TFY4115 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2013.
Løsningsforslag til øving 7.

Oppgave 1.

a) Riktig svar er D, de fire stavenes massesenter har lik akselerasjon når netto ytre kraft $\boldsymbol{F}$ er den samme. Kraftens angrepspunkt har ingen betydning for tyngdepunktbevegelsen.

b) Riktig svar er B. Kloss og spole bryter mållinjen samtidig, av samme grunn som i forrige delspørsmål. Snordraget har en arm (lik spolens radius) relativt spolens massesenter, så spolen utsettes for et ytre dreiemoment relativt massesenteret. Da gir N2 for rotasjon (spinnsatsen) at spolen får en vinkelakselerasjon, dvs den roterer med økende vinkelhastighet.

c) Riktig svar er A. Langs skråplanet virker tyngdens komponent ($mg \sin\alpha$, der α er helningen på skråplanet) nedover, like stor for alle tre, samt friksjonskraften f_i ($i = 1, 2, 3$) fra underlaget, rettet oppover. Nettokraften $mg \sin\alpha - f_i$ bestemmer tyngdepunktets akselerasjon, som tydeligvis har vært størst for legeme 3, og like stor for 1 og 2. Ergo er f_3 mindre enn $f_1 = f_2$.

Oppgave 2.

Med metode 1 fra tips7.pdf:

a) Den største massen må nødvendigvis vinne nappetaket her, og m_1 vil derfor akselereres nedover, m_2 oppover: Rotasjon mot klokka. Snordraget S_1 må være større enn S_2 siden det er snorene som skal få sving på trinsa med treghetsmomentet $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$.

b) Vi velger positiv retning ned for m_1 og opp for m_2. Med stram snor må de to massenes akselerasjon være den samme, a. Vi har tre ukjente, a, S_1, S_2. Newtons 2. lov (N2) for translasjon gir

$$m_1 g - S_1 = m_1 a \tag{1}$$

$$-m_2 g + S_2 = m_2 a \tag{2}$$

Periferihastigheten til trinsa er lik snorhastigheten v, og vinkelhastigheten er dermed $\omega = v/R$. Følgelig er $\alpha = \dot{\omega} = a/R$. Med v positiv nedover for m_1 blir ω og α positive *mot* klokka. N2 for trinsas rotasjon,

$$\tau = (S_1 - S_2)R = I_0\dot{\omega} \quad \Rightarrow \quad S_1 - S_2 = \frac{I_0\dot{\omega}}{R} = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a}{R^2},$$

gir den tredje ligningen

$$S_1 - S_2 = \frac{M}{2}a. \tag{3}$$

De tre ukjente løses f.eks ved å sette inn uttrykk for S_1 fra (1) og uttrykk for S_2 fra (2) inn i (3):

$$m_1(g - a) - m_2(a + g) = \frac{M}{2}a \quad \Rightarrow \quad \underline{a = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}}. \tag{4}$$

Vi ser at a har riktig enhet, siden den uttrykkes ved tyngdens akselerasjon multiplisert med en dimensjonsløs faktor. Dette svaret kunne vi nesten ha gjettet, siden den drivende kraften her åpenbart er $m_1 g - m_2 g$, og N2 for rotasjon i (3) viser at trinsas "effektive trege masse" er $M/2$. Innsetting av a i ligningene (1) og (2) gir

$$S_1 = m_1(g - a) = \underline{g\frac{2m_1 m_2 + m_1 M/2}{m_1 + m_2 + M/2}}, \tag{5}$$

$$S_2 = m_2(a + g) = \underline{g\frac{2m_1 m_2 + m_2 M/2}{m_1 + m_2 + M/2}}. \tag{6}$$

Hvis vi lar $M \to 0$ og $m_2 \to 0$, blir $a = g$, som stemmer bra: m_1 faller fritt. (Og begge snordragene blir null.) Og hvis $m_1 = m_2$, blir $a = 0$, noe som åpenbart også må være riktig. (Og snordragene blir $S_1 = m_1 g$ og $S_2 = m_2 g$.)

Med metode 2 fra tips7.pdf:

Vi betrakter systemets totale dreieimpuls relativt skivas massesenter. De to massene m_1 og m_2 bidrar da med hver sin banedreieimpuls, mens den roterende skiva bidrar med sin indre dreieimpuls (spinn). Det totale dreiemomentet er gitt av tyngden til de to loddene. Ved å bruke $\tau_z = dL_z/dt$ og betingelsen at snora ikke glir på skiva, faller svaret for akselerasjonen praktisk talt rett ut, *uten* at vi trenger å bekymre oss om snordraget gjennom regningene:
Total dreieimpuls relativt skivas massesenter er

$$\begin{aligned} L_z &= I_0\omega + m_1 Rv + m_2 Rv \\ &= \frac{M}{2} Rv + m_1 Rv + m_2 Rv \\ &= (m_1 + m_2 + M/2) Rv, \end{aligned}$$

slik at

$$dL_z/dt = (m_1 + m_2 + M/2) Ra.$$

Her har vi brukt $\omega = v/R$, samt at "armen" til loddenes impuls er R. Her er v hastigheten til loddene, positiv nedover for m_1 og positiv oppover for m_2. Dreiemomentets z-komponent er

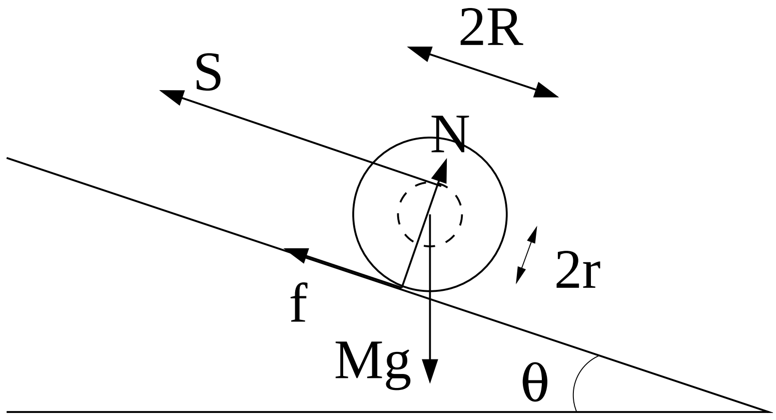
$$\tau_z = (m_1 - m_2) gR,$$

siden "armen" til loddenes tyngde også er R. Og vi ser at tyngden $m_1 g$ gir et positivt bidrag til τ_z, mens $m_2 g$ gir et negativt bidrag. Dermed følger resultatet

$$a = g \, \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}$$

umiddelbart. I ettertid er det enkelt å finne S_1 og S_2 når a er kjent.
Svarene blir selvsagt de samme, uansett valg av metode. Mens metode 1 starter med en analyse av hver av problemets tre komponenter (enkelt nok!), blir løsningen av tre koblede ligninger med tre ukjente litt krøkkete. Formuleringen av problemet som et dreieimpulsproblem, metode 2, er mer raffinert og helhetlig i utgangspunktet, men letter regningene betraktelig: Det er enklere å løse én ligning med én ukjent, enn å løse tre koblede ligninger for de tre ukjente. Siden $\tau_z = dL_z/dt$ er en *konsekvens* av Newtons lover, slik de opprinnelig ble formulert, er det ikke noen overraskelse at de to metodene gir samme resultat.

Oppgave 3.



a) Her har vi fire ukjente: θ_0, S, f, N. Dette krever fire ligninger. Når snella holdes i ro av snora og friksjonen, gjelder N1:

Normalt skråplanet: $\sum F_\perp = 0 \quad \Rightarrow \quad N = Mg\cos\theta \quad$ (I)

Langs skråplanet: $\sum F_{||} = 0 \quad \Rightarrow \quad Mg\sin\theta = f + S \quad$ (II)
der f er friksjonskrafta.

N1 for rotasjon (mhp snellas massesenter): $\sum \tau = 0 \quad \Rightarrow \quad S\,r = f\,R \quad$ (III)

Statisk friksjonskraft kan ligge mellom null og en øvre grense:
$f \le \mu_s N = \mu_s Mg\cos\theta \quad$ (IV)
Ved grensa $\theta = \theta_0$ – dvs der hvor snella akkurat glipper fra underlaget og begynner å rulle/slure – er friksjonskraften lik det maksimale: $f = \mu_s Mg\cos\theta_0$.
Ligning (III) gir $S = (R/r)f$, som innsatt i ligning (II) gir

$$Mg\sin\theta_0 - f - (R/r)f = 0.$$

Innsetting av maksimalverdien av f gir en ligning for θ_0:

$$Mg\sin\theta_0 = \mu_s Mg\cos\theta_0(1 + R/r) \qquad \Rightarrow \qquad \tan\theta_0 = \mu_s(1 + R/r),$$

og dermed

$$\underline{\theta_0 = \arctan\left[\mu_s(1 + R/r)\right]}.$$

Snorkrafta:

$$\underline{S = \frac{R}{r}f = \frac{R}{r}\mu_s Mg\cos\theta_0}\,, \quad \text{Alternative uttrykk: } S = \frac{MgR}{r+R}\sin\theta_0 = Mg\left(\sin\theta_0 - \mu_s\cos\theta_0\right).$$

b) Når snella har begynt å slure, må ligning (II) og (III) erstattes av N2. Vinkelen er nå gitt lik $\theta\,(\ge \theta_0)$, og de fire ukjente blir: a, S_1, f, N. Snorkraften blir en annen enn tidligere, derfor nytt symbol for den, og akselerasjonen a langs skråplanet blir en ukjent. Friksjonskraften nå er gitt av den *kinetiske* friksjonskoeffisienten μ_k:

$$f = \mu_k N = \mu_k Mg\cos\theta.$$

Ligning (I) bestemmer N og ligning () bestemmer f, slik at vi har igjen bare to ukjente, a og S_1. To ligninger:
N2 langs skråplanet: $\sum F_{||} = Ma \quad \Rightarrow \quad Mg\sin\theta - f - S_1 = Ma \quad$ (IIb)

N2 for rotasjon (om snellas massesenter): $\quad \sum \tau = I\dot\omega \quad \Rightarrow \quad -f\,R + S_1\,r = I\dot\omega \quad$ (IIIb)

der I = treghetsmomentet om snellas akse. Vi har valgt a positiv nedover og positiv ω mot klokka (=

den retningen det virkelig går). Når snella rutsjer nedover, rulles snora ut med hastighet $v = \omega\, r$ (IKKE $v = \omega R$!), og $\dot\omega = \dot v/r = a/r$. N2-ligningene (IIb) og (IIIb) gir da (vi venter litt med å sette inn for f):

$$\begin{aligned} M\,g\sin\theta - f - S_1 &= Ma \qquad (7)\\ -fR + S_1\,r &= I\,(a/r). \qquad (8) \end{aligned}$$

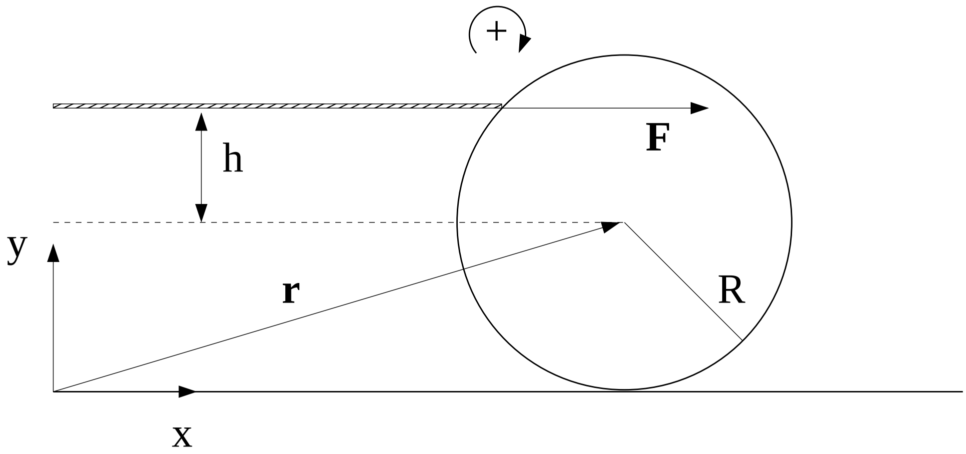
To ligninger og to ukjente (a og S_1). Eliminerer S_1 fra ligning (7) og setter inn i ligning (8):

$$S_1 = M\,g\sin\theta - f - Ma \quad \stackrel{(8)}{\Longrightarrow} \quad -fR + Mgr\sin\theta - fr = I\,(a/r) + Mar. \qquad (9)$$

Løsning av a, med litt smarte divisjoner og innsetting av f gir

$$\underline{a = g\,\frac{\sin\theta - \mu_k\cos\theta\left(1+\frac{R}{r}\right)}{1 + I/(Mr^2)}}.$$

Oppgave 4.



a) Det kortvarige, kraftige støtet gir kula en (lineær) impuls og en dreieimpuls (relativt massesenteret):

$$\begin{aligned} F\Delta t &= M\Delta V = MV_0\\ \tau\Delta t = Fh\Delta t &= I_0\Delta\omega = I_0\omega_0. \end{aligned}$$

Fortegnsvalg: Positiv translasjon i positiv x-retning og positiv rotasjon med klokka, vist i figuren. Vi har som oppgitt neglisjert friksjonskraftens bidrag i det korte tidsrommet Δt, noe som er rimelig unntatt for slag som er veldig svake. En god snookerspiller kan mobilisere en langt større kraft F når *det* er hensiktsmessig. Vi eliminerer den ukjente størrelsen $F\Delta t$ fra de to ligningene, og får derved en relasjon mellom V_0 og ω_0,

$$MhV_0 = I_0\omega_0 \quad \Rightarrow \quad V_0 = \frac{2R^2}{5h}\,\omega_0 \;\text{ eller }\; \underline{\omega_0 = \frac{5h}{2R^2}\,V_0}. \qquad (10)$$

Ren rulling forutsetter at $V_0 = R\omega_0$, og denne betingelsen er bare oppfylt når $\underline{h/R = +2/5}$.

b) Dersom $h > 2R/5$, vil $\omega_0 > V_0/R$, dvs kula roterer for fort i forhold til ren rulling. Det innebærer at undersiden av kula glir mot venstre på underlaget, og friksjonskraften vil derfor være rettet mot høyre. Retningen kan også fastlegges ved at friksjonskraften forsøker å oppnå perfekt rulling ved å redusere vinkelhastigheten og øke translasjonshastigheten.
Dersom $h < 2R/5$, er situasjonen den motsatte: Friksjonskraften virker mot venstre og gir kula rotasjonsakselerasjon og translasjonsretardasjon. For $h < 0$ vil $\omega_0 < 0$, dvs kula roterer "feil" vei. Friksjonen virker fortsatt mot venstre, dvs den forsøker å få kula til å rotere rett vei.

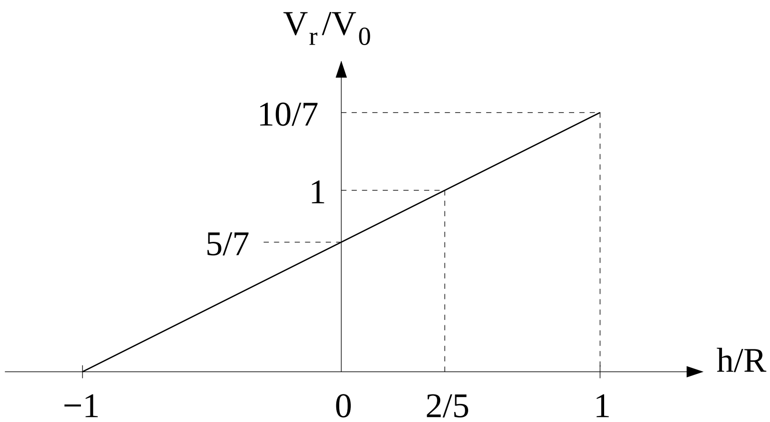
c) Velger vi referansepunktet (hvor som helst) langs x-aksen, vil $\boldsymbol{r_f} \times \boldsymbol{f} = 0$, der $\boldsymbol{r_f}$ er $\boldsymbol{f}$'s angrepspunkt, som er i kontaktpunktet mellom kule og bord. De to vektorene er parallelle. Ingen andre krefter gir noe dreiemoment om origo etter at støtet er avsluttet, og total dreieimpuls relativt origo må derfor være bevart. (Luftmotstanden, som vi har neglisjert, gir selvsagt et ørlite dreiemoment, noe som ødelegger for perfekt dreieimpulsbevarelse.)

d) Total dreieimpuls blir

$$\begin{aligned} L_z &= L = M[\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V}]_z + I_0\omega = MRV + I_0\omega \\ \text{start:} \quad L_0 &= MRV_0 + (2/5)MR^2\,\omega_0 \overset{(10)}{=} MRV_0(1 + h/R) \\ \text{ved ren rulling:} \quad L_r &= MRV_r + (2/5)MR^2 \cdot V_r/R = (7/5)MRV_r. \end{aligned}$$

Da dreieimpulsen er bevart, må vi ha $L_0 = L_r$, som gir hastigheten når ren rulling er oppnådd:

$$\underline{V_r = \frac{5}{7}\left(1 + \frac{h}{R}\right) V_0.} \tag{11}$$



Når $h/R = +\frac{2}{5}$, finner vi $V_r = V_0$, som vi burde. Når $h/R > \frac{2}{5}$, vil altså massesenterhastigheten *øke* på vei mot den endelige rullebevegelsen, ellers vil den avta. Merk at $V_r \geq 0$ *alltid*, uansett hvor lavt på kula køen treffer, dvs det er ikke mulig å få kula til å trille tilbake etter at ren rulling er oppnådd. For $h = -R$ (vanskelig i praksis!) stopper kula.

e) Når translasjonshastigheten endres fra V_0 til V_r i løpet av en tid t_r (som skal bestemmes), er det ene og alene friksjonskraften $f = \mu_k Mg$ som gir denne akselerasjonen. Akselerasjonen $a = f/M = \mu_k g$ er konstant, og vi kan bruke konstant-akselerasjonsligningen $V_r = V_0 + at_r$ til å bestemme t_r. Som funnet i *b*) peker f mot høyre, og a er positiv når $h/R > 2/5$, mens f peker mot mot venstre og a er negativ når $h/R < 2/5$. Vi tar først for oss tilfellet positiv a:

$$\begin{aligned} V_r &= V_0 + at_r \qquad \text{og} \quad V_r = \frac{5}{7}\left(1 + \frac{h}{R}\right) V_0 \\ \Rightarrow t_r &= \frac{1}{a}(V_r - V_0) = \frac{1}{\mu_k g}\left(-\frac{2}{7} + \frac{5}{7}\frac{h}{R}\right) V_0 = V_0 \frac{2}{7\mu_k g}\left(\frac{5}{2}\frac{h}{R} - 1\right) \quad \text{når } h/R > 2/5. \end{aligned}$$

Når $h/R < 2/5$, blir $a = -\mu_k g$, og fortegnet snus:

$$t_r = V_0 \frac{2}{7\mu_k g}\left(1 - \frac{5}{2}\frac{h}{R}\right) \quad \text{når } h/R < 2/5.$$

Om ønsket kan vi sammenfatte dette til en ligning:

$$\underline{t_r = \frac{2V_0}{7\mu_k g}\left|1 - \frac{5}{2}\frac{h}{R}\right|} \quad \text{for alle } h/R \in \langle -1, 1\rangle.$$

Verdien er 0 *bare* for $h/R = 2/5$, i tråd med det vi visste fra før.

f) Energiberegninger: Først startenergien uttrykt ved translasjonsenergien $\frac{1}{2}MV_0^2$:

$$K_0 = \frac{1}{2}MV_0^2 + \frac{1}{2}I_0\omega_0^2 \overset{(10)}{=} \frac{1}{2}MV_0^2\left(1 + \frac{5}{2}\frac{h^2}{R^2}\right).$$

Dernest energi for den rullende kula med $\omega_r = V_r/R$:

$$K_r = \frac{1}{2}MV_r^2 + \frac{1}{2}I_0\omega_r^2 = \frac{1}{2}MV_r^2 \cdot \frac{5}{7} \overset{(11)}{=} \frac{1}{2}MV_0^2 \cdot \frac{5}{7}\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2.$$

Og vi kan uttrykke energitapet:

$$\Delta K = K_r - K_0 = \frac{1}{2}MV_0^2\left[\frac{5}{7}\left(1 + 2\frac{h}{R} + \frac{h^2}{R^2}\right) - \left(1 + \frac{5}{2}\frac{h^2}{R^2}\right)\right] = \underline{-\frac{1}{2}MV_0^2 \cdot \frac{2}{7} \cdot \left(1 - \frac{5}{2}\frac{h}{R}\right)^2}$$

etter litt algebra. Vi kan også uttrykke relativ energi etter at rulling er oppnådd:

$$\epsilon = \frac{K_r}{K_0} = \frac{\frac{5}{7}\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}{1 + \frac{5}{2}\frac{h^2}{R^2}}.$$

En kontroll: Med et støt som gir ren rulling ($h/R = 2/5$) er $\epsilon = 1$, dvs ikke energitap. Med $h = -R$ er $\epsilon = 0$, dvs 100% energitap. Dessuten: Med $h = +R$ er $\epsilon = 40/49$ og med $h = 0$ er $\epsilon = 5/7$.

g) Det er konstant akselerasjon slik at lengden som kula glir langs underlaget før ren rulling oppnås, finnes fra gjennomsnittsfarten $\langle V \rangle$:

$$x_r = \langle V \rangle\, t_r = \frac{1}{2}(V_r + V_0)\, t_r = \underline{\frac{2V_0^2}{49\mu_k g}\left(6 + \frac{5h}{2R}\right)\left|1 - \frac{5h}{2R}\right|},$$

der vi har brukt uttrykk for V_r og t_r ovenfra. Kontroll: $x_r = 0$ når $h/R = 2/5$.
Vi har lært at det kreves relativt omfattende regning for å bestemme t_r eller x_r, mens V_r i pkt *d*) (og dermed, med litt ekstra faktoriseringsstrev, ΔK) faller nesten rett ut ved bruk av dreieimpulsbevarelse.
Det ville også ha vært interessant å analysere bevegelsen etter et støt som treffer til høyre eller venstre for xy-planet. Dette vil gi sidelengs rotasjon ($\boldsymbol{\omega}$ vertikal), noe som kan gi en ikkelineær bane. For curlingspillere er vertikal $\boldsymbol{\omega}$ viktig for curlingsteinens videre bevegelse. Men det er utfordrende å regne på!