**TFY4115 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2013.**
**Løsningsforslag til øving 5.**

## Oppgave 1.

*a*) Rakettligningen:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg + u\frac{dm}{dt}.$$

Vi ganger ligningen med $dt/m$ og integrerer, fra 0 til $v$ for $v$, fra 0 til $t$ for $t$, og fra $m_0$ til $m$ for $m$:

$$\int_0^v dv = -g\int_0^t dt + u\int_{m_0}^m \frac{dm}{m},$$

som gir

$$v(t) = -gt + u\ln\frac{m}{m_0} = -u\ln\frac{m_0}{m} - gt.$$

*b*) Må ha skyvkraft minst like stor som tyngdekraften $m_0g = 2.98\cdot 10^7$ N. Her er skyvkraften lik $u\beta = 3.40\cdot 10^7$ N, så raketten *vil* lette fra bakken. Drivstoffmassen ved avreise er $m_d = -\beta t_f = 1.98\cdot 10^6$ kg. Raketten uten drivstoff har masse $m_f = m_0 - m_d = 1.06\cdot 10^6$ kg.

*c*) Fra rakettligningen har vi umiddelbart

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -g + \frac{u}{m}\frac{dm}{dt} = \frac{u\beta}{m} - g.$$

Med konstant drivstoff-forbruk har vi $m = m_0 + \beta t$, og dermed $a(t)$ som oppgitt. Ved $t = 0$: $a(0) = u\beta/m_0 - g = 1.39$ m/s$^2$. Ved $t = t_f$: $a(t_f) = u\beta/m_f - g = 22.3$ m/s$^2$.

*d*) Vi kan skrive

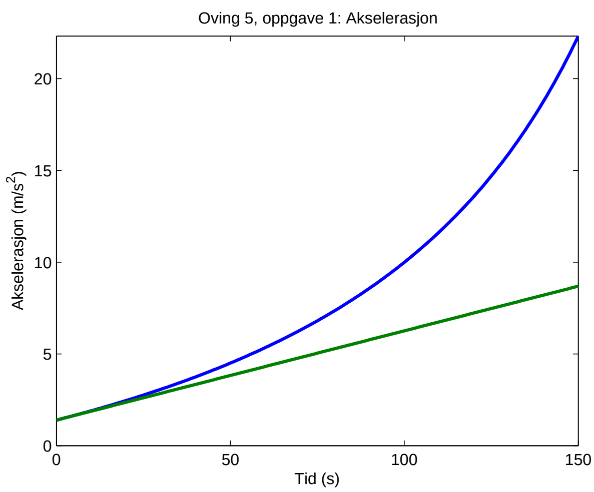
$$a(t) = \frac{u\beta}{m_0}\frac{1}{1+\beta t/m_0} - g.$$

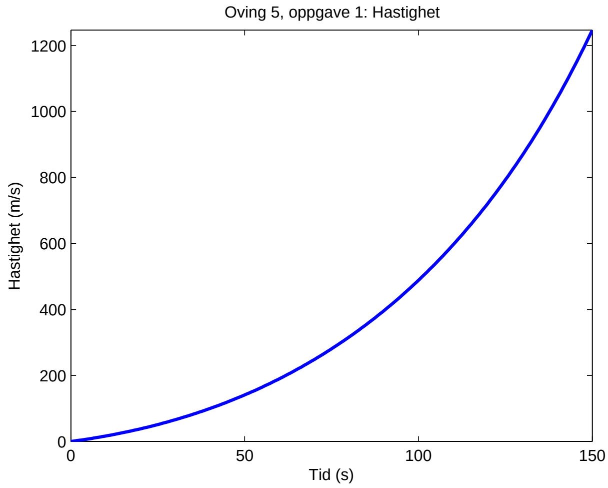
Hvis $t \ll m_0/(-\beta)$, så er $x = -\beta t/m_0 \ll 1$. Dermed er

$$a(t) \simeq a_{\text{lin}}(t) = \frac{u\beta}{m_0}\left(1 - \frac{\beta t}{m_0}\right) - g = a(0) - \frac{u\beta^2}{m_0^2}\,t,$$

som oppgitt.

Figurer produsert med Matlab-programmet rakettlosning.m for hhv akselerasjon og hastighet som funksjon av $t$ (Python-programmet rakettlosning.py gir lignende figurer):






På øyemål anslår vi at den lineære tilnærmelsen til $a(t)$ er god omtrentlig de første 20 sekundene.

$e$) Tilbakelagt distanse er gitt ved

$$h(t) = \int_0^t v(t)dt.$$

Vi har at

$$\int \ln x dx = x \ln x - x,$$

siden den deriverte av høyre side her gir tilbake $\ln x$. Litt fundering på hvordan riktige konstanter skal velges her og der gir da

$$h(t) = u\frac{m_0 + \beta t}{\beta} \ln \frac{m_0 + \beta t}{m_0} - ut - \frac{1}{2}gt^2,$$

og setter vi inn $t = t_f = 150$ s her, finner vi at $h(t_f) = 58353$ m $\simeq 58.4$ km.

Forholdet mellom $g(0)$, dvs $g$ ved jordoverflaten, og $g(h)$, dvs $g$ i høyden $h$ over bakken, er

$$\frac{g(0)}{g(h)} = \left(\frac{R+h}{R}\right)^2.$$

Setter vi inn $R = 6.37 \cdot 10^3$ km og $h = h_f = 58.4$ km, finner vi at dette forholdet blir ca 1.02. Med andre ord, vi gjør ikke større feil enn et par prosent ved å bruke samme verdi 9.81 m/s$^2$ for $g$ for hele distansen.

## Oppgave 2

$a$) Energibevarelse gir $Mgh = Mv_0^2/2$ og $v_0 = \sqrt{2gh}$. Ballen "reflekteres" fra bakken med hastighet $-v_0 = -\sqrt{2gh}$. (Her er det **valgt positiv hastighetsretning nedover**.) Ballens impulsendring i kollisjonen med bakken er $\Delta p = M\Delta v = -2Mv_0$. Impulsbevarelse, totalt sett, er ivaretatt i og med at bakken endrer sin impuls med beløpet $2Mv_0$.

$b$) Rett før den elastiske kollisjonen mellom de to ballene har nederste ball hastighet $-v_0$ og øverste ball hastighet $v_0$. (De har falt like langt.) Det er gitt i oppgaven at $v$ angir hastigheten til øverste ball etter kollisjonen. La oss dessuten med $v_1$ angi nederste balls hastighet etter kollisjonen. Bevaring av energi og impuls gir da (med $M = \alpha m$)

$$mv_0 - \alpha m v_0 = mv + \alpha m v_1 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\alpha m v_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\alpha m v_1^2 \qquad (2)$$

Vi benytter "trikset" som ble antydet på forelesning: Vi dividerer (1) med $m$ og (2) med $m/2$. Deretter samler vi ledd som inneholder $\alpha$ på den ene siden av likhetstegnet:

$$\begin{aligned} v_0 - v &= \alpha(v_1 + v_0) & (3) \\ v_0^2 - v^2 &= \alpha(v_1^2 - v_0^2) & (4) \end{aligned}$$

Under forutsetning av at begge sider i (3) er forskjellig fra null, kan vi dividere (4) med (3). Det gir

$$v_0 + v = v_1 - v_0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2v_0 + v,$$

som innsatt i ligning (3) lar oss eliminere $v_1$:

$$\begin{aligned} v_0 - v &= \alpha(2v_0 + v + v_0) = 3\alpha v_0 + \alpha v & (5) \\ \Rightarrow (\alpha+1)v &= (1-3\alpha)v_0 & (6) \\ \Rightarrow v &= \frac{1-3\alpha}{\alpha+1} v_0 = \sqrt{2gh} \cdot \frac{1-3\alpha}{\alpha+1} & (7) \\ (\Rightarrow v_1 &= 2v_0 + v = v_0 \frac{3-\alpha}{\alpha+1} = \sqrt{2gh} \cdot \frac{3-\alpha}{\alpha+1}\ ) & (8) \end{aligned}$$

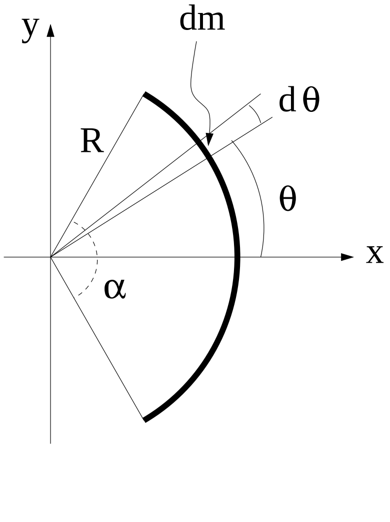
Med "starthastighet" $v$ i $y = 0$ vil den øverste ballen sprette til en høyde $y = v^2/2g$, dvs

$$y = h \cdot \left( \frac{3\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)^2 .$$

Grense- og spesialtilfeller:

- $\alpha \gg 1$: Da vil $v \to -3v_0$ og $y \to 9h$. Høyere enn dette er det altså ikke mulig å få en ball til å sprette ved å slippe den sammen med *en* tyngre ball, fra høyden $h$. Med *flere* baller, derimot, med gradvis økende masse nedover, er det mulig å få den øverste ballen til å sprette riktig høyt (se A. Anderson og J. Vanderkooy, *Physics Education* **34**, side 172 (1999), evt Essay kap. 5 hvis du har boka LL).
- $\alpha = 1$: Da vil $v \to -v_0$ og $y \to h$. Og det er jo rimelig: De to ballene har lik masse og spretter begge etter hvert tilbake til sine opprinnelige starthøyder. Den nederste ballen vil selvsagt først ta seg en ekstra runde nedom bakken, med hastighet $v_1 = v_0$, for å overføre en ny porsjon impuls, $2Mv_0 = 2mv_0$, til gulvet, før den endelig spretter tilbake til opprinnelig høyde.

**Oppgave 3**




*a*) Massen til del av bøylen innenfor vinkelelementet $d\theta$ er

$$dm = \lambda dl = \lambda R d\theta,$$

der $\lambda = M/2\alpha R$ er bøylens masse pr lengdeenhet (kg/m). Men i slike oppgaver kan det være like greit å ikke innføre massetettheter, idet vi kan uttrykke massen i vinkelelementet $d\theta$ som

$$dm = (\text{total masse}) \cdot (dm \text{ sin andel av hele massen}) = M \cdot \frac{d\theta}{2\alpha}.$$

Med denne $dm$ og bruk av $x = R\cos\theta$ blir tyngdepunktets $x$-verdi

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{M} \int_{\text{legeme}} x \; dm = \frac{1}{M} \cdot R \cdot \frac{M}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta \; d\theta \\ &= \frac{R}{2\alpha} \left[ \sin\alpha - \sin(-\alpha) \right] = \underline{R \frac{\sin\alpha}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Tyngdepunktets $y$-verdi er $Y = 0$, av symmetrigrunner.

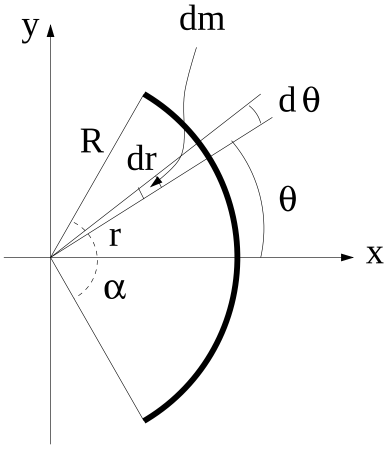
$\alpha = \pi$ gir $X = 0$, som ventet for en hel sirkel.

$\alpha \to 0$ gir $(\sin\alpha)/\alpha \to 1$ og $X = R$, som ventet for en liten masse samlet i $x = R$.

*b*) Massen til en infinitesimal del av sektoren innenfor vinkelelementet $d\theta$ og radius $dr$ er

$$dm = (\text{total masse}) \cdot (dm \text{ sin andel av hele massen}) = M \cdot \frac{dA}{A} = M \cdot \frac{r d\theta \cdot dr}{\frac{2\alpha}{2\pi}\pi R^2} = M \cdot \frac{r d\theta \cdot dr}{\alpha R^2}.$$

Med denne $dm$ og bruk av $x = r\cos\theta$ blir tyngdepunktets $x$-verdi




$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{M}\int_{\text{sektor}} x\, dm = \frac{1}{M}\cdot\frac{M}{\alpha R^2}\int_{\theta=-\alpha}^{\alpha}\int_{r=0}^{R} r^2\cos\theta\, d\theta dr \\
&= \frac{1}{\alpha R^2}\int_{\theta=-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\, d\theta \int_{r=0}^{R} r^2 dr \\
&= \frac{1}{\alpha R^2}\left[\sin\theta\right]_{-\alpha}^{\alpha}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^R \\
&= \underline{\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Tyngdepunktets $y$-verdi er $Y = 0$, av symmetrigrunner.

*Alternativt* kan du bruke resultatet fra *a*) ved å betrakte sirkelsektoren som en sum av bøyler med radius fra 0 til $R$. En bøyle med radius $r$ har da $X = r\,(\sin\alpha)/\alpha$ og masse (sammenlign med det som er gjort ovenfor)

$$dm = M \cdot \frac{dA_{\text{bøyle}}}{A} = M \cdot \frac{r \cdot 2\alpha \cdot dr}{\frac{2\alpha}{2\pi}\pi R^2} = M \cdot \frac{2r \cdot dr}{R^2},$$

og vi får

$$X = \frac{1}{M}\int_{\text{alle bøyler}} X\, dm = \frac{1}{M}\int_0^R r\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\, M\frac{2r \cdot dr}{R^2} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{2}{R^2}\int_0^R r^2\, dr = \underline{\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}}.$$

$\alpha = \pi$ gir $X = 0$, som ventet for en hel sirkel.

$\alpha \to 0$ gir $(\sin\alpha)/\alpha \to 1$ og $X = 2R/3$, som vel er rimelig for en meget smal sirkelsektor.