_{2y} = a_y \cdot dm = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot dm$$

$$S_{1y} = -S_1 \sin\theta_1$$

$$S_{2y} = S_2 \sin\theta_2$$

$$\Rightarrow \quad S_2 \sin\theta_2 - S_1 \sin\theta_1 = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot \mu \cdot dx$$

Divider med S og bruk $S = S_1 \cos\theta_1 = S_2 \cos\theta_2$:

$$\underbrace{\frac{S_2 \sin\theta_2}{S_2 \cos\theta_2}}_{\tan\theta_2} - \underbrace{\frac{S_1 \sin\theta_1}{S_1 \cos\theta_1}}_{\tan\theta_1} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot \frac{\mu}{S} \cdot dx$$

Fra figur (og jf. banens helning på lab):

$$\tan\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(\partial y/\partial x)_{x+dx} - (\partial y/\partial x)_x}{dx} = \frac{\mu}{S} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad ; \quad v = \sqrt{S/\mu}}$$

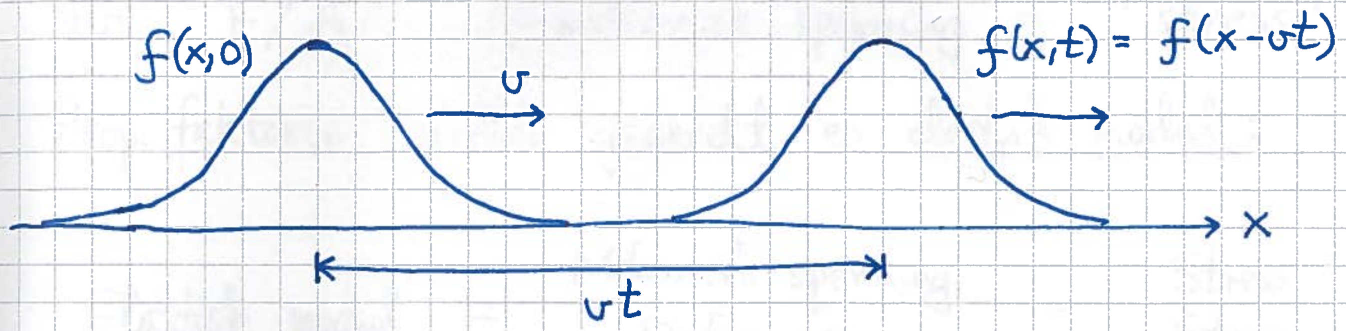
Dette er bølgeligningen for små transversale utsving $y(x,t)$ på snor/streng med snordrag S og masse μ pr lengdeenhet.

Generell løsning av denne diff. ligningen er:

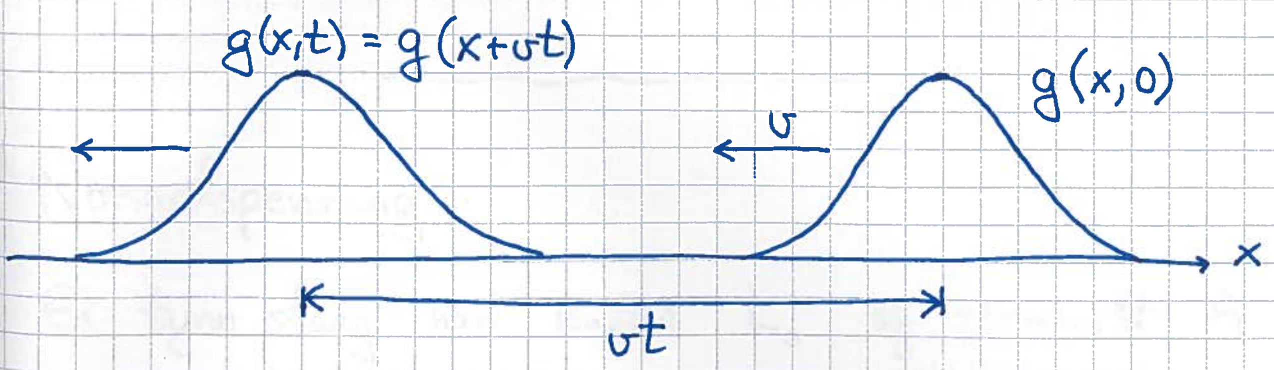
$$y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt) \quad ; \quad v = \sqrt{S/\mu}$$

[For bevis, innfør $z = x \pm vt$ og bruk kjerneregel for derivasjon. Se notater fra 2017, s. 60.]

$f(x-vt)$ = forstyrrelse (bølge) som forplanter seg i positiv x-retning med fart v



$g(x+vt)$ = forstyrrelse (bølge) som forplanter seg i negativ x-retning med fart v



Enkel elastisitetsteori [YF 11.4 ; LL 7.2]

Motivasjon : Nødvendig for å beskrive mekaniske bølger i fluider og faste stoffer.

Anta lineær respons, slik at Hookes lov gjelder.

Da er relativ lengde- eller volumendring, dvs $\Delta L / L_0$ eller $\Delta V / V_0$ (= deformasjon = "strain") proporsjonal med påtrykt kraft pr flateenhet, dvs F/A (= mekanisk spenning = "stress").

Prop. faktoren kalles generelt en elastisk modul :

$$\text{Elastisk modul} = \frac{\text{Mekanisk spenning}}{\text{Deformasjon}} = \frac{\text{Stress}}{\text{Strain}}$$

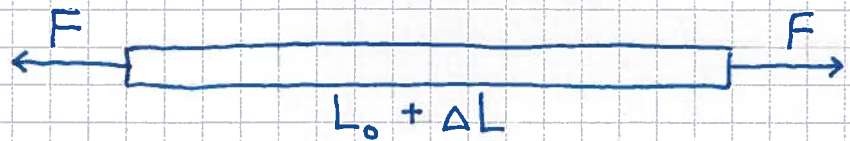
Elastiske moduler er (temperaturavhengige) materialkonstanter.

Normalspenning :

Ei tynn stang med lengde L_0 og tverrsnitt A forlenges (forkortes) når den strekkes (trykkes sammen).

Likevekt :

Strukket :



Elastisitetsmodulen E (= Youngs modul Y):

$$E = \frac{F/A}{\Delta L/L_0} \quad ; \quad [E] = N/m^2 = Pa \quad (\text{pascal})$$

Sammenligning med Hookes lov for ei ideell fjær, $F = k \cdot \Delta L$, gir stanga en "fjærkonstant"

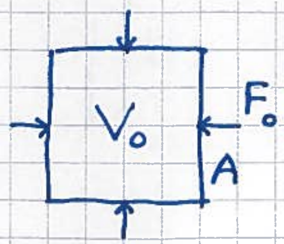
$$k = \frac{F}{\Delta L} = \frac{E \cdot A}{L_0}$$

Et par tallverdier:

Stål	ca	200 GPa
Grafén	ca	1050 GPa
DNA	ca	0,3 GPa
Aluminium	ca	69 GPa
Betong	ca	30 GPa

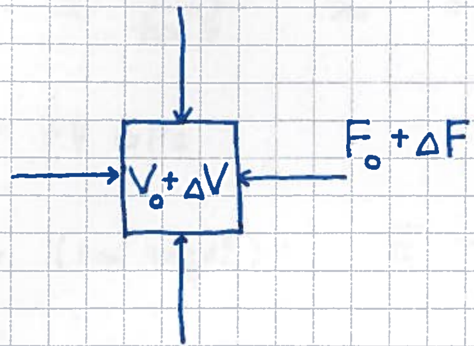
Volumkompressibilitet og bulkmodul:

Likevekt:



$p_0 = \frac{F_0}{A}$ = likevektstrykk fra omgivende medium

Trykkøkning gir volumreduksjon:



$p = p_0 + \Delta p$

Bulkmodulen B:

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V_0} = -V_0 \frac{\Delta p}{\Delta V} \overset{\Delta V \to 0}{=} -V \frac{\partial p}{\partial V}$$

$$[B] = N/m^2 = Pa$$

Kompressibilitet:

$$\kappa = \frac{1}{B} = -\frac{1}{V_0}\frac{\Delta V}{\Delta p} \overset{\Delta p \to 0}{=} -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}$$

Tallverdier; B:

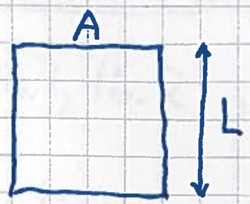
Stål	ca	160 GPa
Vann	ca	2 GPa
Luft	ca	0.0001 GPa

Dvs:

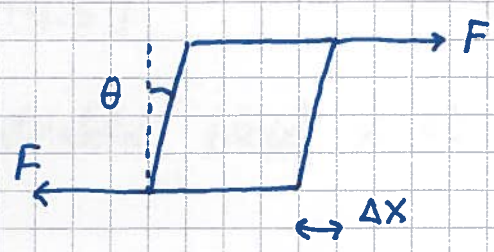
$$B_{gass} \ll B_{væske} < B_{fast\ stoff}$$

Skjærdeformasjon:

Likevekt:



Med skjærkrefter:



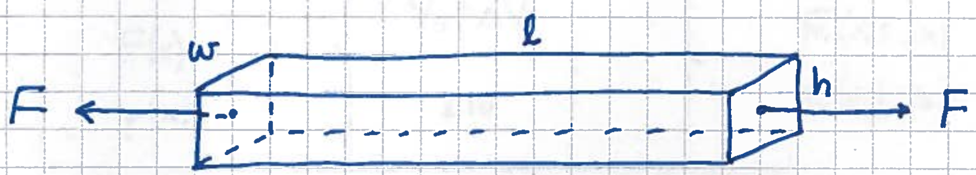
Skjærmodulen:

$$G = \frac{F/A}{\Delta x/L} = \frac{F/A}{\tan\theta} \overset{\theta \ll 1}{\approx} \frac{F/A}{\theta} \quad ; \quad [G] = Pa$$

Stål: $G = 79\ GPa$

Faste stoffer (som regel): $E \sim B > G$

Normalspenning og skjærspenning henger sammen:



$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\nu \cdot \frac{\Delta l}{l} \quad ; \quad \nu = \text{poissontallet}$$

Sammenheng mellom de elastiske modulene:

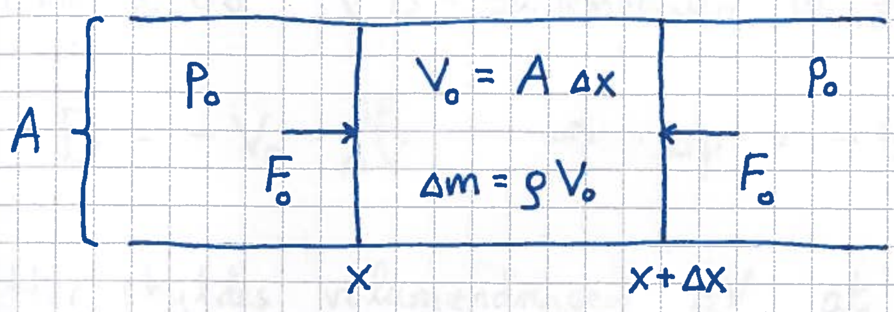
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad ; \quad B = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Longitudinale bølger. Lyd

[YF 16.1, 16.2 ; LL 10.6]

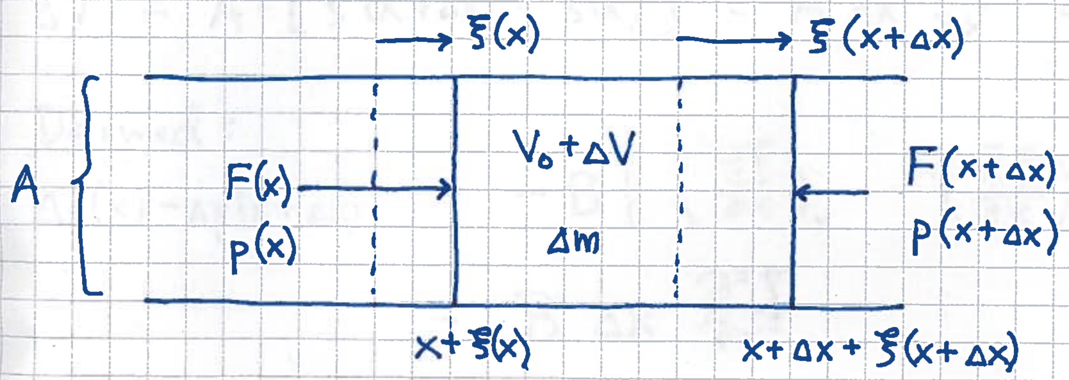
Utleder bølgeligning ved å betrakte fluid i et rør.

Likevekt:



ρ = masse pr volumenhet

Forstyrrelse fra likevekt (bølge):



Δp = avvik fra likevektstrykket p_0

$\Delta p(x) = p(x) - p_0$, $\Delta p(x+\Delta x) = p(x+\Delta x) - p_0$

$\xi(x,t)$ = midlere utsving fra likevekt for molekyler med likevektsposisjon x

N2 for fluidelementet med masse $\Delta m = \rho \cdot V_0$:

$$\Delta m \cdot \ddot{\xi} = F(x) - F(x+\Delta x)$$
$$= \left[p(x) - p(x+\Delta x) \right] A$$
$$= \left[\Delta p(x) - \Delta p(x+\Delta x) \right] A$$

Fra s. 88 (B = bulkmodulen til fluidet) :

$$B = -V_0 \frac{\Delta p}{\Delta V} \quad \Rightarrow \quad \Delta p = -B \frac{\Delta V}{V_0}$$

Her skyldes volumendringen ΔV at utsvinget ξ varierer med posisjonen x :

$$\Delta V = A \cdot \left[\xi(x+\Delta x) - \xi(x) \right] = A \, \Delta x \frac{\partial \xi}{\partial x} = V_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Dermed :

$$\Delta p(x) - \Delta p(x+\Delta x) = -B \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} \right]$$
$$= B \, \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

slik at

$$\rho V_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = B \, \Delta x \, A \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = B V_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

dvs

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad ; \quad v = \sqrt{B/\rho}}$$

som er bølgeligningen for lydbølger i et fluid med bulkmodul B og massetetthet ρ. Generell løsning er $\xi(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$, dvs bølgen forplanter seg med fart $v = \sqrt{B/\rho}$, som da blir lydhastigheten i fluidet.

Fluid	ρ (kg/m³)	B (Pa)	v (km/s)
Luft	1.29	$1.42 \cdot 10^5$	0.33
Vann	1000	$2.2 \cdot 10^9$	1.5

Mekaniske bølger i faste stoffer:

Tynn stang: Longitudinale bølger som oppfyller

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \text{med} \quad v = \sqrt{E/\rho}$$

Stål: $\rho = 7.8 \cdot 10^3 \ \mathrm{kg/m^3}$, $E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Pa $\Rightarrow v \approx 5.1$ km/s

Generelt: Siden normalspenning skaper skjærspenning, og omvendt, vil forstyrrelse fra likevekt resultere i både en longitudinal og en transversal bølge.

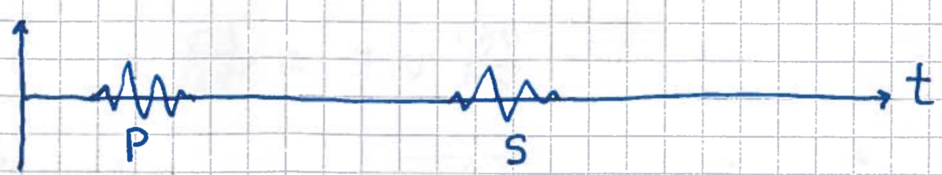
$$L: \quad v_p = \sqrt{(B + \tfrac{4}{3}G)/\rho} \qquad \text{(Primærbølgen)}$$

$$T: \quad v_s = \sqrt{G/\rho} \qquad \text{(Sekundærbølgen)}$$

Jordskjelv og seismiske bølger:

$v_p \sim 5.5 - 13.7$ km/s

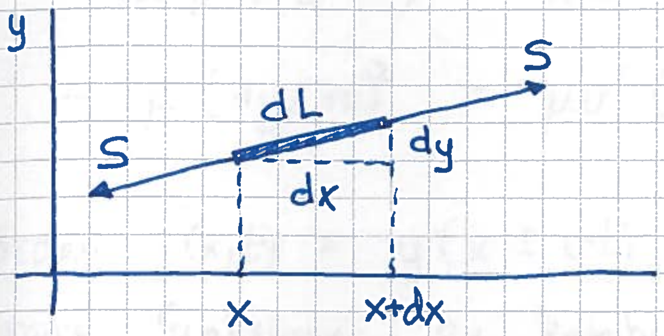
$v_s \sim 3.0 - 7.3$ km/s



Tid og sted for jordskjelvet kan bestemmes ved å måle P- og S-bølgen på ulike steder.

Energitransport med bølger [YF 15.5 ; LL 10.5]

Utledes enklest for transversal bølge på streng :



Likevekt :

$y = 0$ overalt

$K = U = 0$

$\mu = dm/dx$

Forstyrrelse fra likevekt gir strengbiten
en hastighet $\partial y/\partial t$; dvs kinetisk energi dK
og en forlengelse $dL - dx$; dvs potensiell energi dU

$$dK = \frac{1}{2}\, dm\, v_y^2 = \frac{1}{2}\, \mu\, dx \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

$$dU = S \cdot (dL - dx) = S \cdot \left(\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} - dx\right)$$

$$= S \cdot dx \cdot \left(\sqrt{1 + (dy/dx)^2} - 1\right)$$

$$\approx S \cdot dx \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\, S\, dx \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

Siden $y(x,t) = y(x \pm vt)$, er

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \pm v \frac{\partial y}{\partial x}$$

Dessuten : $v = \sqrt{S/\mu} \Rightarrow S = v^2 \mu$

Mekanisk energi pr lengdeenhet blir da:

$$\varepsilon = dE/dx = dK/dx + dU/dx$$

$$= \frac{1}{2}\mu\,(\partial y/\partial t)^2 + \frac{1}{2}S\,(\partial y/\partial x)^2 \qquad (S = \mu v^2)$$

$$= \mu\,(\partial y/\partial t)^2 = \mu v^2\,(\partial y/\partial x)^2 = \pm\,\mu v\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

Siden $y(x,t) = y(x \pm vt)$, må også $\partial y/\partial t$ og $\partial y/\partial x$ være funksjoner av kombinasjonen $x \pm vt$, slik at $\varepsilon(x,t) = \varepsilon(x \pm vt)$. Men da må også ε oppfylle bølgeligningen,

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}$$

som betyr at <u>bølgeenergien forplanter seg med bølgebevegelsen</u>, med hastighet lik bølgehastigheten (som her er $v = \sqrt{S/\mu}$).

For en <u>bølgepuls</u> kan vi fra $\varepsilon(x,t)$ f.eks. regne ut den totale energien.

Eks: $\varepsilon(x,t) = \varepsilon_0 \exp\left[-\left(\frac{x-vt}{\sigma}\right)^2\right]$; $E = ?$

Løsn: $$E = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x,t)\,dx \;\underset{=\!=}{\overset{\text{enklest}}{}}\; \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x,0)\,dx$$

$$= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/\sigma^2}\,dx = \varepsilon_0\sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\,dz = \underline{\underline{\varepsilon_0\sigma\sqrt{\pi}}}$$

(Ingen "tapsmekanismer" i denne bølgeligningen, så total bølgeenergi E er bevart.)

For <u>harmoniske bølger</u> er det mer naturlig å fokusere på <u>midlere</u> energitetthet, enten midlet over en bølgelengde ved gitt tidspunkt eller midlet over en periode ved gitt posisjon:

$$y = y_0 \cos(kx - \omega t) \quad ; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

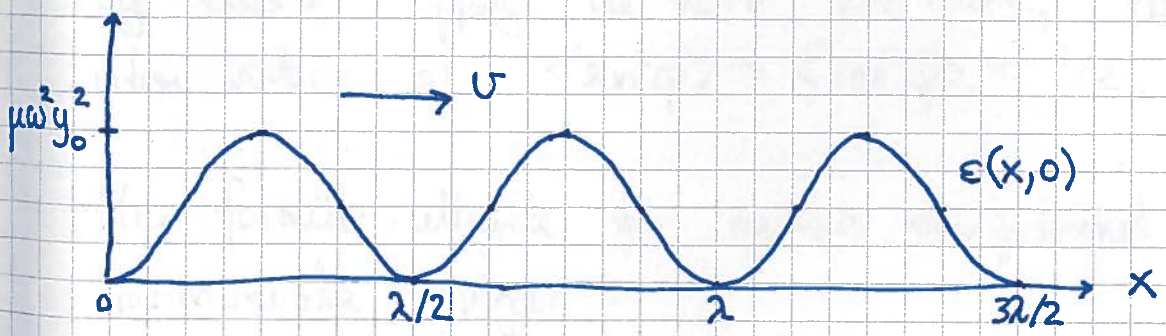
$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = \omega y_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\Rightarrow \varepsilon(x,t) = \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

Ved gitt posisjon, f.eks. $x = 0$: $\varepsilon(0,t) = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2 \omega t$

Ved gitt tid ("øyeblikksbilde"), f.eks. $t = 0$:

$$\varepsilon(x,0) = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2 kx$$



Enten vi midler $\varepsilon(0,t)$ over en periode T eller vi midler $\varepsilon(x,0)$ over en bølgelengde λ, blir middelverdien av både $\sin^2 \omega t$ og $\sin^2 kx$ lik $1/2$. Dvs:

$$\langle \varepsilon \rangle = \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2$$

Tidsmidlet   Romlig midlet

Vi gjentar ikke utledningene for plane <u>longitudinale bølger</u> (lydbølger) i et fluid. Resultatet blir helt tilsvarende, nå med energi pr <u>volumenhet</u> $\varepsilon(x,t)$, og med μ erstattet av masse pr volumenhet ρ og S erstattet av fluidets bulkmodul B:

$$\varepsilon(x,t) = \rho\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 = \rho v^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 = \pm\rho v\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)$$

med

ξ = longitudinalt molekylutsving fra likevekt

$v = \sqrt{B/\rho}$ = lydhastigheten i fluidet

Et par kommentarer:

- Siden $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ og middelverdiene $\langle\sin^2\varphi\rangle$ og $\langle\cos^2\varphi\rangle$ opplagt må være like store, følger det uten videre at $\langle\sin^2\varphi\rangle = \langle\cos^2\varphi\rangle = 1/2$.

- Mer formelle uttrykk for midlere energitetthet i harmoniske bølger:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\int_0^T \varepsilon(x,t)\,dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon(x,t)\,dt$$

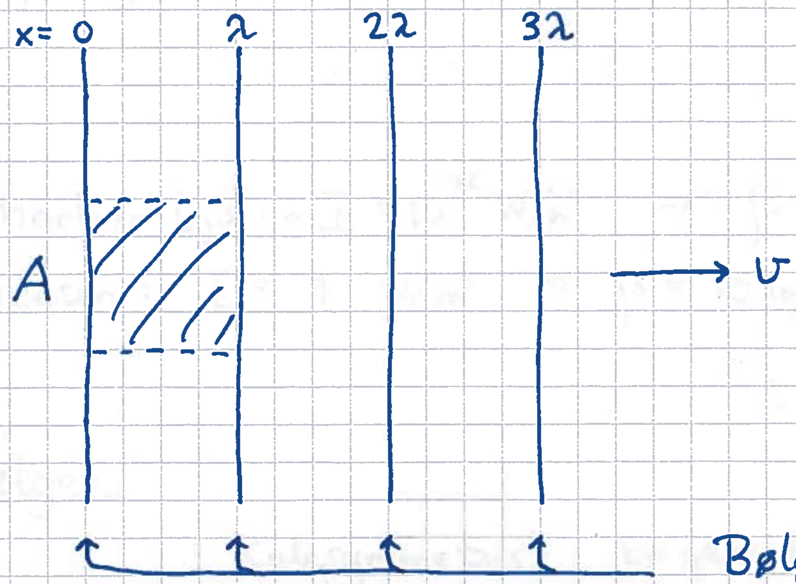
$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\lambda \varepsilon(x,t)\,dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \varepsilon(x,t)\,dt$$

Bølgens intensitet [YF 16.3 ; LL 10.5]

I = intensitet = midlere overført effekt pr flateenhet

$[I] = W/m^2$

For en plan harmonisk lydbølge:



Bølgefronter: Flater med lik fase overalt.

Energi i skravert volum: $\bar{\varepsilon} \cdot A \cdot \lambda$

Passerer i sin helhet ved $x = \lambda$ i løpet av tid T, slik at bølgens intensitet blir:

$$I = \bar{P}/A = (\bar{\varepsilon} A \lambda / T)/A = \underline{\underline{\bar{\varepsilon} \cdot v}} \qquad (v = \lambda/T)$$

Desibelskalaen

Lydintensitet opptrer med store tallmessige variasjoner.

⇒ Hensiktsmessig med <u>logaritmisk</u> skala :

$$\boxed{\beta = 10 \log \left(I/I_0 \right) \quad ; \quad I_0 = 10^{-12} \ \mathrm{W/m^2}}$$

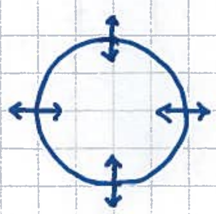
β = lydtrykksnivået, i "enheten" dB (desibel)

Eks:

Knapt hørbar lyd : $I = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2} \Rightarrow \beta = 10 \log 1 = \underline{0\ \mathrm{dB}}$

Smertegrensen : $I = 1\ \mathrm{W/m^2} \Rightarrow \beta = 10 \log 10^{12} = 10 \cdot 12 = \underline{120\ \mathrm{dB}}$

Kulebølger

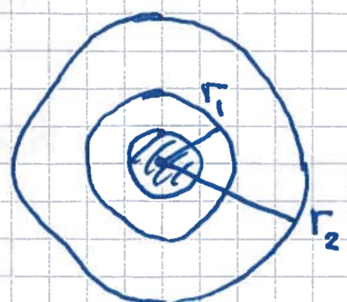


Kulesymmetrisk bølgekilde gir bølge som forplanter seg radielt utover med lik intensitet i alle retninger

Energibevarelse (dvs: ikke opphopning av energi noen bestemte steder)

⇒ Like stor midlere effekt $\langle P \rangle$ passerer enhver kuleflate

$$\Rightarrow I_1 \cdot 4\pi r_1^2 = I_2 \cdot 4\pi r_2^2$$



$$\Rightarrow I_2 / I_1 = r_1^2 / r_2^2$$

$$\Rightarrow I(r) \sim 1/r^2 \quad \text{for kulebølger}$$

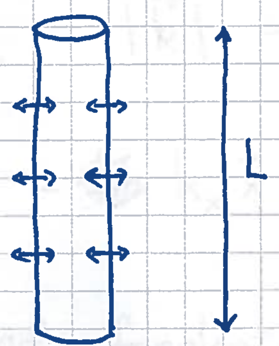
Eks: Hvis 95 dB måles i avstand 5,0 m fra en kuleformet høyttaler, hva er da intensiteten i avstand 25 m fra høyttaleren?

Løsn: $I(25m) = I(5m)/5^2 = I_0 \cdot 10^{\beta/10}/25$

$$= (10^{-12} \cdot 10^{9.5}/25)\ \frac{W}{m^2} \approx \underline{\underline{1.3 \cdot 10^{-4}\ W/m^2}}$$

(som tilsvarer $\beta = 81$ dB)

Sylinderbølger



Sylinderformet (lang) bølgekilde skaper bølger med sylinderflater som bølgefronter. Gir lik effekt gjennom flater med areal $L \cdot 2\pi r$, for enhver r.

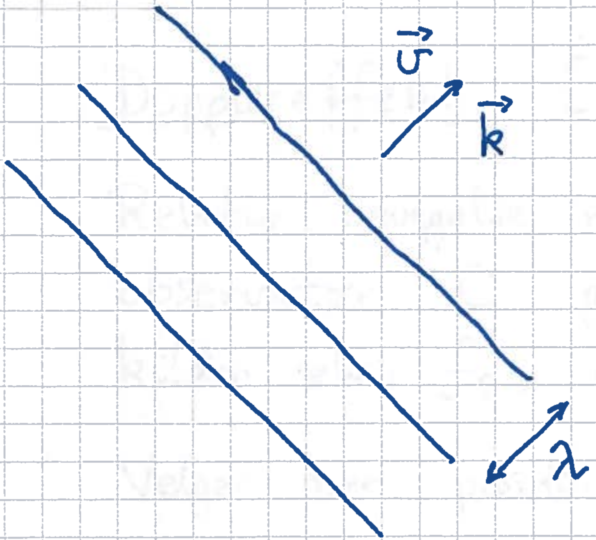
$\Rightarrow I(r) \sim 1/r$

Plane bølger

Plan bølgekilde skaper bølger med plane flater som bølgefronter.
Gir effekt som er uavhengig av avstanden fra kilden

$\Rightarrow$ I avtar ikke med r

Plan harmonisk bølge i vilkårlig retning



$$\vec{\xi}(\vec{r},t) = \vec{\xi}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$\vec{k}$ = bølgetallsvektoren, som har samme retning som bølgens forplantningsretning

$$k = |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$$

Med forplantning i (f.eks.) positiv z-retning:

$$\vec{k} = k\hat{z} \qquad (k_x = k_y = 0 \;;\; k_z = k)$$

$$\Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{r} = k\hat{z}\cdot(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) = kz$$

$$\Rightarrow \vec{\xi}(\vec{r},t) = \vec{\xi}_0 \sin(kz - \omega t)$$

Hvis longitudinal bølge: $\vec{\xi}_0 = \xi_0 \hat{z}$

Hvis transversal bølge: $\vec{\xi}_0 = \xi_{0x}\hat{x} + \xi_{0y}\hat{y}$