Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2011.

TFY4115: Løsningsforslag til oppgaver gitt 26.08 – 01.09 2011.

OPPGAVER 26.08.11

1

Vi skal bestemme Taylorrekkene til noen kjente funksjoner:

a

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin 0 + x\cos 0 - \frac{1}{2}x^2 \sin 0 - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 \cos 0 + \dots \\ &= x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos 0 - x\sin 0 - \frac{1}{2}x^2 \cos 0 + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 \sin 0 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + x\alpha + \frac{1}{2}x^2\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{2\cdot 3}x^3\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \\ \text{med } \binom{\alpha}{n} &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}\end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \ln 1 + x\frac{1}{1+0} - \frac{1}{2}x^2\frac{1}{(1+0)^2} + \frac{2}{2\cdot 3}x^3\frac{1}{(1+0)^3} + \dots \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}\end{aligned}$$

2
Vi skal bestemme Ω til andre orden i den lille parameteren ε/Ω_0:

$$\begin{aligned}\Omega &= -\varepsilon + \sqrt{\Omega_0^2 + \varepsilon^2} \\ &= -\varepsilon + \Omega_0 \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{\Omega_0^2}}\end{aligned}$$

Vi kan nå bruke **1c** ovenfor, med $\alpha = 1/2$ og $x = \varepsilon^2/\Omega_0^2 \ll 1$, og skrive

$$\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{\Omega_0^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{\Omega_0^2} \tag{1}$$

Dermed:

$$\begin{aligned}\Omega &\simeq -\varepsilon + \Omega_0 + \Omega_0 \cdot \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{\Omega_0^2} \\ &= \Omega_0 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2\Omega_0} \\ &= \Omega_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{\Omega_0} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{\Omega_0^2}\right)\end{aligned}$$

Neste ledd i summen vil være "av orden" ε^3/Ω_0^3.

OPPGAVER 31.08.11

1
Vi skal regne ut de fire andrederiverte av funksjonen $f(x, y) = \sin(x + y^2)$ og sjekke at de to "kryssleddene" er like:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \cos(x+y^2) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 2y\cos(x+y^2) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\sin(x+y^2) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2\cos(x+y^2) - 4y^2\sin(x+y^2) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(2y\cos(x+y^2)\right) = -2y\sin(x+y^2) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos(x+y^2)\right) = -2y\sin(x+y^2)
\end{aligned}
$$

Vi ser at rekkefølgen ikke spiller noen rolle, dvs vi kan derivere først mhp y og deretter mhp x, eller omvendt, svaret blir det samme.

2
Vi har et terreng omkring en fjelltopp som kan beskrives med høydefunksjonen

$$
h(x, y) = h_0 \frac{e^{-x^2/a^2}}{1 + y^2/a^2} \tag{2}
$$

der h_0 er en konstant og lik høyden på fjelltoppen, mens a også er en konstant og angir en "karakteristisk lengde" for hvor raskt høyden endrer seg i dette terrenget.

a
Vi ser vel uten videre at maksimal høyde er i origo, $h(0, 0) = h_0$.

b
Vi skal finne ut i hvilken retning terrenget er brattest i posisjonen (a, a). Da må vi regne ut gradienten til h i (a, a) siden gradienten nettopp peker i den retningen h øker raskest. Vi trenger da de partiellderiverte av h mhp x og y:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} &= \left(-\frac{2x}{a^2}\right) h_0 \frac{e^{-x^2/a^2}}{1 + y^2/a^2} \\
\frac{\partial h}{\partial y} &= \left(-\frac{2y}{a^2}\right) h_0 \frac{e^{-x^2/a^2}}{(1 + y^2/a^2)^2}
\end{aligned}
$$

Vi setter inn $(x, y) = (a, a)$ og finner

$$\begin{aligned}\nabla h &= \hat{x}\frac{\partial h}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial h}{\partial y} \\ &= \left(-\frac{2}{a}\right) h_0 \frac{e^{-1}}{2}\hat{x} + \left(-\frac{2}{a}\right) h_0 \frac{e^{-1}}{4}\hat{y} \\ &= -\frac{h_0}{2ea}\left(2\hat{x} + \hat{y}\right)\end{aligned}$$

Det betyr at i posisjonen (a, a) peker $-\nabla h$ i en retning gitt ved vinkelen

$$\tan\alpha = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\frac{1}{2} \simeq 27^\circ \tag{3}$$

i forhold til x-aksen (som er f.eks. østover). Terrenget *avtar* raskest i denne retningen og *stiger* raskest i den motsatte retningen.

c

Vi skal vil slutt påvise at origo virkelig er en fjelltopp. Da må vi ha $\nabla h = 0$ i origo, samt at de andrederiverte må være negative.

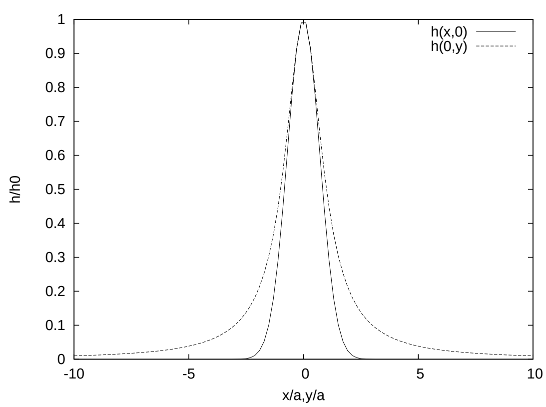
La oss ikke skrive alt dette ut i detalj, men derimot se litt nærmere på det vi har. Vi ser at x-komponenten av ∇h er proporsjonal med x, og dermed lik null i $x = 0$. Tilsvarende er y-komponenten av ∇h proporsjonal med y, og dermed lik null i $y = 0$. Altså er origo et stasjonært punkt. Videre ser vi at de andrederiverte mhp x og y, dvs det vi kalte "kryssleddene", begge vil bli proporsjonale med faktoren xy, slik at disse er lik null i origo.

Vi står igjen med $\partial^2 h/\partial x^2$ og $\partial^2 h/\partial y^2$:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \left(-\frac{2}{a^2}\right) h + x^2 \cdot (\dots) \quad , \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \left(-\frac{2}{a^2}\right) \frac{h}{(1 + y^2/a^2)} + y^2 \cdot (\dots) \tag{4}$$

Her overlever bare de første leddene i origo, og første ledd er negativt i begge tilfeller. Følgelig har vi negativ krumning i origo, og det er et maksimumspunkt.

Figuren nedenfor viser to "snitt" gjennom fjelltoppen, hhv xh-planet (heltrukken linje) og yh-planet (stiplet linje). Legg merke til at eksponentialfunksjonen går raskest mot null.



OPPGAVER 01.09.11

1

Newtons 2. lov gir diffligningen som skal løses:

$$ma = m\frac{dv}{dt} = -bv + mg\sin\theta = -b\left(v - \frac{mg\sin\theta}{b}\right) \tag{5}$$

Vi ganger med $dt/m(v - mg\sin\theta/b)$ på begge sider:

$$\frac{dv}{v - mg\sin\theta/b} = -\frac{b}{m}dt \tag{6}$$

Integrasjon fra $t = 0$ til t gir

$$\ln(v(t) - mg\sin\theta/b) - \ln(v(0) - mg\sin\theta/b) = -\frac{bt}{m} \tag{7}$$

Eksponentiering på begge sider gir så, med $v(0) = 0$,

$$\frac{v(t) - mg\sin\theta/b}{-mg\sin\theta/b} = e^{-t/\tau} \tag{8}$$

der vi har innført ”tidskonstanten” $\tau \equiv m/b$. Ordner vi litt finner vi endelig

$$v(t) = \tau g\sin\theta\left(1 - e^{-t/\tau}\right). \tag{9}$$

Merk at vi oppnår en maksimal hastighet etter ”lang tid”, $t \gg \tau$. Da er friksjonskraften bv og tyngdekraftens komponent langs skråplanet $mg\sin\theta$ like store (men motsatt rettet) slik at total kraft er null:

$$v_{\max} = \tau g\sin\theta = \frac{mg\sin\theta}{b}. \tag{10}$$

Posisjonen (målt langs skråplanet) $x(t)$ finner vi ved å integrere hastigheten (med $x(0) = 0$):

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t v(t)dt \\ &= \tau g t\sin\theta - \tau^2 g\sin\theta\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \end{aligned}$$

2

Arealet mellom kurvene $x = 0$, $x = \pi/4$, $y = \sin x$ og $y = \cos x$ er:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/4} dx \int_{\sin x}^{\cos x} dy \\ &= \int_0^{\pi/4} dx\,(\cos x - \sin x) \\ &= \Big|_0^{\pi/4} (\sin x + \cos x) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \\ &= \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

3
Arealet mellom de to parablene $x^2 - 4$ og $-x^2 + 4$ skal bestemmes. Vi innser at vi må integrere fra $x = -2$ til $x = 2$:

$$A = \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2-4}^{-x^2+4} dy = \int_{-2}^{2} dx (8 - 2x^2) = |_{-2}^{2} \left(8x - \frac{2}{3} x^3 \right) = \frac{64}{3} \tag{11}$$

Til slutt skal vi finne volumet av objektet vi får når dette dreies omkring y-aksen. Hvis vi tenker oss en tynn søyle i posisjon x, med bredde dx og høyde $8 - 2x^2$, og roterer denne en hel runde rundt y-aksen, skulle vi få et tynt sylinderskall med volum

$$dV = dx \cdot (8 - 2x^2) \cdot 2\pi x \tag{12}$$

Dette må integreres fra $x = 0$ til $x = 2$ for å få med hele volumet:

$$V = \int dV = \int_0^2 dx \cdot (8 - 2x^2) \cdot 2\pi x = \cdots = 16\pi \tag{13}$$

01.09.2011, Jon Andreas Støvneng