TFY4115 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2013.
Løsningsforslag til øving 10.

Oppgave 1.

Arbeidet mot det ytre trykket skjer ved konstant trykk, slik at dette blir

$$W = \int_{V_0}^{V} p\,dV = p(V - V_0) \simeq pV,$$

hvor vi har neglisjert volumet av vann, V_0, i forhold til volumet av vanndamp, V (ved 1 atm). Videre kan dampen med god tilnærmelse betraktes som en ideell gass, dvs $pV = nRT$. For n mol er fordampingsvarmen nL. Andelen av fordampingsvarmen som går med til arbeid mot det ytre trykket blir derfor (med $T = 100°\mathrm{C}$)

$$\frac{W}{nL} = \frac{nRT}{nL} = \frac{RT}{L} = \frac{8.314 \cdot 373}{40.7 \cdot 10^3} = 0.076 = 7.6\%.$$

Oppgave 2

For enatomig gass har vi $c_{pm} = 5R/2$ og $c_{Vm} = 3R/2$, slik at $\gamma = C_p/C_V = 5/3$. Langs adiabaten er det (pr definisjon) ingen varmeutveksling med omgivelsene, $Q_{ab} = 0$. Fra c til a er volumet konstant slik at det ikke utføres noe arbeid, $W_{ca} = 0$. Trykket økes, som betyr at temperaturen også øker. Altså øker gassens indre energi fra c til a, og denne energien må da komme fra tilført varme, dvs $Q_{ca} > 0$. Fra b til c komprimeres gassen (til halvt volum) ved konstant trykk ($p_c = p_b$). Det betyr at gassen har utført et negativt arbeid på omgivelsene, $W_{bc} < 0$. Det er videre klart at temperaturen i c er lavere enn i b, siden produktet pV er mindre i c enn i b (halvparten så stort). Følgelig er indre energi redusert fra b til c, og det er klart at $Q_{bc} = \Delta U_{bc} + W_{bc} < 0$, dvs varme avgitt til omgivelsene.

Virkningsgraden er pr definisjon lik forholdet mellom netto utført arbeid W og tilført varme Q_{ca},

$$\eta = \frac{W}{Q_{ca}} = \frac{Q_{ca} + Q_{bc}}{Q_{ca}},$$

der vi i siste overgang benyttet oss av at indre energi er en tilstandsfunksjon, slik at netto utført arbeid tilsvarer netto tilført varme. Her tilføres og avgis varme ved hhv konstant volum og konstant trykk, så vi har direkte

$$\begin{aligned} Q_{ca} &= C_V(T_a - T_c) = \frac{3}{2}nR(T_a - T_c), \\ Q_{bc} &= C_p(T_c - T_b) = -\frac{5}{2}nR(T_b - T_c). \end{aligned}$$

Vi har allerede slått fast at $p_b V_b = 2 p_c V_c$ slik at $T_b = 2T_c$. Langs adiabaten har vi

$$T_a V_a^{\gamma-1} = T_b V_b^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad T_a = T_b \left(\frac{V_b}{V_a}\right)^{\gamma-1} = 2^{\gamma-1}\,T_b,$$

dvs $T_a = 2^\gamma T_c$. Virkningsgraden blir følgelig

$$\eta = 1 + \frac{Q_{bc}}{Q_{ca}} = 1 - \frac{5}{3}\frac{T_b - T_c}{T_a - T_c} = 1 - \frac{5}{3}\frac{T_b/T_c - 1}{T_a/T_c - 1} = 1 - \frac{5}{3}\frac{2-1}{2^{5/3}-1} \simeq 0.23.$$

En Carnot-maskin som opererer mellom et varmt reservoar med temperatur T_a og et kaldt reservoar med temperatur T_c ville ha virkningsgraden

$$\eta_C = 1 - T_c/T_a = 1 - 2^{-5/3} \simeq 0.69,$$

som altså er maksimal teoretisk virkningsgrad.

Som nevnt i oppgaveteksten kan arbeidet bestemmes ved å integrere $p(V)dV$. Langs adiabaten må en da benytte seg av at pV^γ er konstant. Fra b til c blir arbeidet ganske enkelt $p_b(V_a - V_b)$. Dette gir totalt arbeid uttrykt ved p_bV_b, som med ideell gass tilstandsligning kan erstattes med nRT_b, og her kan nR uttrykkes ved γ og C_V. Men tilført varme vil, som ovenfor, i utgangspunktet være uttrykt ved T_a og T_c, så en kommer ikke utenom å uttrykke disse ved T_b, slik vi gjorde ovenfor.

Oppgave 3

Kraftverkets virkningsgrad er

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = \frac{W}{|Q_1| + W},$$

der Q_1 er avgitt varme som dumpes i elva. Oppgaven etterspør *effekter*, dvs energier pr tidsenhet, så la oss si at Q og W angir hhv varme og elektrisk energi (arbeid) pr tidsenhet, dvs varmeeffekt og elektrisk effekt. Vi løser ligningen ovenfor med hensyn på W og finner at kraftverket maksimalt kan levere en elektrisk effekt

$$W = \frac{\eta}{1-\eta}\,|Q_1| = \frac{0.4}{0.6} \cdot 1500\,\text{MW} = 1000\,\text{MW}.$$

Dette krever tilførsel av en varmeeffekt

$$Q_2 = W + |Q_1| = 2500\,\text{MW}.$$

Vannets spesifikke varmekapasitet kan skrives som

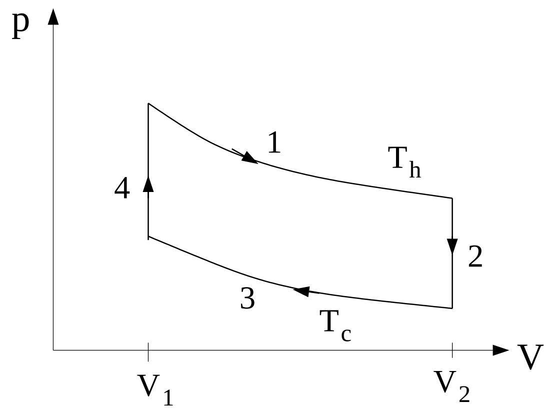
$$c = \frac{|Q_1|}{\Delta T \cdot M},$$

og hvis $|Q_1|$ her representerer varme pr tidsenhet, med enheten J/s, må M tilsvare forbipassert masse vann pr tidsenhet, med enheten kg/s. Nødvendig vannføring for å begrense ΔT til 5 K blir derfor

$$M = \frac{|Q_1|}{c \cdot \Delta T} = \frac{1500 \cdot 10^6\,\text{J/s}}{4184\,\text{J/kgK} \cdot 5\,\text{K}} \simeq 71.7 \cdot 10^3\,\text{kg/s} \simeq 72\,\text{tonn/s}.$$

Oppgave 4

a) Den ideelle Stirling-syklusen er framstilt i et pV-diagram i figuren til høyre. I trinn 1 utvides gassen isotermt ved temperatur T_h. Gassen gjør et positivt arbeid W_1 på omgivelsene og mottar varmen $Q_1 = Q_h$ fra det varme reservoaret. Med en ideell gass er indre energi kun avhengig av temperaturen, $U = U(T)$, slik at $W_1 = Q_1$.



I trinn 2 er gassens volum konstant slik at $W_2 = 0$. Temperaturen, og dermed indre energi U, avtar, samtidig som at varme $|Q_2|$ avgis til omgivelsene (dvs negativ varme Q_2 mottas fra omgivelsene). I trinn 3 presses gassen sammen ved temperatur T_c. Omgivelsene gjør et arbeid $|W_3|$ på gassen som tilsvarer varmen

$|Q_3| = |Q_c|$ som avgis fra gassen til det kalde reservoaret (dvs negativ varme Q_3 mottas fra omgivelsene). I trinn 4 gjøres intet arbeid, $W_4 = 0$, og varme Q_4 mottas fra omgivelsene mens temperaturen øker fra T_c til T_h.

b) Virkningsgraden er, som alltid, definert som forholdet mellom nytte og kostnad, i dette tilfellet

$$\eta_S = \frac{W}{Q_1 + Q_4} = \frac{W_1 + W_3}{Q_1 + Q_4} = \frac{Q_1 + Q_3}{Q_1 + Q_4}.$$

Her er

$$\begin{aligned}
W_1 &= \int_{V_1}^{V_2} p\, dV = nRT_h \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1, \\
W_3 &= \int_{V_2}^{V_1} p\, dV = nRT_c \ln \frac{V_1}{V_2} = -nRT_c \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_3, \\
Q_4 &= C_V\,(T_h - T_c) = \frac{5}{2}\, nR\,(T_h - T_c),
\end{aligned}$$

slik at

$$\eta_S = \frac{(T_h - T_c)\ln(V_2/V_1)}{T_h \ln(V_2/V_1) + (5/2)(T_h - T_c)} = \frac{1 - T_c/T_h}{1 + (5/2)(1 - T_c/T_h)/\ln(V_2/V_1)} < 1 - \frac{T_c}{T_h} = \eta_C.$$

Dvs: Uten en ideell regenerator vil Stirling-maskinen ha en virkningsgrad som er mindre enn virkningsgraden til en reversibel Carnot-maskin.

c) Dersom varme avgitt til regeneratoren (Q_2) fås tilbake, uten kostnad, som Q_4, blir kostnaden kun Q_1. Stirling-maskinens virkningsgrad blir da

$$\eta_S = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_3}{Q_1} = 1 + \frac{Q_3}{Q_1} = 1 - \frac{T_c}{T_h} = \eta_C.$$

Oppgave 5

a. B. Konstant temperatur ved smelting (1.5 tidsintervaller) og ved fordampning (2.5 tidsintervaller) gir $L_s/L_f = 1.5/2.5 = 0.6$.

b. B. W = omsluttet areal.

c. D. Q og W er prosessvariable, U er tilstandsvariabel.

d. C. En isoterm fra tilstand a er brattere enn isobaren ab men slakere enn adiabaten ac. Dermed: $T_b > T_a > T_c$.