

TFY4115 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2013.
Løsningsforslag til øving 12.

1) Bruker at for ideell gass er $C_p - C_V = Nk_B$, og setter inn $V = Nk_B T/p$ og $V_0 = Nk_B T_0/p_0$, dvs $V/V_0 = (T/p)/(T_0/p_0)$:

$$\begin{aligned} S &= (C_p - Nk_B) \ln(T/T_0) + Nk_B \ln((T/p)/(T_0/p_0)) + S_0 \\ &= C_p \ln(T/T_0) - Nk_B \ln(T/T_0) + Nk_B \ln(T/T_0) - Nk_B \ln(p/p_0) + S_0 \\ &= C_p \ln(T/T_0) - Nk_B \ln(p/p_0) + S_0 \end{aligned}$$

Dermed er **B** rett svar.

2) Her kan vi neglisjere endringer i volumet og dermed bruke $dS = C dT/T$:

$$\Delta S_{\text{vann}} = C \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T} = C \ln(T_1/T_0).$$

Riktig svar blir da **D**.

3) Varmereservoaret har (uendelig) stor varmekapasitet, slik at temperaturen ikke endres selv om varme fjernes eller tilføres. Varmen som ble tilført vannet i oppgave 2 er $Q = C(T_1 - T_0)$, positiv hvis T_1 er større enn T_0 og vice versa. Dette må da, pga energibevarelse, være varmen som varmereservoaret avgir, ved den konstante temperaturen T_1 . Dermed:

$$\Delta S_{\text{res}} = -Q/T_1 = C(T_0 - T_1)/T_1.$$

Riktig svar: **A**.

4) Prosessen som beskrives i oppgave 2 er en naturlig, spontan prosess, som dermed er irreversibel. Da *vet* vi at den totale entropiendringen er *positiv* – 2. hovedsetning. Rett svar er altså **A**.

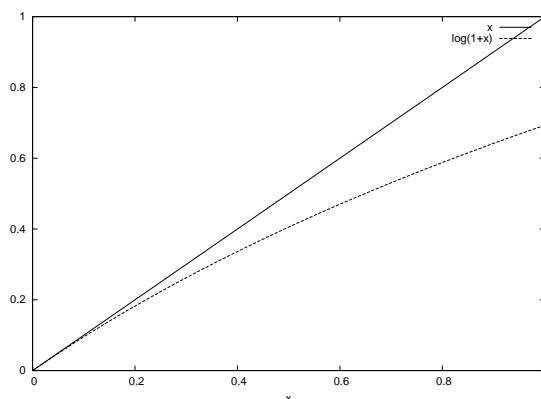
Det er kanskje ikke umiddelbart innlysende at

$$\Delta S_{\text{tot}} = C \ln(T_1/T_0) + C(T_0 - T_1)/T_1$$

alltid er en positiv størrelse (evt null dersom $T_0 = T_1$, dvs likevekt mellom vann og reservoar i utgangspunktet), men hvis vi innfører $x = (T_0 - T_1)/T_1 = T_0/T_1 - 1$, har vi

$$\Delta S_{\text{tot}} = C[x - \ln(1+x)],$$

og x er alltid større enn (eller lik) $\ln(1+x)$:



5) I et system med temperatur T og mulige (tillatte) energinivåer E_j ($j = 1, 2, 3, \dots$) er sannsynligheten for at en gitt partikkel har energi E_j lik

$$\pi_j = \frac{1}{Z} e^{-E_j/k_B T},$$

med partisjonsfunksjonen (tilstandssummen)

$$Z = \sum_j e^{-E_j/k_B T},$$

slik at total sannsynlighet blir normert. Med de to tillatte energiverdiene $\pm E_0$ blir

$$Z = e^{E_0/k_B T} + e^{-E_0/k_B T} = 2 \cosh(E_0/k_B T),$$

slik at sannsynligheten for at en gitt partikkel har energi E_0 blir

$$\pi_+ = \exp(-E_0/k_B T) / [2 \cosh(E_0/k_B T)],$$

dvs rett svar blir **A**.

(Og sannsynligheten for energi $-E_0$ blir

$$\pi_- = \exp(E_0/k_B T) / [2 \cosh(E_0/k_B T)].)$$

6) Midlere energi pr partikkel er

$$\langle E \rangle = \sum_j E_j \pi_j = \frac{-E_0 \exp(E_0/k_B T) + E_0 \exp(-E_0/k_B T)}{2 \cosh(E_0/k_B T)} = -E_0 \frac{2 \sinh(E_0/k_B T)}{2 \cosh(E_0/k_B T)} = -E_0 \tanh(E_0/k_B T).$$

Med N partikler blir dermed systemets indre energi

$$U = N \cdot \langle E \rangle = -N E_0 \tanh(E_0/k_B T),$$

og rett svar er **D**.

7) For lave temperaturer, dvs $k_B T \ll 2E_0$, er det for lite tilgjengelig termisk energi til å eksitere partikler fra tilstanden med energi $-E_0$ (grunntilstanden) til tilstanden med energi E_0 . Da hjelper det ikke å øke temperaturen litt, fra T til $T + \Delta T$, dvs indre energi forandrer seg likevel ikke. Dette betyr at varmekapasiteten $C = \Delta U / \Delta T$ er null for lave temperaturer. Dermed kan vi utelukke alternativene B og D.

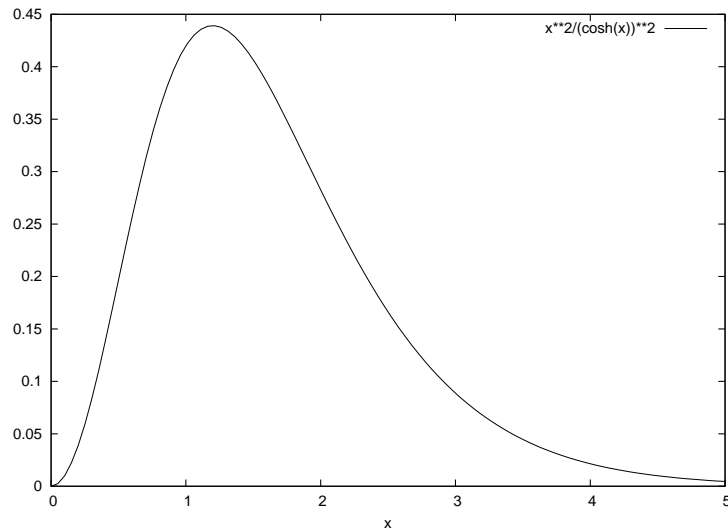
For riktig høye temperaturer, dvs $k_B T \gg 2E_0$, må også varmekapasiteten være tilnærmet lik null. Da er sannsynlighetene π_- og π_+ for at en gitt partikkel har energi hhv $-E_0$ og E_0 like store (dvs begge lik $1/2$), og midlere energi pr partikkel er lik null. En økning i temperaturen, fra T til $T + \Delta T$, vil ikke endre på dette - det er fortsatt like stor sannsynlighet for begge energier, og indre energi forandres ikke.

Med $C \rightarrow 0$ både for $T \rightarrow 0$ og for $T \rightarrow \infty$ må C ha et maksimum for en eller annen verdi av temperaturen, og kurve **C** må være den riktige. Maksimal C har vi når termisk energi $k_B T$ er omtrent lik E_0 . Da får vi "best betalt" for å øke temperaturen littegrann.

Det er ingen heksekunst å regne ut varmekapasiteten,

$$C = \frac{dU}{dT} = N k_B \frac{(E_0/k_B T)^2}{\cosh^2(E_0/k_B T)},$$

med $d(\tanh x)/dx = 1/\cosh^2 x$ samt kjerneregel $d(E_0/k_B T)/dT = -E_0/k_B T^2$. Plotter vi funksjonen $x^2/\cosh^2 x$, ser vi at maksimum er ved $x \simeq 1.2$:

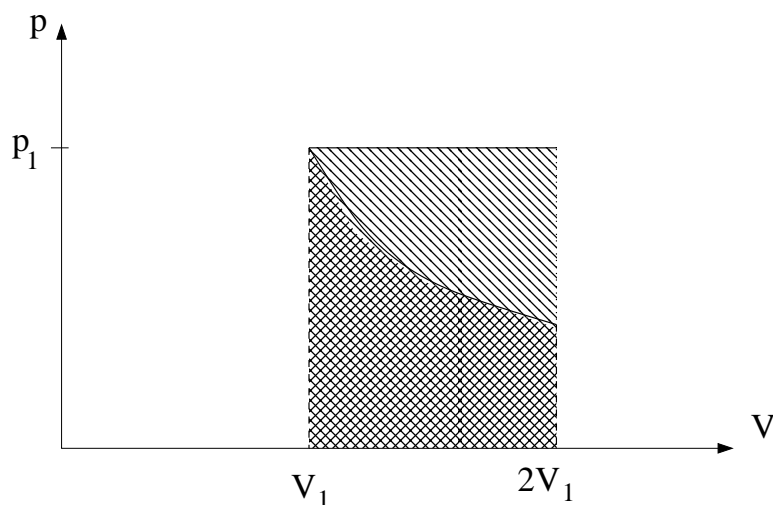


Kommentarer: Hva skal en slik leketøysmodell være godt for, kan en kanskje spørre seg. Modellen har faktisk betydelig relevans: Den representerer første steg på vei mot en beskrivelse og forståelse av magnetiske egenskaper til ulike materialer. I mange (men ikke alle) materialer har atomene et såkalt *spinn* eller *magnetisk dipolmoment*, som i et ytre magnetfelt nettopp vil gi et av to mulige bidrag til systemets indre energi. Modellen i oppgave 5 - 7, med uavhengige partikler, er direkte relevant for *paramagnetiske* materialer, som f.eks. aluminium og magnesium. Utvider vi modellen og inkluderer vekselvirkning mellom partiklene, blir den i stand til å beskrive *ferromagnetiske* materialer, som f.eks. jern, kobolt og nikkel.

8) Partiklenes midlere kinetiske energi, $\langle K \rangle = m\langle v^2 \rangle / 2$, er proporsjonal med systemets temperatur T . En halvering av T betyr derfor en halvering av $\langle v^2 \rangle$, dvs v_{rms} reduseres med faktoren $1/\sqrt{2} \simeq 0.7$, en reduksjon på ca 30 prosent. **C**.

9) Produktet pV er uendret hvis trykket dobles og volumet halveres. Da er også temperaturen uendret, som igjen betyr at v_{rms} er uendret. **B**.

10) Det isoterme arbeidet W_0 tilsvarer det "dobbeltskraverte" arealet i figuren nedenfor, mens arbeidet W_1 utført ved konstant trykk p_1 tilsvarer hele det skraverte arealet. Vi ser at $W_1 > W_0$, og **A** er riktig svar.



11) Tilførsel av varme ved konstant trykk betyr at gassen utfører et positivt arbeid på omgivelsene (f.eks. hele det skraverte arealet i forrige oppgave). Da blir gassens økning i indre energi mindre enn tilført varme. **B**.

12) Siden temperaturen er proporsjonal med molekylens midlere kinetiske energi, må $\langle K \rangle$ være den samme for både oksygen- og nitrogenmolekylene. Oksygen har større molekylmasse (ca 32 u) enn nitrogen (ca 28 u), så nitrogenmolekylene har i gjennomsnitt noe større hastighet enn oksygenmolekylene. (Her er u lik en atomær masseenheter, ca $1.66 \cdot 10^{-27}$ kg.) **D**.

13) Virkningsgraden til Carnot-varmepumpa er

$$\varepsilon_V^c = |Q_2|/|W| = |Q_2|/(|Q_2| - |Q_1|) = T_2/(T_2 - T_1) = 303/40,$$

så den forbruker

$$|W| = |Q_2|/\varepsilon_V^c = 2.0 \cdot 40/303 \simeq 0.26,$$

dvs 0.26 kW elektrisk energi (effekt). **A**.

14) En Carnot-prosess består av to isotermer og to isentropiske prosesser, dvs med hhv T konstant og S konstant. Dermed et rektangel i et (S, T) -diagram. **A**.

15) Dreieimpulsen er kvantisert, $L^2 = l(l+1)\hbar^2$, med $l = 0, 1, 2, \dots$ og $\hbar = h/2\pi$ Plancks ("reduuerte") konstant. Overgangstemperaturen T_{rot} blir dermed omvendt proporsjonal med molekylets treghetsmoment I , som stiger i rekkefølgen $\text{H}_2 - \text{HCl} - \text{Cl}_2$. Dvs, T_{rot} *avtar* i denne rekkefølgen. **B**. Omtrentlige verdier for T_{rot} er hhv 88, 15 og 0.4 K for disse tre molekylene.