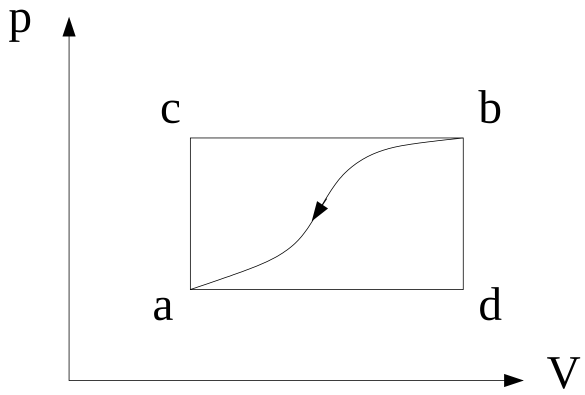
TFY4115 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2013.
Løsningsforslag til øving 9.

Oppgave 1.



Den indre energien U til et system er bestemt av tilstanden. Dette er ikke tilfelle med tilført varme Q og utført arbeid W, men energibevarelse (1. hovedsetning) er oppfylt. Mottatt varme langs veien acb er

$$Q_{acb} = U_b - U_a + W_{acb},$$

slik at endringen i indre energi blir

$$\Delta U_{ab} = U_b - U_a = Q_{acb} - W_{acb} = (80 - 30)\ \text{J} = 50\ \text{J}.$$

a) Varmemengden som systemet opptar langs veien adb blir derfor

$$Q_{adb} = \Delta U_{ab} + W_{adb} = 50 + 10 = 60\ \text{J}.$$

b) Mottatt arbeid 20 J betyr utført arbeid $W_{ba} = -20$ J. Mottatt varme under prosessen $b \to a$ er følgelig

$$Q_{ba} = \Delta U_{ba} + W_{ba} = -\Delta U_{ab} + W_{ba} = -50 - 20 = -70\ \text{J}.$$

Dette betyr at systemet avgir varmemengden 70 J under prosessen fra b til a.

c) Ved prosessen db utføres det ikke noe arbeid da volumet er konstant, dvs $W_{db} = 0$, og $W_{ad} = W_{adb} = 10$ J. Mottatt varmemengde under prosessen ad blir følgelig

$$Q_{ad} = U_d - U_a + W_{ad} = 40 - 0 + 10 = 50\ \text{J}.$$

Ved prosessen db blir så den mottatte varmemengden

$$Q_{db} = Q_{adb} - Q_{ad} = 60 - 50 = 10\ \text{J}.$$

Oppgave 2

Tilstandsligning for n mol ideell gass:

$$pV = nRT.$$

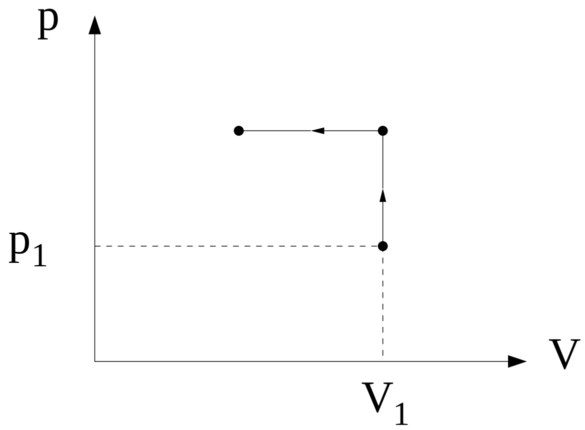
Utført arbeid:

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = nRT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} \\ &= nRT\,\ln\frac{V_2}{V_1} = 2\cdot 8.314\cdot 300\cdot \ln 2 = 3458\,\text{J} \simeq 3.46\ \text{kJ}. \end{aligned}$$

For ideell gass er indre energi U en funksjon av temperaturen alene. Siden T er uendret langs en isoterm, vil U være uendret, dvs $\Delta U = 0$. Tilført varme er følgelig

$$Q = \Delta U + W = W = 3.46 \text{ kJ}.$$

Oppgave 3



Tilstandsligning: $pV = nRT$. En dobling av temperaturen, $T_1 \to T_2 = 2T_1$, ved konstant volum, $V_2 = V_1$, gir trykket

$$p_2 = \frac{nRT_2}{V_2} = \frac{2nRT_1}{V_1} = 2p_1.$$

Avkjøling tilbake til T_1, uten å endre trykket, gir volumet

$$V_2 = \frac{nRT_1}{p_2} = \frac{nRT_1}{2p_1} = \frac{1}{2}V_1.$$

Utført arbeid (dvs på omgivelsene):

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = \int_{V_1}^{V_2} p_2\,dV = (V_2 - V_1)p_2 = -p_1V_1.$$

Arbeid gjort på gassen:

$$-W = p_1V_1.$$

Oppgave 4

Fra definisjonen av energienheten cal (kalori) har vi direkte at $c_p = 1$ cal/gK for vann. Luft består nesten utelukkende av 2-atomige molekyler, og gjennomsnittlig molar masse er ca 29 g/mol. Dermed er (med $R = 8.314$ i enheten J/mol K) $c_p = (7R/2)/(29 \cdot 4.184)$ cal/gK $= 0.24$ cal/gK for luft. Molar varmekapasitet for metaller er ca $3R$, så med molar masse 55.9 g/mol har vi $c_p \simeq 3R/(55.9 \cdot 4.184)$ cal/gK $= 0.11$ cal/gK for jern. Med andre ord, $c_p(\text{vann}) \simeq 4c_p(\text{luft}) \simeq 9c_p(\text{jern})$.

Oppgave 5

Siden lufta antas å utivde seg adiabatisk og reversibelt, kan adiabatligningene for ideell gass benyttes,

$$TV^{\gamma-1} = \text{konst} \quad \text{og} \quad pV^{\gamma} = \text{konst}.$$

Eliminasjon av V gir da

$$pT^{-\gamma/(\gamma-1)} = \text{konst},$$

eventuelt

$$Tp^{-\kappa} = T_0 p_0^{-\kappa}, \quad \text{dvs} \quad T = T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa},$$

med $\kappa = (\gamma - 1)/\gamma$. Her er trykkdifferansen $\Delta p = p - p_0$ liten (i forhold til p_0), slik at temperaturendringen $\Delta T = T - T_0$ blir

$$\begin{aligned}
\Delta T &= T - T_0 = T_0 \left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa} - 1\right] \\
&= T_0 \left[\left(\frac{p_0 + \Delta p}{p_0}\right)^{\kappa} - 1\right] \\
&= T_0 \left[\left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right)^{\kappa} - 1\right] \\
&\simeq T_0 \cdot \kappa \cdot \frac{\Delta p}{p_0},
\end{aligned}$$

der vi har rekkeutviklet til laveste orden i den lille størrelsen $\Delta p/p_0$. (Dette er selvsagt ikke påkrevd; en kan godt bare sette inn tallverdier og trykke i vei på kalkulatoren.) Med $\gamma = 7/5$ for luft blir $\kappa = 2/7$, slik at

$$\Delta T \simeq 293 \cdot \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{-8.9}{760}\right) \text{ K} \simeq -1°\text{C}.$$

Her har vi brukt at 1 atm = 760 mm Hg.

Oppgave 6

For ideell gass har vi adiabatligningene $pV^{\gamma} = \text{konst}$ og $TV^{\gamma-1} = \text{konst}$. Slutt-trykket blir derfor lik

$$p = p_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma} = 1\,\text{atm} \cdot 18^{1.4} = 57.2\,\text{atm},$$

mens slutt-temperaturen blir (med $T_0 = 17°\text{C} = 290$ K)

$$T = T_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma-1} = 190\,\text{K} \cdot 18^{0.4} = 922\,\text{K} = 649°\text{C}.$$

Her er ingen varme utvekslet med omgivelsene, slik at arbeidet tilsvarer endringen i indre energi: $Q = \Delta U + W = 0$. Vi kan nå gå fram på to måter for å bestemme arbeidet utført på gassen: Enten direkte ved å integrere $p(V)\,dV$, eller ved å regne ut endringen i indre energi, ΔU. La oss gjøre det på begge vis!
Direkte utregning:

$$W = \int_V^{V_0} p(V)\,dV = p_0 \int_V^{V_0} \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma} dV = \frac{p_0 V_0}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma-1} - 1\right] = \frac{p_0 V_0}{\gamma - 1}\left(\frac{T}{T_0} - 1\right) = 0.44\,\text{kJ}.$$

Endring i indre energi:
Vi vet at U er en tilstandsfunksjon, og vi kjenner her både start- og slutt-tilstand (både trykk, volum og temperatur). Da kan vi bestemme ΔU på den måten som passer oss best, dvs det spiller ingen rolle hva slags prosess (her: adiabatisk) som faktisk tok systemet fra start- til slutt-tilstand.
Vi vet videre at endringen i indre energi inngår i uttrykket for varmekapasiteten ved konstant volum, $C_V = (\partial U/\partial T)_V$. Dermed, hvis vi kjenner $C_V(T)$, kan vi bestemme ΔU ved å integrere $dU = C_V\,dT$.
Her er det klart at C_V er en konstant: Med $C_p - C_V = nR$ og $C_p/C_V = \gamma$ har vi $C_V = nR/(\gamma - 1) = 5nR/2$.
Dermed er

$$|W| = \Delta U = C_V(T - T_0) = \frac{5}{2}nR(T - T_0) = \frac{5}{2}p_0 V_0\left(\frac{T}{T_0} - 1\right) = 2.5 \cdot 1.013 \cdot 10^5 \cdot 0.80 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{922}{290} - 1\right) = 0.44\,\text{kJ}.$$

Samme svar med begge metoder!