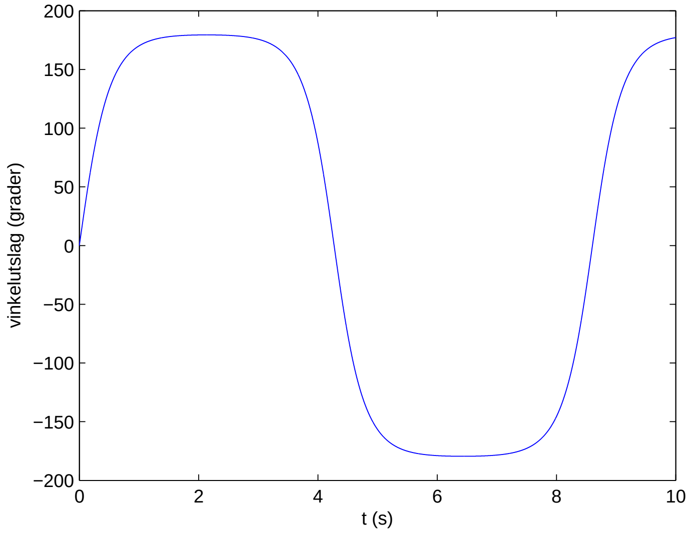
TFY4115 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2013.
Løsningsforslag til øving 4.

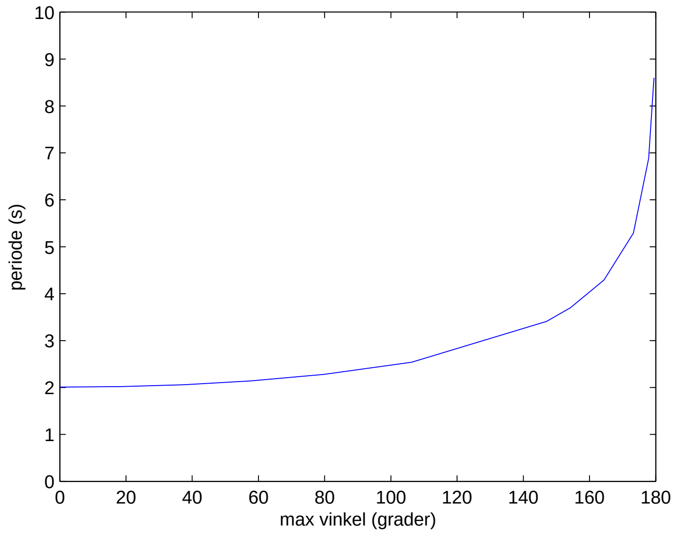
Oppgave 1.

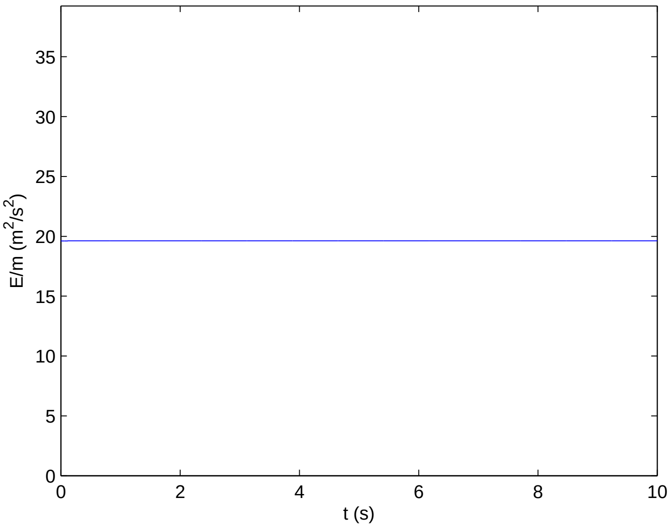
Ved å kjøre MATLAB- eller PYTHON-programmet (med $g = 9.81$ m/s^2 og $L = 1$ m) for verdier av v_0 mellom f.eks. 0.01 og 6.2641 m/s ser vi at svingeperioden T er praktisk talt konstant, og omtrent lik 2 s, så lenge maksimalt vinkelutslag α_{max} er lite. Når α_{max} blir større, ser vi at T begynner å avvike fra denne verdien. Hvis starthastigheten er slik at $v_0^2/2 = 2gL$, dvs $v_0 = 2\sqrt{gL}$, vil pendelen nå toppen, $\alpha = \pi$, med null hastighet. Det tilsvarer at perioden $T \to \infty$. For større v_0 enn dette har vi nok mekanisk energi til å passere toppen, og pendelen svinger rundt og rundt. Mekanisk energi pr masseenhet er

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}v^2 + gL(1 - \cos\alpha).$$

Plotting av denne størrelsen viser at den er konstant. Figurer (1. og 3. figur med $v_0 = 6.2641$ m/s):







Oppgave 2.

a) Med utsving x fra likevektsstilling er kraften på massen m de to fjærkreftene $-k_1x$ og $-k_2x$. N2 gir svingeligningen

$$-k_1x - k_2x = m\ddot{x} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} + \left(\frac{k_1}{m} + \frac{k_1}{m}\right)x = 0\,.$$

Sammenligning med "standardligningen" $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ gir at svingefrekvensen ω er gitt av

$$\omega^2 = \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} = \omega_1^2 + \omega_2^2, \quad \text{alts} \quad \underline{\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}\,.$$

Sammenligning med $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ viser også at effektiv fjærstivhet for parallellkoblede fjærer er $k = k_1 + k_2$.

b) Når m forskyves x mot høyre, strekkes fjærene x_1 og x_2, og disse er ulike dersom $k_1 \neq k_2$. Kraften F på massen m forplanter seg gjennom begge fjærene med samme strekk (N3 og masseløse fjærer). Dermed er $F = -k_1x_1 = -k_2x_2$, som gir $x = x_1 + x_2 = -\left(1/k_1 + 1/k_2\right)F$. Dermed er kraften som virker på klossen lik

$$F = -\frac{1}{1/k_1 + 1/k_2}x = -\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}x$$

og N2 gir

$$-\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}x = m\ddot{x} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} + \frac{k_1k_2}{(k_1 + k_2)m}x = 0\,.$$

Sammenligning med $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ gir at svingefrekvensen ω er gitt av

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{(k_1 + k_2)m}{k_1k_2} = \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_1^2} = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_1^2\omega_2^2}\,, \quad \text{alts} \quad \underline{\omega = \frac{\omega_1\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}}.$$

Sammenligning med $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ viser også at effektiv fjærstivhet for seriekoblede fjærer er $k = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$.

c) Med utsving x fra likevektsstilling vil høyre fjær k_2 presses sammen x og gi en kraft $-k_2x$ mot venstre på massen. Venstre fjær vil strekkes x og gi en kraft $-k_1x$ mot venstre. Kreftene er altså de samme som i a), og $\underline{\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$.

Oppgave 3.

a) Hastigheten v_1 til kule 1 like før kollisjonen finnes lettest ved å bruke energibevarelse:

$$\begin{aligned} m_1 g L &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \\ \Rightarrow v_1 &= \sqrt{2gL} \end{aligned}$$

Like før støtet antar vi at snora er vertikal, og dermed er det bare vertikale krefter som virker. Kun snordraget S_1 (oppover) og tyngden $m_1 g$ (nedover) virker på kule 1, og Newtons 2. lov gir

$$\begin{aligned} S_1 - m_1 g &= m_1 a = m_1 \frac{v_1^2}{L} = 2m_1 g \\ \Rightarrow S_1 &= m_1 g + 2m_1 g = 3m_1 g \end{aligned}$$

b) Etter et fullstendig uelastisk støt vil kulene henge sammen. I kollisjonen er impulsen bevart, men ikke energien. Impulsbevarelse gir felleshastigheten $v_1' = v_2' = v'$ etter støtet:

$$\begin{aligned} p &= p' \\ \Rightarrow m_1 v_1 &= (m_1 + m_2) v' \\ \Rightarrow v' &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gL} \end{aligned}$$

Etter kollisjonen svinger kulene til venstre opp til en posisjon i høyde h. Energibevarelse for denne delen av bevegelsen gir

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) g h &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2)(v')^2 \\ \Rightarrow h &= \frac{(v')^2}{2g} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 L \end{aligned}$$

Snora når med andre ord ikke opp til horisontal stilling og er helt sikkert stram.

c) Energien etter støtet er

$$(m_1 + m_2) g h = g \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} L$$

mens den før støtet var $m_1 g L$. Forholdet blir dermed

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

d) I et elastisk støt er også energien bevart. Hastighetene v_1' og v_2' etter støtet er gitt av de to ligningene:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 v_1' + m_2 v_2' \qquad \text{(impulsbevarelse)} \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 &= \frac{1}{2} m_1 (v_1')^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2')^2 \qquad \text{(energibevarelse)} \end{aligned}$$

En effektiv måte å løse disse to ligningene på er (som antydet i forelesningene) å skrive

$$\begin{aligned} m_1 (v_1 - v_1') &= m_2 v_2' \\ m_1 (v_1^2 - (v_1')^2) &= m_2 (v_2')^2 \end{aligned}$$

og deretter dividere den siste med den første. Det gir $v_1 + v_1' = v_2'$. Dette innsatt i ligningen for impulsbevarelse lar oss eliminere v_2', og vi finner

$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 v_1' + m_2 (v_1 + v_1') \\ \Rightarrow v_1' &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \end{aligned}$$

Dermed:

$$v_2' = v_1 + v_1' = v_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

(Positive fartsretninger mot venstre.)

e) Det kritiske punktet for kule 2 er toppen. Med v_2'' for hastigheten til kule 2 i toppunktet gir N2 her:

$$\sum F = m_2 a \qquad \Rightarrow \qquad S_2'' + m_2 g = m_2 (v_2'')^2 / L \qquad \Rightarrow \qquad S_2'' = m_2 (v_2'')^2 / L - m_2 g.$$

Dersom snora ikke skal slakkes, må snorkrafta S_2'' være større enn null, m.a.o.

$$(v_2'')^2 > gL.$$

Energibevarelse fra bunnpunkt til toppunkt for kule 2 bestemmer v_2'' uttrykt ved v_2' og L:

$$\frac{1}{2} m_2 (v_2')^2 = \frac{1}{2} m_2 (v_2'')^2 + m_2 g \cdot 2L \qquad \Rightarrow \qquad (v_2'')^2 = (v_2')^2 - 4gL.$$

Et uttrykk for v_2' har vi ovenfor. Dermed:

$$4v_1^2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 - g \cdot 4L > gL \qquad \Rightarrow \qquad \frac{m_1}{m_1 + m_2} > \sqrt{\frac{5gL}{4v_1^2}} \qquad \Rightarrow \qquad 1 + \frac{m_2}{m_1} < \sqrt{\frac{4v_1^2}{5gL}}$$

Ovenfor har vi v_1 uttrykt ved g og L, som vi setter inn:

$$\frac{m_2}{m_1} < \sqrt{\frac{4 \cdot 2gL}{5gL}} - 1 = \sqrt{\frac{8}{5}} - 1,$$

dvs

$$\frac{m_1}{m_2} > \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8} - \sqrt{5}}.$$

Oppgave 4.

a) **C**. Kan løses på flere måter, f.eks. ved energibetraktning: Total energi ved angitt tidspunkt:

$$E = \frac{1}{2} k x_0^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 + \frac{1}{2} m v_0^2$$

Når klossen passerer likevektsposisjonen, er potensiell energi lik null, og dermed

$$E = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$$

som gir

$$v_{\max}^2 = \omega^2 x_0^2 + v_0^2$$

b) **D**. Fra figuren ser vi f.eks. at $x(0) = 1$ og $x(5T) = 0.5$, der T er svingningens periode. Dermed:

$$\begin{aligned} e^{-5T/\tau} &= e^{-5 \cdot 2\pi / \omega\tau} = 0.5 \\ \Rightarrow \frac{10\pi}{\omega\tau} &= \ln 2 \\ \Rightarrow \omega\tau &= 45 \end{aligned}$$

c) **C**. Graf 4 er åpenbart mulig: Klossen glir oppover med konstant (negativ) akselerasjon og blir liggende i ro dersom friksjonen mot underlaget er stor nok. Alternativt glir den ned igjen, igjen med konstant akselerasjon, men nå med *mindre* akselerasjon, siden både friksjonskraften og tyngdens komponent tangentielt med skråplanet virker mot bevegelsen når klossen er på vei opp (mens bare friksjonskraften virker mot bevegelsen hvis klossen er på vei ned). Dermed er også graf 2 en mulighet.

d) **D**. Mekanisk energi er bevart, så hastigheten er mindre på toppen enn ved bunnen. Dette er nok til å fastslå at D er riktig figur, siden sentripetalakselerasjonen er v^2/r. På høyre og venstre side har vi i tillegg baneakselerasjonen g rettet nedover, som gir total akselerasjon på skrå nedover og inn mot midten.

e) **C**. Impulsbevarelse gir $2mv_0 = 5mv$, dvs $v = 2v_0/5$. Energitapet er dermed $K_0 - K = (1/2)2mv_0^2 - (1/2)5m(2v_0/5)^2 = 3mv_0^2/5$.