TFY4115 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2013.
Løsningsforslag til øving 2.

Oppgave 1.

a. Vinkelakselerasjonen er gitt som

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega(T)}{dT}\frac{dT}{dt} = -\frac{2\pi}{T^2}\cdot\frac{dT}{dt}, \tag{1}$$

der T er perioden. Med de oppgitte tallene blir dette

$$\alpha = -\frac{2\pi}{(0.033)^2\,\mathrm{s}^2}\cdot\frac{38\cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}}{24\cdot 3600\,\mathrm{s}} = -2.538\cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}^{-2} = \underline{-2.5\cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}^{-2}}.$$

b. Med konstant (her: negativ) vinkelakselerasjon er $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$, der $\omega_0 = \omega(0) = 2\pi/T(0) = 190.4\,\mathrm{s}^{-1}$. Rotasjonen stopper (dersom α virkelig holder seg konstant!) ved tida τ:

$$\omega(\tau) = \omega_0 + \alpha\tau = 0 \tag{2}$$

som gir

$$\tau = \frac{\omega_0}{-\alpha} = \frac{190.4\,\mathrm{s}^{-1}}{2.508\cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}^{-2}} = 7.50\cdot 10^{10}\,\mathrm{s} = 2378\,\text{år}.$$

Rotasjonen vil altså opphøre i år 2013 + 2378 = 4391. Perioden T er oppgitt med kun 2 sifre, slik at vi bør oppgi svaret som <u>ca. år 4400</u>.
På den annen side: dersom det *ikke* er vinkelakselerasjonen som er konstant, men *økningen i perioden* (oppgitt som 38 ns pr døgn) som er konstant, vil rotasjonen *aldri* opphøre, fordi grensen $T \to \infty$ aldri nåes. Eller sett på annen måte: Likn. (1) viser at med konstant $\frac{dT}{dt}$ vil α bli mindre og mindre når T øker, og vi vil aldri kunne få oppfylt ligningen (2).

c. Vi antar som oppgitt i b at vinkelakselerasjonen er konstant, og finner (med $\Delta t = 1054 - 2013 = -959\,\text{år}$),

$$\omega(1054) = \omega_0 + \alpha\Delta t = 190.4\,\mathrm{s}^{-1} - 2.538\cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}^{-2}(-959\cdot 365.25\cdot 24\cdot 3600\,\mathrm{s}) = 267\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Derved er

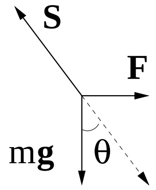
$$T(1054) = \frac{2\pi}{\omega(1054)} = 0.0235\,\mathrm{s} = \underline{0.024\,\mathrm{s}}.$$

Hvis vi alternativt antar at den oppgitte økningen i perioden pr døgn er konstant, blir regningen enklere:

$$T = T_0 + \frac{dT}{dt}\cdot\Delta t = 0.033\,\mathrm{s} + 38\,\frac{\mathrm{ns}}{\text{døgn}}\cdot(-959\cdot 365.25\text{døgn}) = 0.0197\,\mathrm{s} = \underline{0.020\,\mathrm{s}}.$$

Oppgave 2.

a)



Vi har her et eksempel på statisk likevekt. Newtons 2. lov gir da at $\boldsymbol{F} + m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{S} = 0$, dvs $\boldsymbol{F}$ og $m\boldsymbol{g}$ balanseres av strekket i stanga, $\boldsymbol{S}$, som peker *langs stanga*. (Hvor opplagt er egentlig det...?) Dermed må også summen av $\boldsymbol{F}$ og $m\boldsymbol{g}$ peke langs stanga, som vist på figuren. Derav følger at

$$\tan\theta = \frac{F}{mg} \qquad \Rightarrow \qquad F = mg\tan\theta.$$

b) Kula roterer i horisontalplanet. Det er ingen bevegelse vertikalt, og dermed heller ingen akselerasjon vertikalt. Dermed må vertikalkomponenten av strekket i stanga, $S\cos\theta$, akkurat balansere tyngdekraften mg. Horisontalt er det kun horisontalkomponenten av strekket i stanga, $S\sin\theta$, som virker på kula. Dette må derfor også være lik sentripetalkraften $mv^2/r = m\omega^2 r$ som holder kula i sirkulær bane. Vi har altså de to ligningene

$$\begin{aligned} S\cos\theta &= mg, \\ S\sin\theta &= m\omega^2 r = m\omega^2 L\sin\theta, \end{aligned}$$

og eliminasjon av S (ved å dele den første ligningen med den andre) gir

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 L} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arccos\frac{g}{\omega^2 L}.$$

Vi vet at $|\cos\theta| \leq 1$. Med gitt verdi for L (og g) må derfor ω være større enn minimumsverdien

$$\omega_{\min} = \sqrt{g/L}$$

for at stanga og kula skal rotere med vinkel $\theta > 0$. Hvis systemet roterer med $\omega \leq \omega_{\min}$, vil stanga og kula henge rett ned. Helt til slutt kan vi jo registrere at meget rask rotasjon, $\omega \gg \sqrt{g/L}$, gir $\cos\theta \simeq 0$, dvs $\theta \simeq \pi/2$, og stanga peker praktisk talt horisontalt utover. Ikke uventet!

c) Kula og flyet har lik akselerasjon a, ellers ville vinkelen θ forandre seg. Kulas situasjon er den samme som i spm a, bortsett fra at det *ikke* virker noen kraft $\boldsymbol{F}$ rettet mot høyre. Vertikal kraftbalanse (pga ingen bevegelse og dermed heller ingen akselerasjon vertikalt) gir

$$S\cos\theta = mg.$$

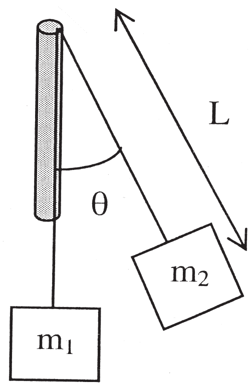
Horisontalt er det horisontalkomponenten av strekket i stanga, $S\sin\theta$, som virker på kula, og som gir kula en lineær akselerasjon a:

$$S\sin\theta = ma.$$

Divisjon av den siste med den første eliminerer S og gir

$$\tan\theta = a/g \qquad \Rightarrow \qquad a = g\tan\theta = 9.81/\sqrt{3} = 5.7\,\mathrm{m/s^2}.$$

Oppgave 3.



a. Forholdene for m_2 er som for m i oppgaven ovenfor, og vi kunne ha henvist til ligninger der. Men vi gjør her en uavhengig analyse:
Massen m_1 skal være i ro, og uten friksjon må da snordraget være $S = m_1 g$. På massen m_2 virker både vertikale og horisontale krefter. Vertikalt må snordraget utbalansere tyngden av m_2. Dette gir ligningen $S\cos\theta = m_2 g$, og derved er θ gitt av

$$\cos\theta = \frac{m_2 g}{S} = \frac{m_2 g}{m_1 g} = \frac{m_2}{m_1}.$$

b. Horisontalt må snordraget sørge for den kraften som skal til for å holde m_2 i en sirkelbane med radius $r = L\sin\theta$. Dette gir

$$S\sin\theta = m_2\,\omega^2 L\sin\theta = m_2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 L\sin\theta.$$

Vi løser for L og setter inn $S = m_1 g$:

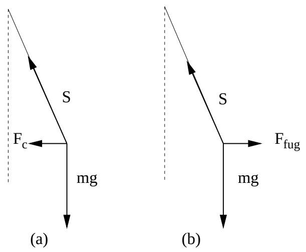
$$L = \frac{S}{m_2}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \underline{\frac{m_1}{m_2}\frac{gT^2}{4\pi^2}}.$$

c. Med de oppgitte tallene finner vi at

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{m_2}{m_1} = \frac{2.0}{4.0} \quad \Rightarrow \quad \underline{\theta = 60^\circ}. \\ L &= \frac{4.0}{2.00}\cdot\frac{9.81\,\mathrm{m/s^2}\cdot(1.00\,\mathrm{s})^2}{4\pi^2} = 0.497\,\mathrm{m} = \underline{0.50\,\mathrm{m}}. \end{aligned}$$

d. Hvis lengden er større enn den funne likevektslengden, vil snordraget nødvendig for å holde m_2 i rotasjon bli for stort. Altså dras m_2 nedover mens m_1 trekkes oppover, lengden L øker ytterligere. Hvis lengden er mindre enn likevektsverdien for L, blir snordraget for lite og m_2 dras nærmere toppen, L minker videre. Den dynamiske "likevekten" er altså ikke påfallende stabil. Tvertimot!
Friksjon mot øvre kant av røret bedrer stabiliteten: Tauet vil ligge an mot kanten over en vinkel som i beste fall er $\pi - \theta$. Friksjon over en kant med statisk friksjonskoeffisient μ er beskrevet i Hauge & Støvneng, kap. 2.3.3, og i forelesningene. I dette tilfelle blir friksjonskraften ca $m_1 g \cdot \exp\{\mu(\pi - \theta)\}$. Dette vil derfor gjøre underverker for stabiliteten!

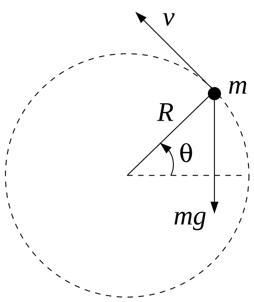
Noen tanker om sentrifugalkraft og sentripetalkraft i denne sammenhengen:



Det er nærliggende å la seg forvirre av sentripetal- kontra sentrifugalkrefter. Valget mellom de to er et valg av koordinatsystem, og vi kan bruke denne oppgaven til å illustrere dette. Vi henviste til sentripetalkraften i resonnementet ovenfor. Det innebærer at vi resonnerte fra *det stasjonære (lab)koordinatsystemet*, og illustrasjonen blir som (a) i figuren til venstre: Kreftene som virker er snordraget $\boldsymbol{S}$ og vekta $m\boldsymbol{g}$, og Newton 2 sier at summen av disse er akselererende kraft: $\boldsymbol{S} + m\boldsymbol{g} = m\boldsymbol{a}_c$, og vi kaller ofte $m\boldsymbol{a}_c = \boldsymbol{F}_c$ for sentripetalkraften.

Men vi kunne også ha valgt å legge oss i massens eget (roterende) koordinatsystem, som i (b) i figuren. Dette systemet er ikke et inertialsystem, og en ekstrakraft må innføres pga systemets akselerasjon. Dette er sentrifugalkraften $F_{\text{fug}} = mv^2/r$, som peker radielt utover. I dette systemet er massen i ro, og vektorsummen av kreftene må være null: $\boldsymbol{S} + m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_{\text{fug}} = 0$. Fysikken, og svarene, er uavhengig av hvilket koordinatsystem som velges! Valget er et spørsmål om hensiktsmessighet. Vi liker som regel best å velge et inertialsystem der Newton 2 gjelder uten tilleggskrefter. Men i dette tilfellet ser du at det er hipp som happ hva som velges.

Oppgave 4.



a. Steinens vekt gir følgende kraftkomponent tangentielt til sirkelbuen, regnet positiv i positiv θ-retning: $-mg\cos\theta$. Akselerasjonen i tangentialretning er $a_\text{t} = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}$. Derved får Newtons 2. lov formen

$$-mg\cos\theta = m \cdot R\frac{d\omega}{dt} \quad\Rightarrow\quad \underline{R\frac{d\omega}{dt} = -g\cos\theta,}$$

som vi skulle vise.

Kjerneregelen for $\omega(\theta(t))$ gir

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\cdot\omega.$$

Derved har vi funnet følgende separable differensialligning for $\omega(\theta)$:

$$\underline{R\,\omega\,d\omega = -g\cos\theta\,d\theta}.$$

b. Løsningen ved å integrere fra starttilstand $\theta = 0$; $\omega = \omega_0$ til vilkårlig tilstand θ; ω:

$$R\int_{\omega_0}^{\omega}\omega\,d\omega = -g\int_0^{\theta}\cos\theta\,d\theta \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}R(\omega^2 - \omega_0^2) = -g\cdot\sin\theta \quad\Rightarrow\quad \underline{\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{2g}{R}\cdot\sin\theta.}$$

c. Snordraget S må, sammen med komponenten av steinens vekt radielt innover mot sirkelens sentrum, gi den sentripetalkraften som holder steinen i sirkelbane:

$$S + mg\sin\theta = mR\omega^2 = mR\omega_0^2 - 2mg\sin\theta \quad\Rightarrow\quad \underline{S(\theta) = mR\omega_0^2 - 3mg\sin\theta}.$$

Med grunnleggende kjennskap til sinusfunksjonen kan vi slutte at $S = S_{\max}$ når $\sin\theta = -1$, det vil si når $\theta = \frac{3}{2}\pi \pm n\cdot 2\pi$, der n er et heltall. Dette er helt i tråd med sunn fornuft: Strekket i snora blir størst når massen er rett under sirkelens sentrum.
Sunn fornuft samt ligningen for $S(\theta)$ tilsier at snordraget er minst på toppen, når $\sin\theta = 1$ og $\theta = \frac{1}{2}\pi \pm n\cdot 2\pi$. Da er $S_{\min} = mR\omega_0^2 - 3mg$. Kravet til strukket snor er $S_{\min} > 0$ som gir $\omega_0^2 > 3g/R$.

Oppgave 5.

a) Siden partikkelen følger en sirkulær bane, vil det alltid være en komponent av akselerasjonen rettet inn mot sirkelens sentrum (sentripetalakselerasjonen). Her øker dessuten hastigheten, så akselerasjonen må også ha en komponent tangentielt til sirkelbanen. Vektorsummen av normal- og tangentialkomponenten blir en total akselerasjon $\boldsymbol{a}$ med retning på skrå innover, som i B.

b) Legemet beveger seg med konstant positiv hastighet til å begynne med, deretter bremses det ned, før det snur og til slutt beveger seg med konstant negativ hastighet. Konstant fart betyr null akselerasjon, nedbremsing betyr negativ akselerasjon. Figur C passer bra med dette.

c) Prosjektil A er lengst tid i lufta. Vertikalbevegelsen, $z(t)$, beskrives ved

$$z(t) = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2,$$

jf oppgave 2. Landingstidspunktet er gitt ved $z = 0$, dvs $t = 2v_{0z}/g$. Med andre ord, lengre tid i lufta jo større vertikalkomponent av starthastigheten v_0.