

TFY4115 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2013.
Løsningsforslag til øving 1.

Oppgave 1.

La oss betegne bevegelsesretningen som x -retningen, med $x = 0$ som stedet der fallskjermhopperen treffer snøfonna. Med konstant akselerasjon $a = -50g$ i x -retningen har en for $t > 0$ konstant-akselerasjonsligningene

$$v(t) = v_0 + at; \quad x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

Eliminer t mellom disse to ligningene for å finne $v(x)$ eller $x(v)$:

$$x = v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a \frac{(v - v_0)^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad 2ax = v^2 - v_0^2.$$

(Eller du kunne skrevet opp denne "tidløse" ligningen direkte.) Inntrengningsdybden x_i ved tida t_i er det punktet der $v(t_i) = 0$,

$$x_i = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{40^2}{2 \cdot 50 \cdot 9.8} \text{ m} = \underline{1.6 \text{ m}}.$$

Fallet bremses ned til $v = 0$ i løpet av tida

$$t_i = -\frac{v_0 - 0}{a} = \frac{40}{50 \cdot 9.8} \text{ s} = \underline{0.082 \text{ s}}.$$

Oppgave 2.

a. Når akselerasjonen er en gitt funksjon av hastigheten, gir det en differensialligning for $v(t)$. I vårt tilfelle:

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv^2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{dv}{v^2} = k dt$$

Integrerer fra start $(0, v_0)$ til vilkårlig tidspunkt (t, v) :

$$-\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = k \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = k(t - 0) \quad \Rightarrow \quad \underline{v(t) = \frac{v_0}{1 + kv_0 t}}.$$

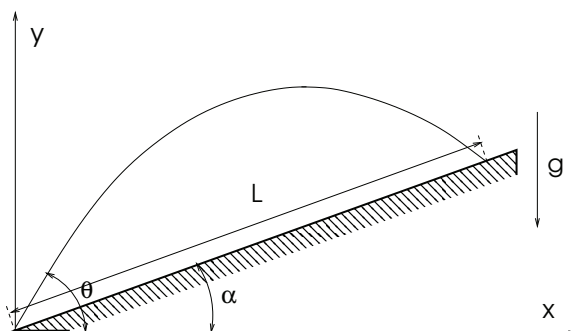
b. Hastighetens halveringstid T er derved gitt som

$$v(T) = \frac{v_0}{1 + kv_0 T} = \frac{1}{2}v_0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{kv_0} = \frac{1}{3.0 \cdot 1.50} \text{ s} = 0.22 \text{ s}.$$

Ved start er $x = 0$, og i løpet av halveringstida har kula beveget seg strekningen $x(T)$. Denne bestemmes fra $v = dx/dt$, eller $dx = v dt$, som gir

$$x(T) = \int_0^T v(t) dt = \int_0^T \frac{v_0}{1 + kv_0 t'} dt' = \frac{1}{k} \ln(1 + kv_0 T) = \frac{1}{3.0 \text{ m}^{-1}} \cdot \ln 2 = \underline{0.23 \text{ m}}.$$

Oppgave 3.



a. Situasjonen er skissert i figuren til venstre.

b. Vi velger utskytningsstedet som origo. Derved er begynnelsesbetingelsene

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 & y(0) &= 0, \\ v_x(0) &= v_0 \cos \theta & v_y(0) &= v_0 \sin \theta. \end{aligned}$$

I x -retningen er akselerasjonen lik null (når luftmotstanden neglisjeres), og derved er $x(t) = v_0 \cos \theta \cdot t$.

I y -retningen er akselerasjonen $-g$, slik at

$$y(t) = v_y(0)t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Når pila treffer bakken ved tida t_b , har den beveget seg $x(t_b)$ i x -retning og $y(t_b)$ i y -retning. Da må ifølge figuren $y(t_b)/x(t_b) = \tan \alpha$. Derved kan t_b bestemmes:

$$\frac{v_0 \sin \theta \cdot t_b - \frac{1}{2}gt_b^2}{v_0 \cos \theta \cdot t_b} = \tan \alpha \quad \Rightarrow \quad t_b = \frac{2v_0}{g} \cdot (\sin \theta - \cos \theta \tan \alpha).$$

Rekkevidden blir da (se figuren)

$$L = \frac{x(t_b)}{\cos \alpha} = \frac{v_0 \cos \theta \cdot t_b}{\cos \alpha} = \frac{2v_0^2 \cdot (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta \tan \alpha)}{g \cos \alpha} = \frac{2v_0^2 \cdot \cos^2 \theta}{g \cdot \cos \alpha} \cdot (\tan \theta - \tan \alpha) \quad \text{Q.E.D.}$$

c. Vinkelen som gir størst rekkevidde $L(\theta)$ finnes ved å derivere mhp θ og sette den deriverte lik null.

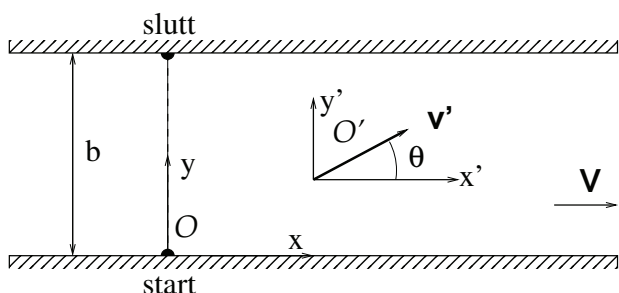
$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\theta} &= \frac{2v_0^2}{g \cos \alpha} \frac{d}{d\theta} (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta \tan \alpha) \\ &= \frac{2v_0^2}{g \cos \alpha} (-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta \tan \alpha) \\ &= \frac{2v_0^2}{g \cos \alpha} (\cos 2\theta + \sin 2\theta \tan \alpha). \end{aligned}$$

$\frac{dL}{d\theta} = 0$ og løst mhp θ gir resultatet

$$\tan 2\theta_{\text{maks}} = -\cot \alpha = \tan(\alpha + \pi/2) \quad \Rightarrow \quad \theta_{\text{maks}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}.$$

Dette innebærer at på flat mark ($\alpha = 0$), er $\theta_{\text{maks}} = 45^\circ$, i tråd med erfaringer.

Oppgave 4.



a. Legger inn et koordinatsystem med x langs elvebredden og y på tvers. I figuren til venstre er referansesystemet fast i elvebredden betegnet O, mens referansesystemet som følger elvestrømmen er betegnet O'.

Vannets hastighet $\mathbf{V} = V\hat{x}$ er gitt i system O. Båtens hastighet i system O' er som oppgitt

$$\mathbf{v}' = v'_x \hat{x} + v'_y \hat{y} = v' \cos \theta \hat{x} + v' \sin \theta \hat{y},$$

og båtens hastighet i system O er

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} = (v'_x + V)\hat{x} + v'_y\hat{y} = (v' \cos \theta + V)\hat{x} + v' \sin \theta \hat{y},$$

Hastighetskomponentene er altså

$$\underline{v_x = v' \cos \theta + V}; \quad \underline{v_y = v' \sin \theta}.$$

b. Tida det tar å ro til den andre elvebredden er gitt av y -hastigheten: $t_r = \frac{b}{v_y} = \frac{b}{v' \sin \theta}$. På denne tida vil båtens forskyvning langs elvebredden være gitt av hastigheten v_x :

$$x_1 = v_x t_r = (v' \cos \theta + V) \frac{b}{v' \sin \theta}. \quad (1)$$

Tida det tar å gå tilbake til punktet rett overfor startpunktet er $t_g = x_1/v_g$, vi har da (fornuftig nok) antatt $x_1 \geq 0$, dvs båten har drevet litt med elvestrømmen, evt treffer rett på. (Dersom $x_1 < 0$ vil $t_g = -x_1/v_g$.) Til sammen blir dette

$$t(\theta) = t_r + t_g = \frac{b}{v' \sin \theta} \left[1 + \frac{v'}{v_g} \cdot \cos \theta + \frac{V}{v_g} \right]. \quad (2)$$

c. Vi minimerer totaltiden med hensyn på roretningen:

$$\begin{aligned} \frac{dt(\theta)}{d\theta} &= \frac{-b \cos \theta}{v' \sin^2 \theta} [\dots] + \frac{b}{v' \sin \theta} \cdot \frac{v'(-\sin \theta)}{v_g} \\ &= -\frac{b}{v' \sin^2 \theta} \cdot \left[\left(1 + \frac{V}{v_g}\right) \cos \theta + \frac{v'}{v_g} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \right] = 0. \end{aligned}$$

Av dette følger at vinkelen som minimaliserer tida er gitt som

$$\cos \theta_{\min} = -\frac{v'/v_g}{1 + V/v_g} = -\frac{v'}{V + v_g}. \quad (3)$$

Med de oppgitte tallverdiene får en $\cos \theta_{\min} = -3/(2 + 5)$ som gir $\theta_{\min} = 115^\circ$. Et ikke urimelig resultat!

d. Men dersom vi setter $V = 0$, gir uttrykket $\cos \theta_{\min} = -v'/v_g$. Dette kan umulig være riktig! Dersom elva stopper opp (dersom vi rett og slett skal krysse stillestående vann) må det raskeste være å ro rett over! Altså: I dette tilfellet burde $\theta_{\min} = 90^\circ$ og $\cos \theta_{\min} = 0$. Men hvor resonerte vi feil i pkt **b** eller **c**?

Problemet ligger i forutsetningen $x_1 > 0$. Vi ser fra lign. (1) at dette gjelder bare dersom $v' \cos \theta + V > 0$ (siden b , v' og $\sin \theta$ alle er positive). Vi forutsetter altså $\cos \theta > -(V/v')$. Minimumsverdien $\cos \theta_{\min}$ i (3) er derfor bare gyldig dersom

$$-\frac{v'}{V + v_g} > -\frac{V}{v'} \quad \Rightarrow \quad v'^2 < V(V + v_g).$$

Hva skjer så dersom denne ulikheten for de oppgitte størrelsene ikke er oppfylt? For å forstå dette må vi gå tilbake til funksjonen $t(\theta)$ og ta høyde for at dette faktisk er *to* funksjoner. Den vi allerede har funnet, (2), er korrekt dersom vi lander *nedfor* målpunktet, slik at $x_1 > 0$. Denne funksjonen kaller vi heretter $t^+(\theta)$. Men vi trenger også $t^-(\theta)$, som svarer til at båten lander *ovenfor* det endelige målet tvers over elva. Da er som nevnt ovenfor $t_g = -x_1/v_g$ og $t^+(\theta)$ i lign. (2) blir erstattet av

$$t^-(\theta) = t_r + t_g = \frac{b}{v' \sin \theta} - \frac{x_1}{v_g} = \frac{b}{v' \sin \theta} \left[1 - \frac{v'}{v_g} \cdot \cos \theta - \frac{V}{v_g} \right]. \quad (4)$$

De to funksjonene møtes der $x_1 = 0$, dvs for vinkelen θ_s gitt av $v' \cos \theta_s + V = 0$, altså for vinkelen

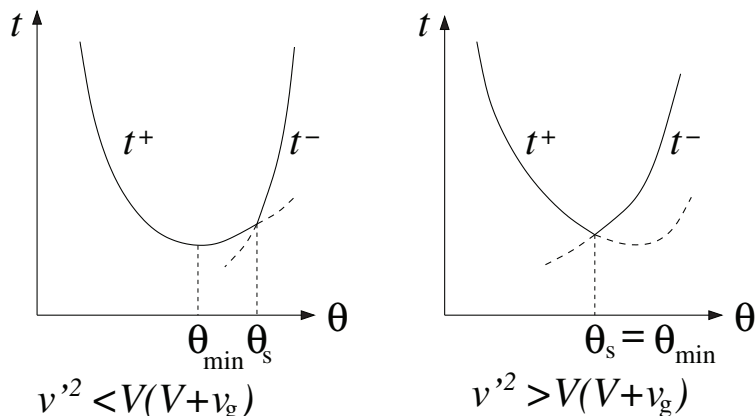
$$\cos \theta_s = -V/v'. \quad (5)$$

Skal dette ha mening, må $V < v'$. Dette har en åpenbar fysisk tolkning: Det er ikke mulig å havne rett over elva med en rofart som er mindre enn elvas strømningshastighet!

Figurene til høyre viser hva som skjer i de to parameterområdene.

Dersom $x_1 > 0$ og $v'^2 < V(V + v_g)$, er minimumstida gitt av minimum i funksjonen $t^+(\theta)$, med resultatet $\cos \theta_{\min} = -v'/(V + v_g)$ og $\theta_{\min} < \theta_s$. Minimum finnes på den konvensjonelle måten, ved å sette den deriverte lik null.

I parameterområdet der $v'^2 > V(V + v_g)$ er situasjonen kvalitativt annerledes. Der gir minimering av $t^+(\theta)$ et ufysikalsk resultat. Minimumstida er $t(\theta_s)$ der $t^+ = t^-$. Ingen av de to funksjonene som møtes i minimumspunktet har derivert lik null der.



Den fysikalske tolkningen av dette er at i *hele* parameterområdet $v'^2 > V(V + v_g)$ lønner det seg å ro rett over elva, direkte til målet, med vinkelen θ_s gitt av (5) mellom roretning og elvas strømmetning.

Eksemplet viser at minimering kan være en mer sammensatt prosess enn den konvensjonelle. Det gjelder å bruke hodet, og sjekke resultatene mot sunn fornuft. Om det kan være til noen trøst: Flere årskull studenter og lærere overså fullstendig det vi her har diskutert, og tok for gitt at resultatet under pkt c var *hele* svaret. Men den enkle sjekken vi foretok avslørte umiddelbart at det ikke kunne være tilfelle.