27.08.10 26.08.11

"Matnyttig matematikk"

Mål: Bli kjent med noen ukjente begreper/teknikker/metoder fra matematikken før de "dukker opp" i TFY4115 Fysikk.

Opplegg: (3F + 3Ø) (27/8, 8-10, R73; 30/8, 10-12, R10; 1/9, 10-12, R73)
3 × (F+Ø)

Tema: (Tentativt!)

27/8 Rekkeutviklinger [kun 1 variabel; derivasjon; summer ⇒ Intet nytt!]

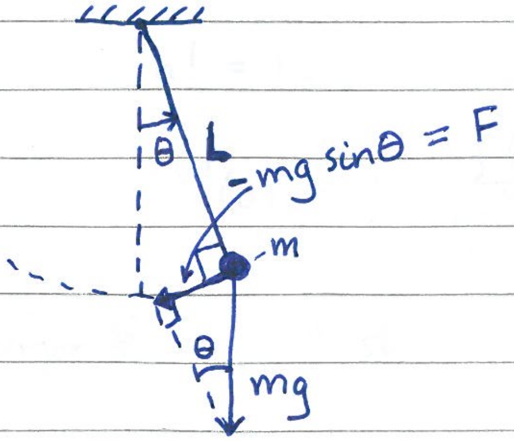
30/8 Differensialregning i 3D [flere variable; partiellderivert;...]

1/9 Diff-ligninger: Utledning (og løsning)

(....?....) Multiple integraler.

Rekkeutviklinger [H-H & S, Appendiks B1]

Motivasjonseksempel:



Newton's 2. lov: $F = ma$

$\Delta s = L \cdot \Delta\theta$ ($= 2\pi \cdot L$ for ett helt omløp)

$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{L\,d\theta}{dt}$

$a = \frac{dv}{dt} = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$

$\Rightarrow -mg\sin\theta = mL\frac{d^2\theta}{dt^2}$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$ Ikke så lett å løse!

Men: små utslag, $\theta \ll 1 \Rightarrow \boxed{\sin\theta \approx \theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$

Kjent (fra R2): $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t)$; $\omega = \sqrt{g/L}$

Nyttig å vite at $\sin\theta \approx \theta$ hvis $\theta \ll 1$!

Vi skal se at:

- vi har en metode for å uttrykke "alle" slags funksjoner ved enkle polynomer, såkalte Taylorrekker:
  $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
- for "små x" holder det ofte å ta med ett (eller to) ledd.
  [Eks: $f(x) = \sin x$: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ $\Rightarrow \sin x \approx x$ når $x \ll 1$]
  Vi snakker da om "laveste ordens polynom-tilnærmelse til $f(x)$".

Taylorrekken til $f(x)$ i nærheten av $x = 0$: [NB: Hvis summen konvergerer!]
[a.k.a. Maclaurinrekken]

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{1\cdot 2}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3 + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \end{aligned}}$$

Her er: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ $\quad (0! \stackrel{def}{=} 1)$

$$f^{(n)}(0) = \left\{\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right\}_{x=0}$$

Hvorfor blir det slik?

- 1 ledd gir polynomet $p_0(x) = f(0)$, dvs riktig verdi i $x = 0$
- 2 ledd: $p_1(x) = f(0) + f'(0)\cdot x$ $\Rightarrow p_1'(x) = f'(0)$
  $\Rightarrow p_1(0) = f(0)$ og $p_1'(0) = f'(0)$
  $\Rightarrow$ riktig verdi og helning i $x = 0$

- 3 ledd: $p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0) x^2$

$\Rightarrow p_2'(x) = f'(0) + f''(0) \cdot x$ og $p_2''(x) = f''(0)$

$\Rightarrow p_2(0) = f(0)$; $p_2'(0) = f'(0)$; $p_2''(0) = f''(0)$

$\Rightarrow$ riktig verdi, helning og krumning i $x=0$

- $n+1$ ledd $\Rightarrow p_n(x)$ slik at

$p_n(0) = f(0)$; $p_n'(0) = f'(0)$; ......; $p_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$

$\Rightarrow$ alle de første n deriverte riktig i $x=0$

- $n \to \infty$ $\Rightarrow$ et polynom med riktig verdi og <u>alle</u> deriverte riktige i $x=0$

$\Rightarrow p_n(x) = f(x)$ i nærheten av $x=0$

M.a.o: Har en <u>enkel</u> <u>og</u> <u>systematisk</u> metode for å bestemme Taylorrekken (dvs, en polynomtilnærmelse) til en gitt $f(x)$

Det eneste vi må kunne er å <u>derivere</u>!

Eksempler!

1) • Finn Taylorrekken til funksjonen $f(x) = \frac{1}{1-x}$!

Løsning:
Må bestemme $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=0}$, $\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=0}$, ... (samt $f(0)=1$)

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[(1-x)^{-1}\right] = +(1-x)^{-1-1} = +(1-x)^{-2}$$

$$\Rightarrow \underline{f'(0) = +1}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[+(1-x)^{-2}\right] = (+2)(1-x)^{-3} = 2(1-x)^{-3}$$

$$\Rightarrow f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = +6(1-x)^{-4} \Rightarrow f'''(0) = +6$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = n!\,(1-x)^{-(n+1)} \Rightarrow f^{(n)}(0) = n!$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{1-x} = \underbrace{1}_{f(0)} + \underbrace{1}_{f'(0)} \cdot x + \underbrace{\frac{2}{2!}}_{f''(0)/2!} x^2 + \underbrace{\frac{6}{3!}}_{f'''(0)/3!} x^3 + \ldots + \frac{n!}{n!} x^n + \ldots$$

$$= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

MATLAB:
taylor.m
(undervisning TFY4115)

[Kjent fra R2: Geometrisk rekke! Der startet du med rekken og utledet at $1+x+x^2+\ldots = \frac{1}{1-x}$.
Vi har nå gått motsatt vei!!]

2) • Finn Taylorrekken til $f(x) = e^x$.

Løsn: $f'(0) = (e^x)_{x=0} = 1$; $f''(0) = f'''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = \ldots = 1$

$$\Rightarrow f(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

"Små nok" $x \Rightarrow e^x \approx 1 + x$ ("Til 1. orden i x" "Til $O(x)$")

Oppgaver:

① • Finn Taylorrekken til disse funksjonene:
(i nærheten av $x=0$)

a) $\sin x$ b) $\cos x$ c) $(1+x)^\alpha$ d) $\ln(1+x)$

② I forbindelse med analysen av Foucaults pendel dukker følgende uttrykk opp for ~~~~ størrelsen Ω, en vinkelfrekvens med enhet "per sekund" (s^{-1}):

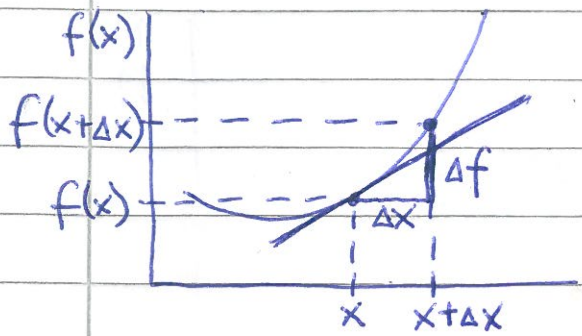
$$\Omega = -\varepsilon + \sqrt{\Omega_0^2 + \varepsilon^2} \qquad (\varepsilon \ll \Omega_0)$$

Oppfatt Ω som en funksjon av ε, mens Ω_0 er en konstant, og bestem funksjonen $\Omega(\varepsilon)$ til 2. orden i den lille (dim. løse!) parameteren ε/Ω_0. [Vanskelig!?]

30.08.10 31.08.11

Differensialregning i ~~flere~~ mer enn én dimensjon

Repetisjon i 1D:



Den deriverte av $f(x)$, $\frac{df}{dx}$ evt $f'(x)$, angir stigningstallet (evt: helningen) til grafen:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Eks: $f(x) = x^2 \Rightarrow \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = \underline{2x}$$

Andre: $(e^x)' = e^x$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$

$(\sinh x)' = \cosh x$; $(\cosh x)' = \sinh x$ {← Ukjent?!}

$\left(\begin{array}{l} \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{array} \right)$

Kjerneregel: $\frac{d}{dx} f[u(x)] = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Produktregel: $\frac{d}{dx}[f \cdot g] = \frac{df}{dx} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dx}$

Vi kan skrive: $df = \frac{df}{dx} \cdot dx$

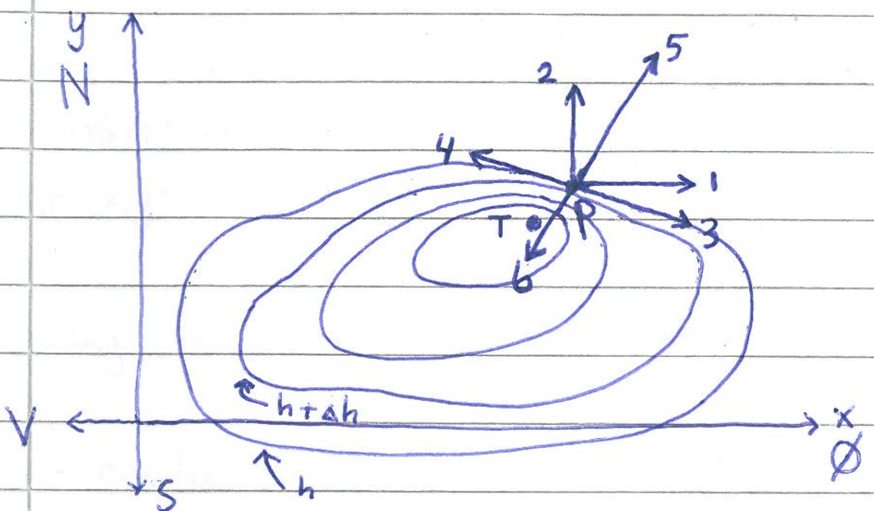
endringen i x: $x \to x + dx$

endringen i f: $f \to f + df$

den deriverte av f (i punktet x), stign.tallet

Funksjoner av flere variable

Eks. med 2 variable: $h(x,y)$ = høyden over havet



kart med høydekurver!
h = konstant på gitt høydekurve
Δh = ekvidistanse

T: toppen av fjellet
P: din posisjon (x,y)

Spm: Hvor mye endres høyden h hvis du går bort fra P, i ulike retninger (f.eks. 1, 2, ..., 6)?

1: Du går østover en lengde dx. Da endres x, men ikke y. Høydeendringen dh avhenger av hvor raskt h endrer seg med hensyn på x. analogi med $df = \frac{df}{dx} dx$ i 1D:

$$dh_x = \underbrace{\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}}\cdot dx$$

kalles den partiellderiverte av $h(x,y)$ mhp x; bruker $\frac{\partial}{\partial x}$ og ikke $\frac{d}{dx}$ for å understreke at h også avhenger av andre variable (her: y), og at disse skal holdes fast

Fra definisjonen av den deriverte følger:

$$\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x, y) - h(x,y)}{\Delta x}$$

Konkret eks:
$h(x,y) = -x^2 \cdot y^2 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x} = \underline{-2x \cdot y^2}$

Langs retn. 1, østover, ~~...~~ går det nedover, så $\frac{\partial h}{\partial x} < 0$ i P ~~...~~

2: nordover, $y \to y+dy$, uendret x

Dermed:

$$dh_y = \frac{\partial h}{\partial y} \cdot dy$$

med $\frac{\partial h(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{h(x,y+\Delta y) - h(x,y)}{\Delta y}$ = partiellderivert av h mhp y

Hvis vi går i retning som endrer både x og y:

$$dh = dh_x + dh_y = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy$$

Spesialtilfeller:

3,4: vi ("følger terrenget", går langs høydekurven); $dh = 0$

5,6: bratteste vei ned, opp; $|dh|$ er maksimal

Vi kan regne ut "spesialretningene" 3–6 fra gitt $h(x,y)$.

Ser at vi kan skrive

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial h}{\partial y}\hat{y}\right)\left(dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y}\right)$$

Her er: $\hat{x}$ = enhetsvektor i x-retning
$\hat{y}$ = —"— y- —"—

og vi har innført

$$\nabla h \equiv \frac{\partial h}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial h}{\partial y}\hat{y} = \text{(den 2-dim.) gradienten til } h$$

nabla-operatoren

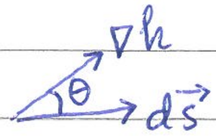
$d\vec{s} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y}$ = (det 2-dim.) veielementet, dvs en liten (infinitesimal!) forflytningsvektor

Da $\hat{x} \perp \hat{y}$, er $\hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{y}\cdot\hat{x} = 0$, mens $\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = 1$

Dermed: $\boxed{dh = \nabla h \cdot d\vec{s}}$

Vi har generalisert fra 1D, $df = \frac{df}{dx}dx$,
til 2D, $dh = \nabla h \cdot d\vec{s}$!!

Tolkning av gradienten:



$$dh = \nabla h \cdot d\vec{s} \overset{(def)}{=} |\nabla h| \cdot |d\vec{s}| \cdot \cos\theta$$

⇒ maksimal dh når $\theta = 0$

⇒ —"— når $d\vec{s}$ velges langs ∇h

⇒ ∇h er en vektor som peker dit h øker raskest

($-\nabla h$ —"— avtar —"—)

og $|\nabla h| = \dfrac{dh}{|d\vec{s}|}$ = stigningstallet i den bratteste retningen

(jfr $\dfrac{df}{dx}$ = stigningstallet i 1D)

Videre:

Hvis $df/dx = 0$, har vi et bunnpunkt, topp-punkt eller sadelpunkt

Tilsvarende: der $\nabla h = 0$ har vi et stasjonært pkt.
(dvs bunn-, topp- eller sadelpkt)

På kartet: $\nabla h = 0$ på toppen (T)

Generalisering til 3D:

$T = T(x,y,z)$ = temperaturfordelingen i rommet ditt

Da er $dT = \dfrac{\partial T}{\partial x}dx + \dfrac{\partial T}{\partial y}dy + \dfrac{\partial T}{\partial z}dz = \nabla T \cdot d\vec{s}$

med $$\left.\begin{aligned} \nabla T &= \hat{x}\frac{\partial T}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial T}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial T}{\partial z} \\ d\vec{s} &= \hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy + \hat{z}\,dz \end{aligned}\right\}$$ gradient & veielement i 3D

Gradienter i fysikken:

∇ (skalar funksjon) $\neq 0$ $\Rightarrow$ "system" ute av likevekt
$\Rightarrow$ drift/transport/strøm av "et eller annet"

Eks:

$\nabla T \neq 0$ (T = temp.) $\Rightarrow$ varmetransport

$\nabla U \neq 0$ (U = pot. energi) $\Rightarrow$ transport av legeme (som $\vec{F} = -\nabla U$ virker på)

$\nabla \rho \neq 0$ (ρ = tetthet) $\Rightarrow$ partikkeltransport, diffusjon

$\nabla V \neq 0$ (V = elektrisk potensial) $\Rightarrow$ Ladningstransport, (dvs el. strøm!) ($\vec{E} = -\nabla V$)

Andrederiverte

1D: $\frac{d^2 f}{dx^2}$ angir <u>krumningen</u> til $f(x)$

2D: 4 mulige andrederiverte: $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}$

Rekkefølge: $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)$, dvs først $\frac{\partial}{\partial y}$, så $\frac{\partial}{\partial x}$

For "pene, glatte" funksjoner er $\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}}$

Dvs: rekkefølgen er likegyldig!

[Eks. i utdelt oppgave.]

Oppgaver

① Regn ut de 4 2.deriverte av $f(x,y) = \sin(x+y^2)$.
(Er „kryssleddene“ like?)

② Anta at terrenget et sted (ved et fjell) beskrives av høydefunksjonen

$$h(x,y) = h_0 \exp(-x^2/a^2) \cdot (1 + y^2/a^2)^{-1}$$

der h_0 = høyden på fjelltoppen og a er en „typisk lengde“ skala for hvordan h varierer i dette terrenget.

a) Hvor er fjelltoppen?

b) I hvilken retning er det brattest i pos. (a,a)?
Angi retn. relativt østover ($\hat{e}_x$).

c) Regn ut de 2.deriverte og vis at fjelltoppen ligger i $(0,0)$; noe du sikkert har funnet allerede.
[Dvs: Vis at $(0,0)$ er et topp-punkt!]

01.09.10 | 01.09.11 | 13

Diff-ligninger: Utledning og løsning.

Ser på eksempler med N2!

Eks 1: F = konst. [Kjent fra Fysikk 2]

m ⊗ $\downarrow mg$ $\quad \downarrow g \quad \downarrow y$

$F = ma \Rightarrow mg = ma \Rightarrow \underline{a = g}$

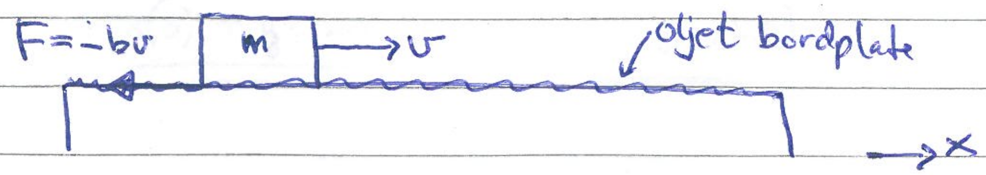
$$a = \frac{dv}{dt} = g \Rightarrow dv = g\,dt \Rightarrow \int_{v(0)}^{v(t)} dv = \int_0^t g\,dt$$

$$\Rightarrow v(t) - v(0) = g(t-0) \Rightarrow \underline{\underline{v(t) = v(0) + gt}}$$

$$v = \frac{dy}{dt} \Rightarrow dy = v\,dt \Rightarrow \int_{y(0)}^{y(t)} dy = \int_0^t v(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y(t) = y(0) + v(0)t + \tfrac{1}{2}gt^2}}$$

Eks 2: $|F|$ prop. med v: "Våt friksjon"



$[b] = N \cdot \frac{s}{m}$

$$N2: \quad -bv = ma = m\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m}dt \Rightarrow \int_{v(0)}^{v(t)} dv/v = \int_0^t \left(-\frac{b}{m}\right)dt$$

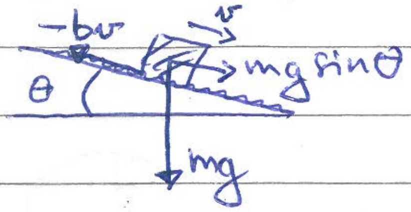
$$\Rightarrow \underbrace{\ln v(t) - \ln v(0)}_{\ln[v(t)/v(0)]} = -\frac{b}{m}t \Rightarrow \underline{\underline{v(t) = v(0)e^{-t/\tau}}} \qquad \tau = m/b$$

$$v = dx/dt \Rightarrow dx = v\,dt \Rightarrow x(t) - x(0) = \int_0^t v(t)\,dt = \ldots = \underline{\underline{v(0)\tau\left[1 - e^{-t/\tau}\right]}}$$

Tall: $m = 50\,g$, $b = 0.1\ NS/m$, $v(0) = 2.0\ m/s$

NB! $\boxed{\text{Gis som oppgave!}}$

Eks 3: Som 2, men skrått bord



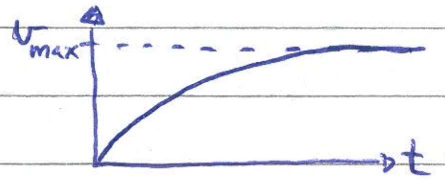
$$N2 \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = -bv + mg\sin\theta$$
$$= -b\left(v - \frac{mg\sin\theta}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v - mg\sin\theta/b} = -\frac{b}{m}\,dt$$

$$\Rightarrow \ldots \text{Som eks 2} \ldots \Rightarrow \frac{v(t) - mg\sin\theta/b}{v(0) - mg\sin\theta/b} = e^{-t/\tau} \qquad (\tau = m/b)$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{mg\sin\theta}{b} + \left[v(0) - \frac{mg\sin\theta}{b}\right]e^{-t/\tau} = g\tau\sin\theta + \left[v(0) - g\tau\sin\theta\right]e^{-t/\tau}$$

Hvis f.eks. $v(0)=0$:



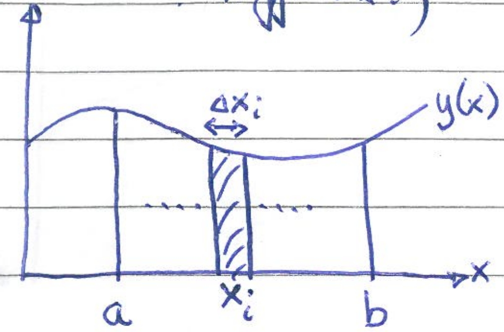
$$v_{max} = \frac{mg\sin\theta}{b}$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t)\,dt$$

$$= x(0) + \frac{mg\sin\theta}{b}t + \left[v(0) - \frac{mg\sin\theta}{b}\right]\tau\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$$

$$= x(0) + g\tau\sin\theta \cdot t + \left[v(0) - g\tau\sin\theta\right]\tau\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$$

Integraler, Dobbeltintegraler, "SPP".
(Trippel int.)



$$\Delta A_i \approx y(x_i)\Delta x_i$$

$$\Rightarrow A \approx \sum_i \Delta A_i$$

$$\Rightarrow A = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i \Delta A_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i y(x_i)\Delta x_i \overset{\text{def}}{=} \int_a^b y(x)\,dx$$

[dvs: integralet av $y(x)$ = "arealet under kurven"]

Løsning: Finn $g(x)$ slik at $y(x) = \frac{dg}{dx}$

$$\Rightarrow A = \int_a^b \frac{dg}{dx}\,dx = \int_a^b dg = \underline{\underline{g(b) - g(a)}}$$

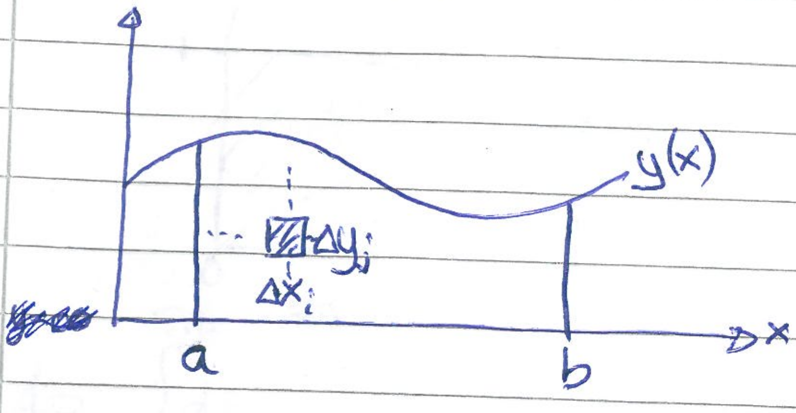
<u>Eks1</u> $y(x) = 1 + \sin x, \quad a = 0, \quad b = \pi$

$$\Rightarrow A = \int_0^\pi (1 + \sin x)\,dx = \int_0^\pi \frac{d}{dx}(x - \cos x)\,dx$$

$$= (\pi - \cos\pi) - (0 - \cos 0) = \pi + 1 + 1 = \underline{\underline{\pi + 2}}$$

(kan droppes)

Alternativ tenkemåte:



$$\Delta A_{ij} \approx \Delta x_i \cdot \Delta y_j$$

$$\Rightarrow A \approx \sum_i \sum_j \Delta x_i \cdot \Delta y_j$$

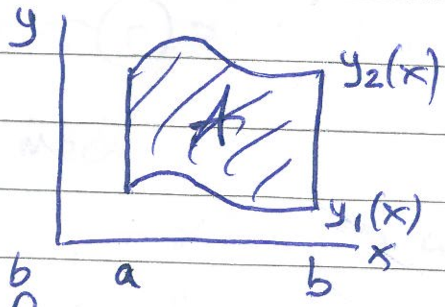
$$\Rightarrow A = \lim_{\Delta x_i \to 0} \lim_{\Delta y_j \to 0} \sum_i \Delta x_i \cdot \sum_j \Delta y_j$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \underline{\underline{\int_a^b dx \int_0^{y(x)} dy}}$$

Dobbeltintegral!
Tilsv. for volum ⇒ Trippelint.

$$\int_0^{y(x)} dy = y(x) \Rightarrow A = \int_a^b dx\, y(x)$$, som før!

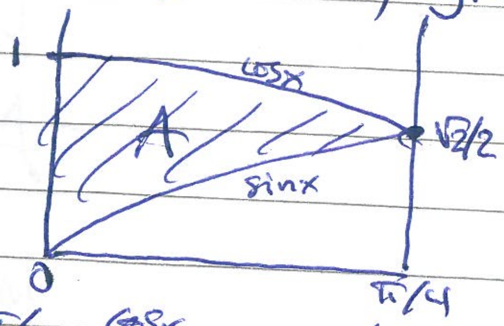
Litt mer generelt:



$$\Rightarrow A = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy = \underline{\int_a^b dx\, (y_2(x) - y_1(x))}$$

NB: $\boxed{\text{Som oppgave.}}$

Eks 1: $a = 0$, $b = \pi/4$, $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \cos x$



$$\Rightarrow A = \int_0^{\pi/4} dx \int_{\sin x}^{\cos x} dy = \int_0^{\pi/4} dx\,(\cos x - \sin x)$$

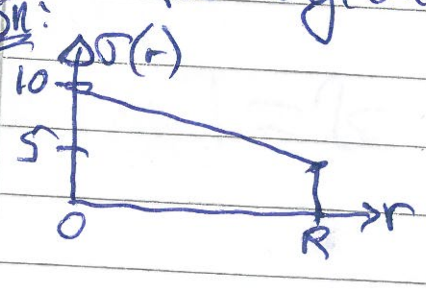
$$= \Big|_0^{\pi/4} \{\sin x + \cos x\} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{2} - 1}}$$

Gå gjennom denne!

Eks 3: Tynn skive, radius $R = 10\,cm$, masse pr flateenhet er $10\,g/cm^2$ i midten og avtar lineært utover, til $5\,g/cm^2$ ved kanten. $M = ??$

Løsn:



$$\Rightarrow \sigma(r) = \sigma_0 (1 - \alpha r)$$

med $\sigma_0 = 10\,g/cm^2$

$\alpha = 0.05\,cm^{-1}$

Kan ikke sette "$M = \sigma \cdot A$" fordi $\sigma \neq$ konst.

$\Rightarrow$ Må starte med $dm = \sigma \cdot dA$.

Pga symmetri:

$$\Rightarrow dA = 2\pi r \cdot dr$$

$$\Rightarrow dm = \sigma(r) \cdot 2\pi r\, dr$$

= massen til tynn ring m/radius r

$$\Rightarrow M = \int dm = \int_0^R \sigma_0 (1-\alpha r) 2\pi r\, dr$$

$$= 2\pi \sigma_0 \Big|_0^R \left(\tfrac{1}{2} r^2 - \alpha \cdot \tfrac{1}{3} r^3\right)$$

$$= 2\pi \sigma_0 \left\{ \tfrac{1}{2} R^2 - \tfrac{1}{3} \alpha R^3 \right\}$$

Tall:

$$M[g] = 2\pi \cdot 10 \left\{ \tfrac{1}{2} \cdot 10^2 - \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{5}{100} \cdot 10^3 \right\}$$

$$= 20\pi \left\{ 50 - \tfrac{50}{3} \right\}$$

$$= 20\pi \cdot 100/3$$

$$= \frac{2000\pi}{3} [g] \approx 2{,}1 \text{ kg}$$

(2094 g)

Oppgaver 1.9.10:

$\vec{g}\downarrow$ $\quad$ $(\downarrow\vec{g})$ $\quad$ $\vec{v}_0$, α

① Skrått kast i tyngdefeltet, vinkel α, startfart v_0, luftmotstand $-b\cdot\vec{v}$. Bestem $\vec{v}(t)$, dvs v_x og v_y.

Nei, ikke denne! (Men se s14!)

[Løsn: $m\vec{a} = \vec{g} - b\vec{v} \Rightarrow m\frac{dv_x}{dt} = -bv_x$,

$$m\frac{dv_y}{dt} = -mg - bv_y = -b(v_y + mg/b)$$

$$\Rightarrow v_x(t) = v_{0x}\,e^{-bt/m} = \underline{\underline{v_0\cos\alpha\, e^{-bt/m}}} \quad (\to 0)$$

$$\frac{v_y(t) + mg/b}{v_y(0) + mg/b} = e^{-bt/m}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v_y(t) = -\frac{mg}{b} + \left(v_0\sin\alpha + \frac{mg}{b}\right)e^{-bt/m}}} \quad \left(\to -\frac{mg}{b}\right)$$

[Bestem også $x(t)$ og $y(t)$ [anta $x(0) = y(0) = 0$] og x_{max}]

② Finn arealet mellom de to parablene $x^2 - 4$ og $-x^2 + 4$. [$A = \int_{-2}^{2} dx\,(8 - 2x^2) = \dots = \underline{64/3}$]

Hva blir volumet hvis denne dreies rundt y-aksen?

Løsn: $dV = \overbrace{(y_2 - y_1)\cdot dx}^{dA} \cdot 2\pi x = 4\pi(4x - x^3)\,dx$

$$\Rightarrow V = 4\pi\int_0^2 (4x - x^3)\,dx = 4\pi\left[2x^2 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_0^2$$

$$= 4\pi\{8 - 4\} = \underline{\underline{16\pi}}$$

LØSNINGER!

27/8

1 a) $\sin x = \sin 0 + \cos 0 \cdot x - \frac{1}{2}\sin 0 \cdot x^2 - \frac{1}{2\cdot 3}\cos 0 \cdot x^3$
$+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\sin 0 \cdot x^4 \dots = x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 \dots$
$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

b) $\cos x = \cos 0 - \sin 0 \cdot x - \frac{1}{2}\cos 0\, x^2 + \frac{1}{6}\sin 0\, x^3$
$+\frac{1}{24}\cos 0\, x^4 \dots = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \dots$
$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}$

c) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + \frac{1}{2!}\alpha(\alpha-1)x^2 + \frac{1}{3!}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3 \dots$
$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}$

d) $\ln(1+x) = \overbrace{\ln 1}^{=0} + \frac{1}{1+0}\cdot x - \frac{1}{2!}\frac{1}{(1+0)^2}x^2 + \frac{2}{3!}\frac{1}{(1+0)^3}x^3 - \dots$
$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \dots$
$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$

2 $\Omega = -\varepsilon + \sqrt{\Omega_0^2 + \varepsilon^2} = -\varepsilon + \Omega_0\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{\Omega_0^2}}$
$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \Rightarrow \Omega \approx -\varepsilon + \Omega_0 + \Omega_0 \cdot \frac{1}{2}\varepsilon^2/\Omega_0^2 \dots$
$= \Omega_0 - \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2/\Omega_0 \dots$
$= \Omega_0\left\{1 - \frac{\varepsilon}{\Omega_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\Omega_0}\right)^2 \dots\right\}$

1. $f(x,y) = \sin(x+y^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x+y^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\cos(x+y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin(x+y^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\cos(x+y^2) - 4y^2\sin(x+y^2)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(2y\cos(x+y^2)\right) = -2y\sin(x+y^2)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos(x+y^2)\right) = -2y\sin(x+y^2)\end{aligned}\right\} \text{like, ok!}$$

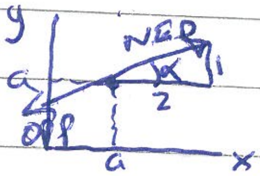
2. a) Ser at $h_{max} = h(0,0) = h_0$

b) $\nabla h = \frac{\partial h}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial h}{\partial y}\hat{y}$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \left(-\frac{2x}{a^2}\right)h_0 e^{-x^2/a^2}\left(1+y^2/a^2\right)^{-1} \overset{(a,a)}{=} \left(\frac{-2}{a}\right)h_0 e^{-1}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{h_0}{ea}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \left(-\frac{2y}{a^2}\right)h_0 e^{-x^2/a^2}\left(1+y^2/a^2\right)^{-2} \overset{(a,a)}{=} \left(\frac{-2}{a}\right)h_0 e^{-1}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{h_0}{2ea}$$

$\Rightarrow \nabla h = -\frac{h_0}{2ea}\{2\hat{x}+\hat{y}\}$:



$\alpha = \arctan\frac{1}{2} \approx 27°$

c) $\frac{\partial^2 h}{\partial y\partial x} \sim x\cdot y \overset{(0,0)}{=} 0 = \frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \left(-\frac{2}{a^2}\right)h + \left(\frac{2x}{a^2}\right)^2 h \overset{(0,0)}{=} \left(-\frac{2}{a^2}\right)\cdot h_0 < 0$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \left(-\frac{2}{a^2}\right)\frac{h}{(1+y^2/a^2)} + \frac{8y^2}{a^4}\frac{h}{(1+y^2/a^2)^3} \overset{(0,0)}{=} \left(-\frac{2}{a^2}\right)h_0 < 0$$

$\Rightarrow$ Negativ krumning i alle retn. $\Rightarrow$ Topp! [Ser at $\nabla h = 0$]