KLASSISK MEKANIKK

[YF 1–10, 14 ; TM 1–10, 14 ; LL 1–6, 9 ; HS 1–6]

Størrelser og enheter. SI-systemet. [YF1, TM1, HS1]

Fysisk størrelse = målbar størrelse for fysisk fenomen

Eks: Tid. $\underset{\text{symbol}}{\tau} = \underbrace{1.0167}_{\text{måltall}}$ ns ← enhet, inkl. dekadisk prefiks (n = nano = 10^{-9})

$[\tau] = s$ "enheten til tau er sekund"

SI : 7 grunnenheter + div. sammensatte og avledete

Navn	Symbol(er)	Enhet	
lengde	$\ell, s, \Delta x, \ldots$	m	Mekanikk
masse	$m, M, \ldots$	kg	Mekanikk
tid	$t, \tau, \ldots$	s	Mekanikk
elektrisk strømstyrke	I	A	Elmag
temperatur	T	K	Termisk
stoffmengde	n	mol	— " — (Kjemi)
lysstyrke	I	cd	Lite brukt
hastighet	v	m/s	
akselerasjon	a	m/s^2	
kraft	F	$kg\,m/s^2 \equiv N$	avledete
energi	$E, K, U, W, \ldots$	$Nm \equiv J$	avledete
effekt	P	$J/s \equiv W$	avledete
⋮			

Eks: Hvor lang tid bruker lyset på å gå 1 fot, i vakuum?

Løsn: $c = 299792458 \text{ m/s}$, $\ell = 1 \text{ fot} = 12 \text{ in} = 12 \cdot 25.4 \text{ mm}$

$$\tau = \ell / c = 12 \cdot 25.4 \cdot 10^{-3} \text{ m} / 299792458 \text{ m/s}$$
$$\approx 1.0167 \cdot 10^{-9} \text{ s} = \underline{1.0167 \text{ ns}}$$

Eks: Hvor mye er en (engelsk!) pint i SI-enheter?

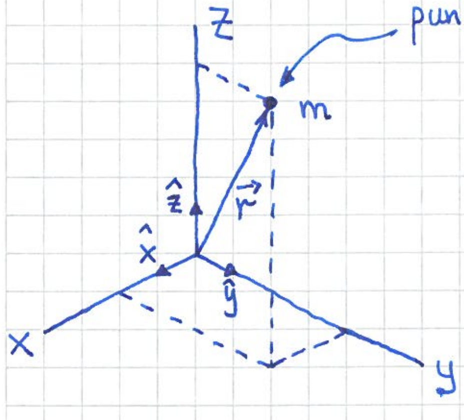
Løsn: $1 \text{ pint} = 0.56826125 \text{ L} \approx \underline{0.568 \text{ dm}^3}$

$$= 0.568 \cdot (10^{-1} \text{ m})^3 = \underline{5.68 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3}$$

Kinematikk [YF 2,3 ; TM 2,3 ; LL 1 ; HS 2.1]

= beskrivelse av bevegelse

Posisjon:



punktpartikkel (evt. massesenter / tyngdepunkt, "CM", i legeme / partikkelsystem)

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z}$$

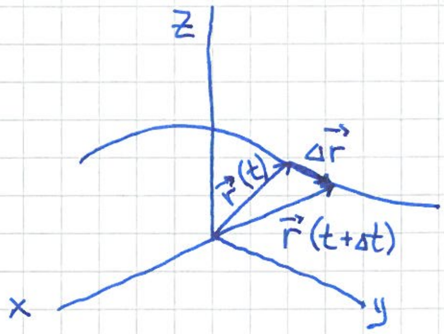
= posisjonen til m ved tid t (i kartesiske koord.)

$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ = enhetsvektorer i hhv x-, y-, z-retning

$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$; $[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1$ (dimensjonsløse)

$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$, $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \dots = 0$

m's bevegelse beskrives ved <u>banen</u> $\vec{r}(t)$:



Forflytning (i løpet av tid Δt):

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

(= posisjonsendring)

<u>Hastighet</u> = forflytning pr tidsenhet :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Δt er (positiv) <u>skalar</u>, så $\vec{v} \parallel \Delta\vec{r}$, dvs $\vec{v}$ er tangentiell til banen

<u>Akselerasjon</u> = hastighetsendring pr tidsenhet:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Standard notasjon for derivert mhp tid t :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{etc.}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

Med kartesiske komponenter:

$$\left.\begin{aligned} \vec{v} &= v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \\ &\parallel \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{etc.}$$

Tilsvarende: $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ etc.

M.a.o: Finner $\vec{v}$ og $\vec{a}$ fra $\vec{r}$ og $\vec{v}$ med <u>derivasjon</u> (mhp t)

$\Rightarrow$ Må kunne finne $\vec{r}$ og $\vec{v}$ fra $\vec{v}$ og $\vec{a}$ med <u>integrasjon</u>:

Først i én dimensjon (dvs rettlinjet, 1D):

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v \cdot dt$$

$$\Rightarrow \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

Tilsvarende:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a \cdot dt$$

$$\Rightarrow \int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \Rightarrow v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

Generalisering til 3D: $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, $\vec{a} = d\vec{v}/dt$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,dt \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,dt$$

$$\int_{\vec{v}(t_0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt$$

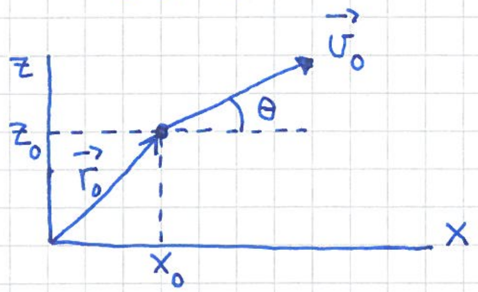
Eks: $\vec{a}$ = konstant, og <u>initialbetingelser</u> $\vec{r}(t_0)=\vec{r}_0$, $\vec{v}(t_0)=\vec{v}_0$

Dermed: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\cdot(t-t_0)$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\cdot(t-t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot(t-t_0)^2$$

Eks: Skrått kast i tyngdefeltet.

Initialbet: (ved $t_0=0$)



$\downarrow$ $\vec{a} = -g\cdot\hat{z}$

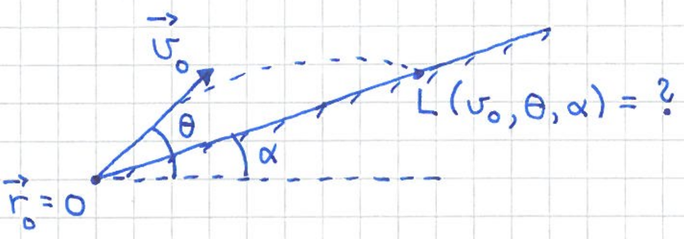
$(g \approx 9.8\ \mathrm{m/s^2})$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + v_{0x}\cdot t + \frac{1}{2}\underbrace{a_x}_{=0} t^2 = x_0 + v_0 t\cos\theta$$

$$z(t) = z_0 + v_{0z}\cdot t + \frac{1}{2}\underbrace{a_z}_{=-g} t^2 = z_0 + v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}g t^2$$

Eliminasjon av t gir banen $z(x)$. [Parabel; vis dette!]

Øving 1: Skrått kast i motbakke.



Eks: Hastighetsavhengig akselerasjon, $a = a(v)$.

Gitt $v(0) = v_0$, bestem $v(t)$.

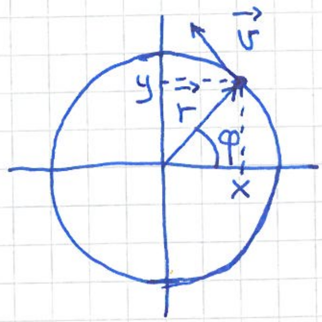
Løsn: $a(v) = dv/dt \Rightarrow dt = dv/a(v)$

$$\Rightarrow t = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{a(v)} \Rightarrow \ldots\ldots$$

[Øving 1]

Sirkelbevegelse   [YF 3.4; TM 3.3; LL 1.7, 1.8; HS 2.1.2]   ⑥

Først: $v = |\vec{v}| = \text{konst.}$ (uniform sirkelbevegelse)



Fra figur: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2} = \text{konst.}$

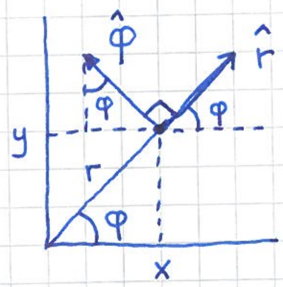
$\vec{r} = r\cos\varphi\ \hat{x} + r\sin\varphi\ \hat{y}$

$\tan\varphi = y/x$

Polarkoordinater: r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom x-aksen og $\vec{r}$

(positiv mot klokka)



$\hat{r} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$

= enhetsvektor radielt (bort fra origo)

$\hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$

= enhetsvektor angulært (mot klokka)

$\hat{r}\cdot\hat{\varphi} = 0$, $\hat{r}\cdot\hat{r} = \hat{\varphi}\cdot\hat{\varphi} = 1$

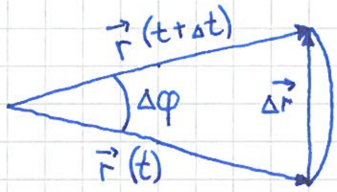
Vinkelhastighet = vinkelendring pr tidsenhet:

$$\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Vinkel = buelengde delt på radius:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r} \Rightarrow [\varphi] = \left[\frac{s}{r}\right] = \frac{m}{m} = 1 \quad \text{(evt. rad)}$$

$$\Rightarrow [\omega] = [\varphi/t] = 1/s = s^{-1}$$



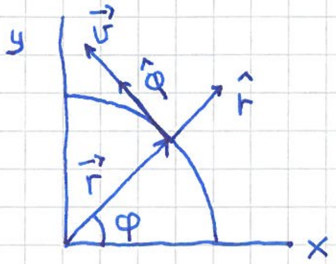
Δs = sirkelbueelement

Hvis $\Delta t \to 0$: $\Delta\varphi \to 0$, $\Delta\vec{r} \perp \vec{r}$, $|\Delta\vec{r}| \approx \Delta s = r \cdot \Delta\varphi$

Dermed:

$$\underline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\,\Delta\varphi}{\Delta t} = r\frac{d\varphi}{dt} = \underline{r\,\omega}$$

Retning på $\vec{v}$: $\vec{v} \parallel \Delta\vec{r}$ og $\Delta\vec{r} \perp \vec{r}$ $\Rightarrow$ $\underline{\vec{v} \perp \vec{r}}$



$$\vec{v} = v\,\hat{\varphi} = r\omega\,\hat{\varphi}$$

v = konst. $\Rightarrow$ ω = konst. $\Rightarrow$ φ endres lineært med t :

$$\omega = d\varphi/dt \Rightarrow \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} d\varphi = \int_0^t \omega\,dt \Rightarrow \varphi(t) = \varphi(0) + \omega t = \omega t$$

anta $\varphi(0) = 0$

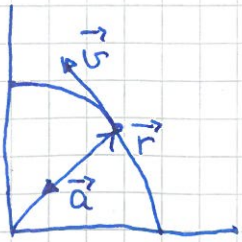
Dermed:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} = r\cos\omega t\,\hat{x} + r\sin\omega t\,\hat{y}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\,\hat{x} + \dot{y}(t)\,\hat{y} = -r\omega\sin\omega t\,\hat{x} + r\omega\cos\omega t\,\hat{y}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\hat{x} + \ddot{y}(t)\,\hat{y} = -r\omega^2\cos\omega t\,\hat{x} - r\omega^2\sin\omega t\,\hat{y}$$

Dvs: $\boxed{\vec{a} = -\omega^2\vec{r}}$ Akselerasjon ved uniform sirkelbevegelse (sentripetalakselerasjon)



$\vec{r} = r\,\hat{r}$, $v = \omega r$

$$\Rightarrow \vec{a} = -r\omega^2\hat{r} = -\frac{v^2}{r}\hat{r}$$

Flere nyttige størrelser for sirkelbevegelse:

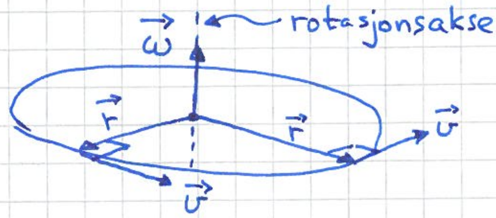
Vinkelakselerasjon: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ $\quad [\alpha] = s^{-2}$

Periode: T = tid pr omdreining $\quad [T] = s$

Frekvens: f = antall omdreininger pr tidsenhet $\quad [f] = Hz = s^{-1}$

Dermed: $v = \frac{2\pi r}{T}$, $\quad T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$, $\quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

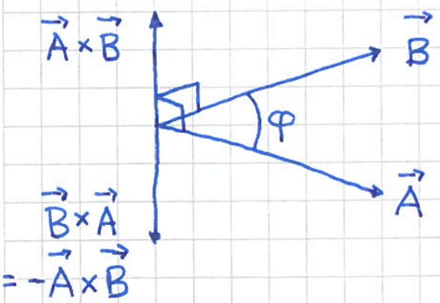
Vinkelhastighet som vektor:



La $\vec{\omega}$ peke langs rot. aksen

$\Rightarrow$ kan da skrive $\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$

Kryssprodukt:



- $\vec{A} \times \vec{B} \perp \vec{A}$ og $\vec{B}$
- Fortegn via høyrehåndsregel
- $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin\varphi$
  $= A \cdot B \cdot \sin\varphi$

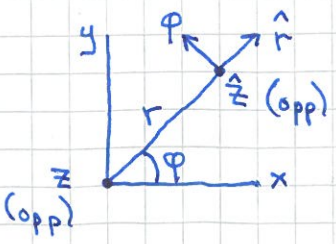
For sirkelbevegelsen:

$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin\frac{\pi}{2} = \omega r = v$, OK!

$\vec{\omega}$ opp $\Rightarrow$ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ mot klokka (og omvendt)

Enhetsvektorer og kryssprodukt:

$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$, $\quad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$, $\quad \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$, $\quad \hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0$



$\hat{r} \times \hat{\varphi} = \hat{z}$, $\quad \hat{\varphi} \times \hat{z} = \hat{r}$, $\quad \hat{z} \times \hat{r} = \hat{\varphi}$

Newtons lover [YF 4,5; TM 4,5; LL 2,3; HS 2]

Empiriske lover (dvs: basert på eksperimenter, erfaring):

N1: $\boxed{\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{konst.}}$

Null netto ytre kraft $\Rightarrow$ legemet forblir i ro eller i rettlinjet bevegelse med uendret hastighet.

N2: $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$

Netto ytre kraft $\vec{F}$ $\Rightarrow$ legemet får akselerasjon proporsjonal med $\vec{F}$; m = legemets masse

N3: $\boxed{\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}}$

Hvis A virker på B med kraft $\vec{F}_{AB}$, så virker B på A med kraft $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$. Legemene A og B <u>vekselvirker</u>.

Enhet: $[F] = [m \cdot a] = kg \cdot m/s^2 = N$ (newton)

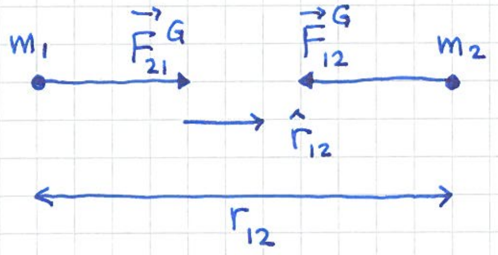
Fundamentale krefter i naturen

[YF 5.5; TM 4.2; LL 2.1; HS 2.2.2]

- Gravitasjon: Svak tiltrekning mellom legemer pga <u>masse</u>
- Elektromagnetisk: Tiltrekning eller frastøtning pga <u>elektrisk ladning</u>

(• Svake og sterke kjernekrefter: Kort rekkevidde, hhv ca 10^{-18} m og 10^{-15} m, beskriver hhv radioaktivitet og at kjernepartiklene holdes sammen.)

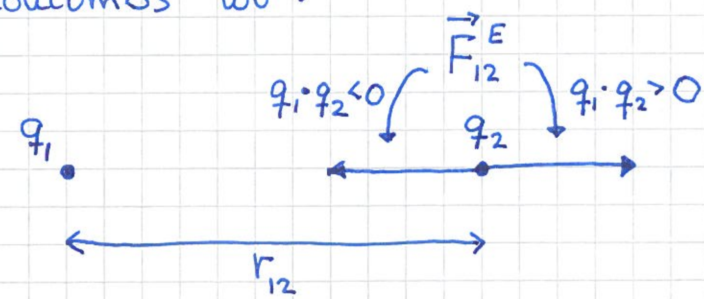
Newtons gravitasjonslov :



$$\boxed{\vec{F}_{12}^{G} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}}$$

$$G \simeq 6{,}67 \cdot 10^{-11} \; N m^2 / kg^2$$

Coulombs lov :



$$\boxed{\vec{F}_{12}^{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}}$$

$[q] = C$ (coulomb)

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \; N m^2 / C^2 \quad ; \quad \varepsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \; C^2 / N m^2$$

(vakuumpermittiviteten)

Mellom 2 elektroner : $F^G / F^E \sim 10^{-43}$

[Sjekk selv ! $m \sim 10^{-30}$ kg , $q \sim 10^{-19}$ C]

Mellom jorda og månen : $F^G / F^E \sim 10^{15}$

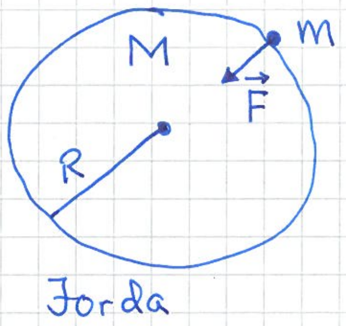
[Selv om vi antar netto ladning $q \sim 10^6$ C på begge]

"Dagligdagse" objekter er (omtrent) elektrisk nøytrale

$\Rightarrow$ coulombkreftene er i stor grad nøytralisert

$\Rightarrow$ "hverdagen" styres av både F^G og F^E

Masse og tyngde [YF 4.4; TM 4.4; LL 2.5; HS 2.2.1]



$M \simeq 6 \cdot 10^{24}$ kg, $R \simeq 6370$ km

$\Rightarrow$ m ved jordas overflate trekkes mot jordas sentrum med **tyngdekraften** $\vec{F}$.

$$F = |\vec{F}| = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot g$$

med $g = G \cdot M / R^2 \simeq 9.8 \ m/s^2$ = tyngdens akselerasjon

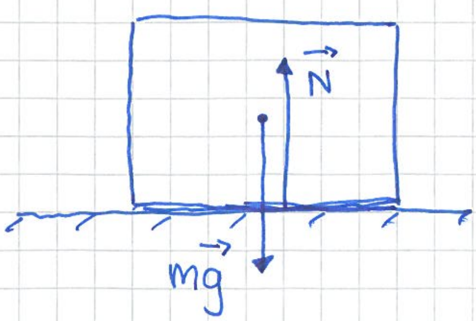
Hvis mg er eneste kraft : fritt fall!

Da blir: $mg \overset{N2}{=} ma$, dvs $\underline{a = g}$

Coulombkrefter i mekanikken: Kontaktkrefter

[YF 4.1; TM 4.5; LL 3; HS 2.3]

Trykk-kraft (Normalkraft):

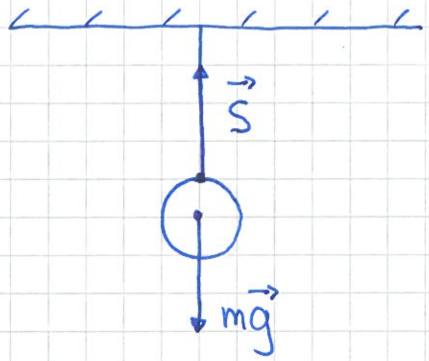


kloss i ro $\overset{N1}{\Rightarrow}$ $N = mg$

Normalkraften N er netto frastøtende coulombkraft fra underlaget på klossen.

[Spm: Hva er motkreftene (N3!) til $\vec{N}$ og $m\vec{g}$?]

Strekk-kraft (Snordrag):

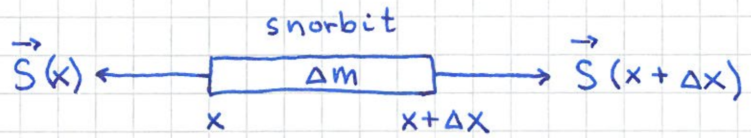


kule i ro $\overset{N1}{\Longrightarrow}$ $S = mg$

Snordraget S er netto tiltrekkende coulombkraft fra snora på kula

[Spm: Hva er motkraften til $\vec{S}$?]

Lett snor/stang antas ofte masseløs, $m_{snor} \approx 0$.

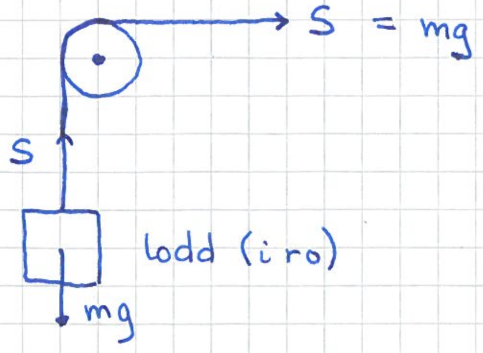


N2 : $\vec{S}(x+\Delta x) + \vec{S}(x) = \Delta m \cdot \vec{a}$

$\Rightarrow$ $\vec{S}(x+\Delta x) = -\vec{S}(x)$ huis $\Delta m = 0$ (og/eller $\vec{a} = 0$)

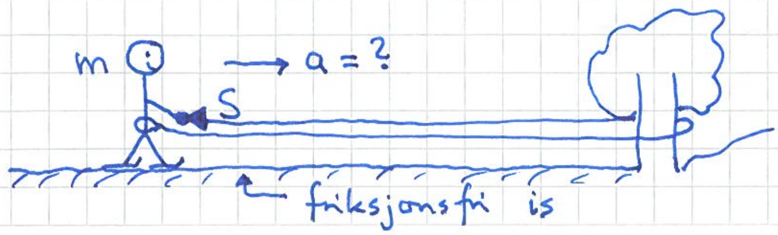
$\Rightarrow$ like stor $S = |\vec{S}|$ langs hele snora

Retningsendring med kant eller trinse :



[Spm: Hva huis vi har friksjon mellom tau og trinse/sylinder ?]

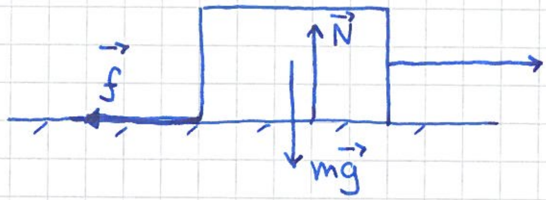
Spm:



Friksjon [YF 5.3 ; TM 5.1, 5.2 ; LL 3.1 ; HS 2.3]

coulombkraft / kontaktkraft $\vec{f}$ rettet mot (potensiell) relativ bevegelse

Tørr friksjon:



Statisk (kloss i ro): N1 $\Rightarrow$ $f = T$

Empirisk: $f_{max} = \mu_s N$

Kinetisk (kloss i bevegelse): $f = \mu_k N$

Friksjonskoeffisienter: μ_s, μ_k Enhet: $[\mu] = 1$

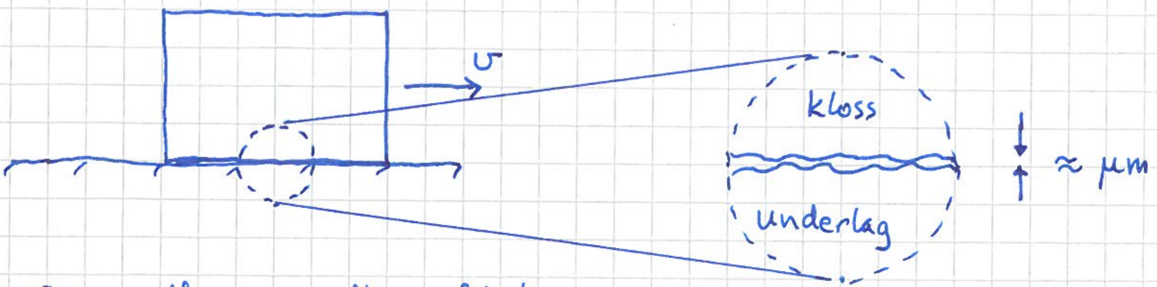
Noen tallverdier:

Tre mot tre: $\mu_s = 0.25 - 0.50$ $\mu_k \simeq 0.2$

Gummi mot tørr asfalt: $\mu_s \simeq 1.0$ $\mu_k \simeq 0.8$

—"— våt —"—: $\mu_s \simeq 0.3$ $\mu_k \simeq 0.25$

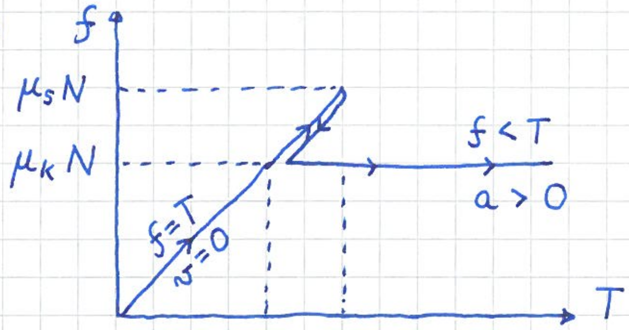
Hvorfor er $\mu_k < \mu_s$?



$v = 0$: godt grep mellom flatene

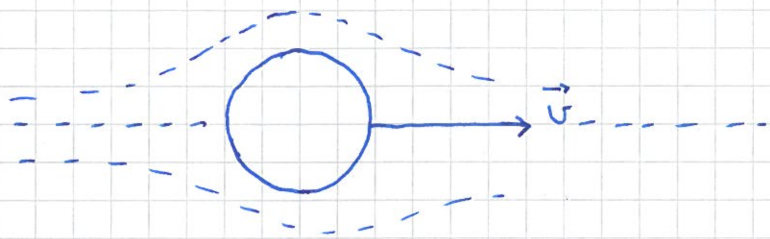
$v > 0$: "flyter" oppå

Dermed:



Friksjon i fluider (Våt friksjon)

[YF 5.3; TM 5.2; (LL 8); HS 2.3.4]



- liten v $\Rightarrow$ pen, laminær strømning av fluidet

$$\vec{f} = -k\vec{v} = -kv\,\hat{v}$$ [kan utledes fra Newtons lover]

Kule: $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$ Stokes' lov (Lab nr 1)

R = kulas radius

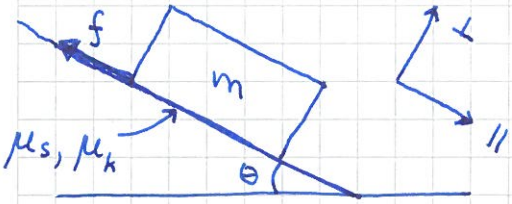
η = fluidets viskositet

- stor v $\Rightarrow$ turbulent strømning

$$\vec{f} = -Dv^2\,\hat{v}$$ (D for "drag")

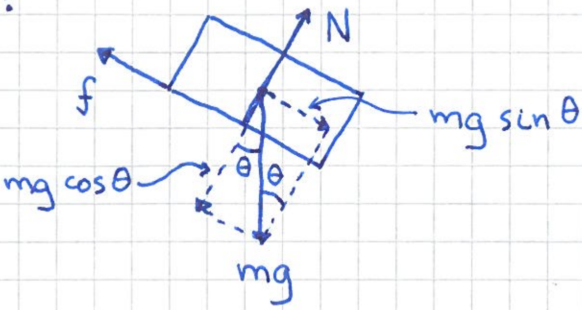
[empirisk]

Lett eks: Kloss på skråplan



- Hva er f, med kloss i ro?
  — " — i bevegelse?
- Minimal μ_s for kloss i ro?
- $\mu_s < \mu_s^{min} \Rightarrow a_\parallel = ?$

Løsning:



(Fritt-Legeme-Diagram)

- I ro: $\sum F_\parallel = 0 \Rightarrow \underline{f = mg \sin\theta}$

  I bevegelse: $f = \mu_k N = \underline{\mu_k mg \cos\theta}$

  (da $\sum F_\perp = 0 \Rightarrow N = mg \cos\theta$)

- I ro: $f \leq \mu_s N \Rightarrow$ begynner å gli når $f = \mu_s^{min} \cdot N$

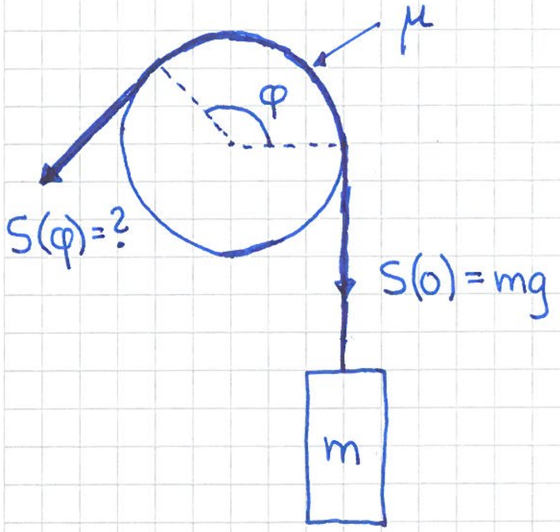
  $\Rightarrow \mu_s^{min} = f/N = mg\sin\theta / mg\cos\theta = \underline{\tan\theta}$

- Hvis $\mu_s < \mu_s^{min}$, dvs $\theta > \arctan \mu_s$:

  $$a_\parallel = \sum F_\parallel / m = (mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta)/m$$

  $$= \underline{g(\sin\theta - \mu_k \cos\theta)}$$

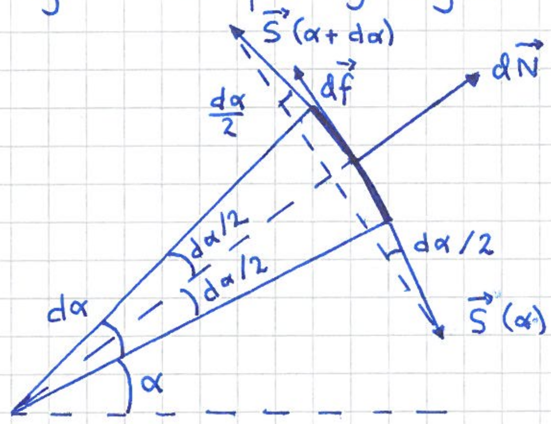
Vanskelig eks: Tau rundt sylinder



Eksp. med plastrør, hyssing og lodd viser at snordrag $S(\varphi)$ som er nødvendig for å holde lodd oppe, evt. heise opp lodd, avhenger sterkt av φ, der φ = vinkelen med kontakt mellom hyssing og ~~rør~~ rør.

Bestem $S(\varphi)$.

Løsning: Se på hyssingbit mellom α og $\alpha + d\alpha$:



$\vec{S}$ = kraft fra resten av hyssingen på hyssingbiten

$d\vec{N}$ = normalkraft fra rør på hyssingbit

$d\vec{f}$ = friksjonskraft ——— " ——— ; $df \leq \mu \cdot dN$

Minste nødvendige $S(\varphi)$ finnes når $df = \mu\, dN$.

Lodd i ro når $\vec{S}(\alpha+d\alpha) + \vec{S}(\alpha) + d\vec{N} + d\vec{f} = 0$ (N1)

Tangentielt: $S(\alpha+d\alpha)\cdot\cos\frac{d\alpha}{2} - S(\alpha)\cdot\cos\frac{d\alpha}{2} + df = 0$

Normalt: $S(\alpha+d\alpha)\cdot\sin\frac{d\alpha}{2} + S(\alpha)\cdot\sin\frac{d\alpha}{2} - dN = 0$

Når $d\alpha \to 0$:

$$\cos\frac{d\alpha}{2} \approx 1, \quad \sin\frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$$

$$S(\alpha+d\alpha) + S(\alpha) \approx 2S(\alpha)$$

$$S(\alpha+d\alpha) - S(\alpha) = dS$$

Dermed:

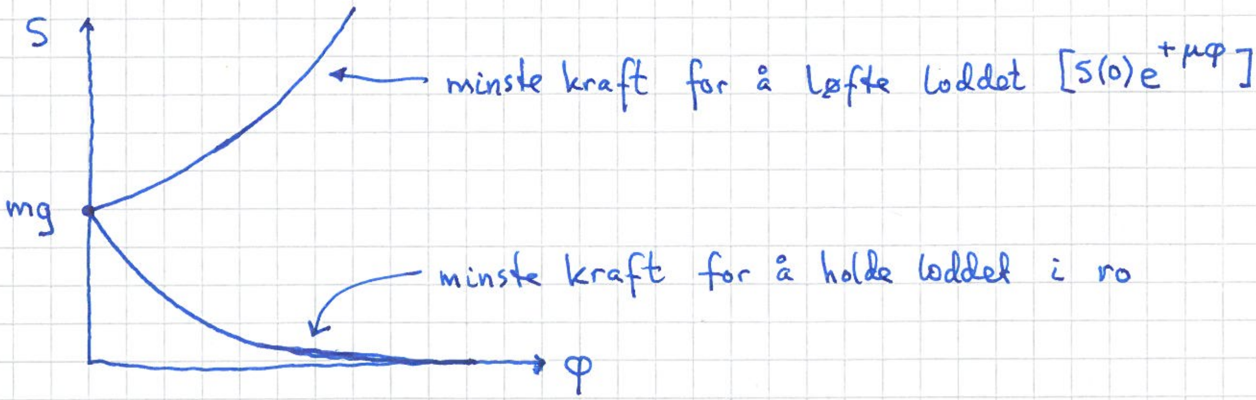
$$dS + \mu\, dN = 0$$

$$2S \cdot \frac{d\alpha}{2} - dN = 0$$

$$\Rightarrow \int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = -\int_0^{\varphi} \mu\, d\alpha$$

$$\Rightarrow \underbrace{\ln S(\varphi) - \ln S(0)}_{= \ln \frac{S(\varphi)}{S(0)}} = -\mu\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{S(\varphi) = S(0)\, e^{-\mu\varphi}} \qquad S(0) = mg$$

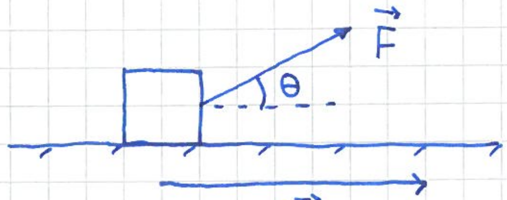


Med $\mu = 0.2$ og $2\,1/4$ "omdreining", dvs $\varphi = 2\cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} = 9\pi/2$:

$$S(\varphi)/S(0) = \exp(-0.2 \cdot 9\pi/2) \approx 0.06$$

Arbeid og energi [YF 6,7; TM 6,7; LL 4; HS 3]

Arbeid [YF 6.1–6.3; TM 6.1–6.3; LL 4.1; HS 3.1]



$\Delta \vec{r}$ = legemets forflytning

$$\Delta W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = F\cdot\Delta r\cdot\cos\theta$$ = arbeid utført av kraft $\vec{F}$ på legemet

$$[W] = [F\cdot r] = Nm = J \quad \text{(joule)}$$

Generelt:

Arbeid utført ved forflytning fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_f$:

$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j\cdot\Delta\vec{r}_j \xrightarrow{\Delta r_j \to 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Effekt [YF 6.4; TM 6,3; LL 4.1; HS 3,1]

effekt $\overset{\text{def}}{=}$ (energi) arbeid pr tidsenhet

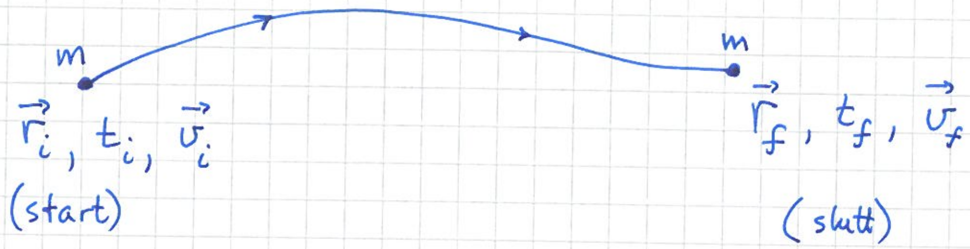
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$[P] = [W/t] = J/s = W \quad \text{(watt)}$$

Eks: Ovn på 1000 W står på i 1 time. Energiforbruk = ?

Løsn: $\Delta W = P\cdot\Delta t = 1\,kW\cdot 1\,h = \underline{\underline{1\,kWh}} = 1000\,\frac{J}{s}\cdot 3600\,s = \underline{\underline{3.6\,MJ}}$

Kinetisk energi [YF 6.2; TM 6.1; LL 4.2; HS 3.1]



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} m\,\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt = m\int_{t_i}^{t_f}\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\underbrace{\vec{v}\cdot\vec{v}}_{=v^2}\Big)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$K \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2 = \text{kinetisk energi}$$

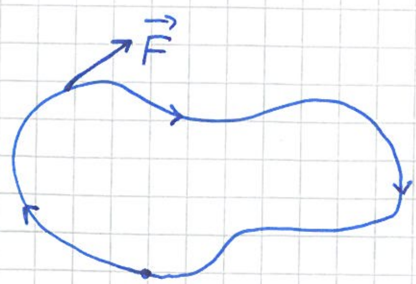
$$\Rightarrow \boxed{W = K_f - K_i = \Delta K}$$

Arbeid W utført av (netto) ytre kraft $\vec{F}$ tilsvarer endringen ΔK i legemets kinetiske energi

Konservativ kraft. Potensiell energi. Energibevarelse.

[YF 7.1-7.4; TM 7.1-7.3; LL 4.3-4.5; HS 3.2.1]

konservativt system = system uten tap av mekanisk energi (dvs uten <u>dissipasjon</u>) til andre energiformer (som varme)



$\vec{r}_i = \vec{r}_f$

(rundtur; lukket kurve)

Hvis $\vec{F}$ er konservativ, er $K_f = K_i$ (og $v_f = v_i$); dvs $W = \Delta K = 0$.

Dermed: $$\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f=\vec{r}_i} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

Standard notasjon:

$$\boxed{\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0}$$

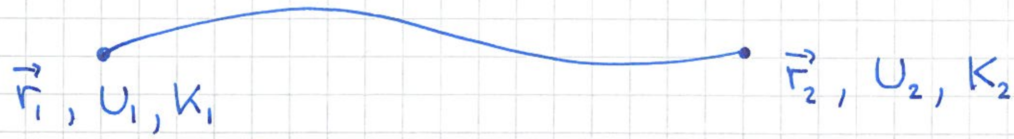
$\oint$: integral rundt lukket kurve

Potensiell energi:

$$\boxed{U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

Her er $\vec{F}$ en <u>kons.</u> kraft, og vi har <u>valgt</u> $U(\vec{r}_0) = 0$

Mekanisk energibevarelse:

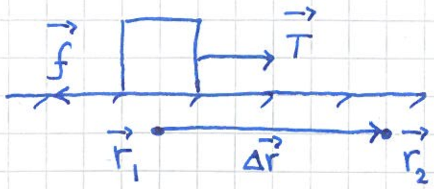


$$\underline{U_1 - U_2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \underline{K_2 - K_1}$$

$$\Rightarrow \quad K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

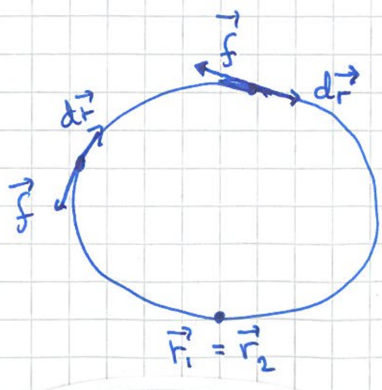
Dvs: $\boxed{\text{Total mekanisk energi, } E = K + U, \text{ er konstant for et konservativt system}}$

Friksjonsarbeid:



$$W_f = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f}\cdot d\vec{r} < 0$$ fordi $\vec{f}$ er rettet <u>mot</u> $d\vec{r}$

$\Rightarrow$ friksjonsarbeidet W_f "går tapt" (som varme)



$$\Rightarrow \oint \vec{f}\cdot d\vec{r} < 0$$

$\Rightarrow$ friksjonskraft $\vec{f}$ er <u>ikke</u> konservativ

Eks: Tyngdefeltet

$$\vec{F} = m\vec{g} = -mg\,\hat{z}$$

- Velg $U(0) = 0$ og bestem $U(z)$
- Anta $v(0) = 0$ og bestem $v(z)$ $\quad (z<0)$

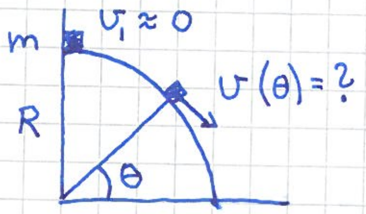
Løsning:

- $U(z) = -\int_0^z \underbrace{(-mg\hat{z})}_{\vec{F}} \cdot \underbrace{(\hat{z}\,dz)}_{d\vec{r}} = \underline{\underline{mgz}}$

- $E(0) = U(0) + K(0) = 0 = U(z) + K(z)$
$$= mgz + \tfrac{1}{2}m\,v(z)^2$$

$$\Rightarrow \quad v(z) = \underline{\underline{\sqrt{-2gz}}} \qquad (z<0)$$

Eks: Gli på kuleflate (uten friksjon)



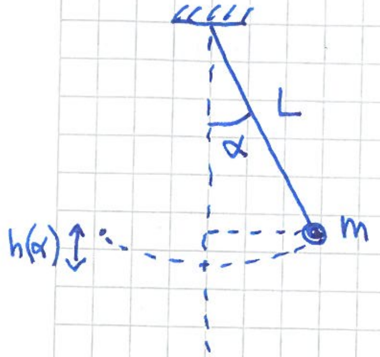
Løsn: E er bevart

$$\Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}m\,v(\theta)^2 + mgR\sin\theta = mgR$$

$$\Rightarrow \quad v(\theta) = \underline{\underline{\sqrt{2gR(1-\sin\theta)}}}$$

[Spm: Fra der hvor normalkrafta N fra underlaget forsvinner (N=0) har vi et "skrått kast". Ved hvilken vinkel θ skjer dette?]

Eks: Matematisk pendel



Bestem $E(\alpha, \dot{\alpha})$.

Løsn: $U(\alpha) = mgh(\alpha) = mgL(1-\cos\alpha)$ $\quad$ [Velger $U(0)=0$]

$K(\dot{\alpha}) = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m(L\dot{\alpha})^2$

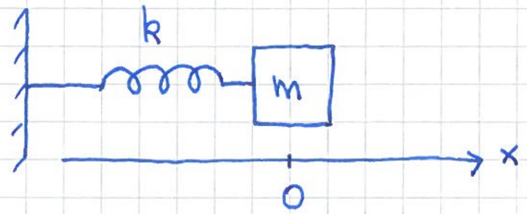
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{E(\alpha, \dot{\alpha}) = \tfrac{1}{2}mL^2\dot{\alpha}^2 + mgL(1-\cos\alpha)}}$$

Svingninger [YF 14; TM 14; LL 9; HS 6]

= oscillasjoner = periodisk oppførsel omkring likevekt

Eks: masse/fjær, pendel, gitarstreng, vibrerende atomer i krystall, ...

Harmonisk oscillator [YF 14.2; TM 14.1; LL 9.1–9.3; HS 6.1]



Likevekt ($F=0$) med m i $x=0$.

Strukket fjær ($x>0$) :

Sammenpresset fjær ($x<0$) :

Ideell fjær : $F \sim |x|$

$$\boxed{\vec{F} = -k\,x\,\hat{x}}$$

Hookes lov

N2 : $-kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Innfør $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$ Ligning for harm. osc. i 1D

Generell løsning:

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ evt. $x(t) = B\cos\omega t + C\sin\omega t$

2. ordens diffligning. $\Rightarrow$ 2 integrasjonskonstanter, A og φ evt B og C

[A og φ fastlegges via 2 initialbetingelser, f.eks. $x(0)=x_0$ og $\dot{x}(0)=v_0$]

[$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\Rightarrow$ sammenheng mellom A,φ og B,C]

A = amplitude = max utsving

ω = vinkelfrekvens = vinkelhastighet $\quad [\omega] = s^{-1}$

$T = 2\pi/\omega$ = periode = tid pr svingning $\quad [T] = s$

$f = T^{-1}$ = frekvens = antall svingn. pr tidsenhet $\quad [f] = Hz = s^{-1}$

$\omega t + \varphi$ = svingningens fase

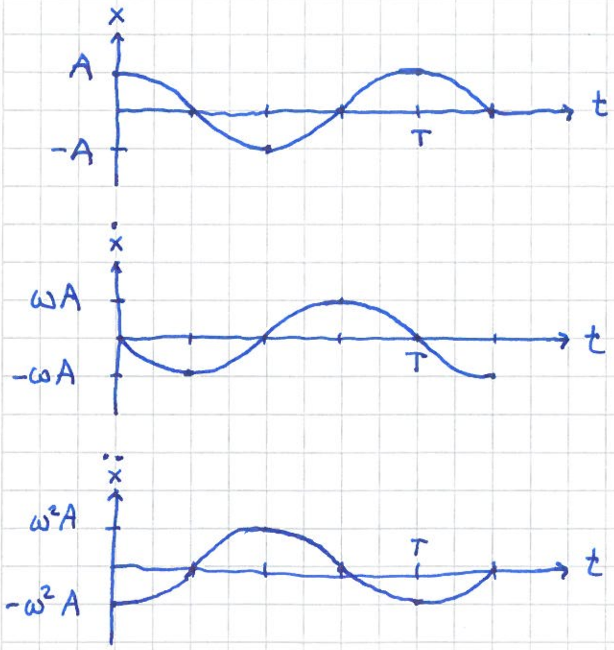
φ = fasekonstant $\quad [\varphi] = 1$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

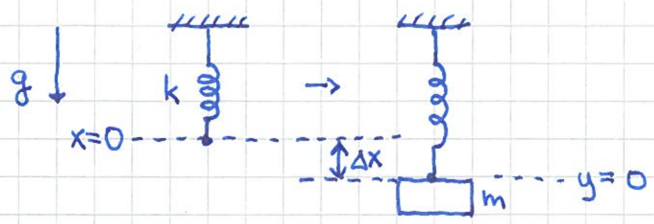
$$\Rightarrow \dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = \omega A \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi + \pi) = -\omega^2 x(t)$$

Anta f.eks. $\varphi = 0$ og $A > 0$:



Hvis vertikalt i tyngdefeltet (Øving 3 og Lab):



$\Rightarrow$ Harmonisk svingn. om $y = 0$, med $\omega = \sqrt{k/m}$ som før.

Energi i harmonisk oscillator

[YF 14.3; TM 14.2; LL 9.4 ~~&~~ ~~...~~]

Massens kinetiske energi:

$$K(t) = \tfrac{1}{2} m\, \dot{x}(t)^2 = \tfrac{1}{2} \underbrace{m\omega^2}_{=k} A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \tfrac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Potensiell energi i fjæra:

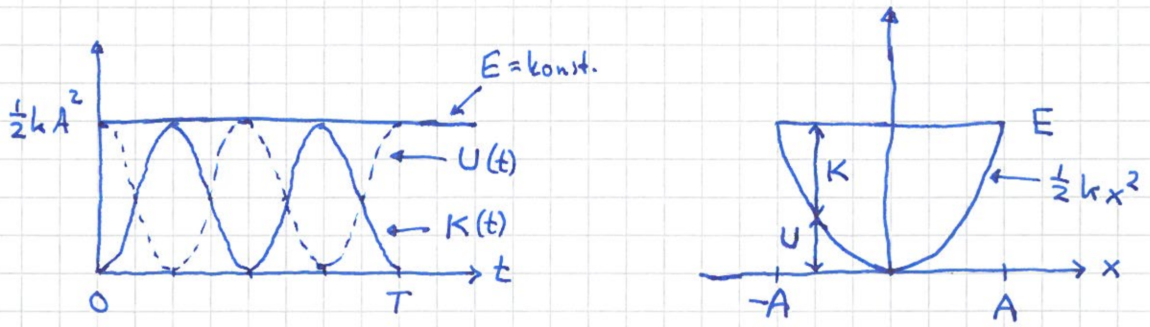
$$U = -\int_0^x F(x)\cdot dx = -\int_0^x (-kx)\,dx = \tfrac{1}{2} k x^2$$

$$\Rightarrow U(t) = \tfrac{1}{2} k\, x(t)^2 = \tfrac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Total energi: $E = K + U = \tfrac{1}{2} k A^2 = \tfrac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \text{konstant}$

$\Rightarrow$ vi har konservativt system; E er bevart

Anta $\varphi = 0$:



Enkel harmonisk oscillator, oppsummering:

- F er proporsjonal med utsvinget fra likevekt
- U —— " —— kvadratet av utsvinget
- Bevegelseslikning: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
- "Utsving" kan være lengde, vinkel etc

Fra sist:

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \,; \quad \omega = \sqrt{k/m}$

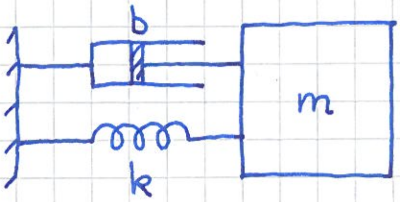
$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

Enkel harmonisk oscillator

Dempet svingning [YF 14.7; TM 14.4; LL 9.7; HS 6.2.1]

Friksjon $\Rightarrow$ fri svingninger dempes (og dør ut)

Antar $f = -b\dot{x}$ (som for langsom bevegelse i fluid; s.14)



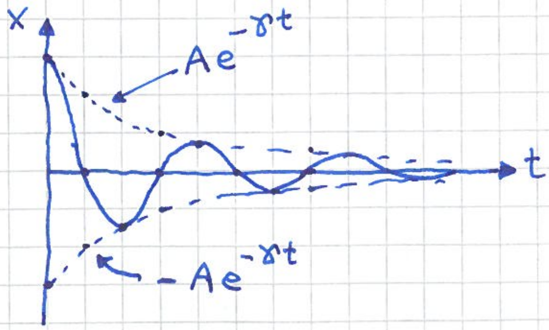
N2: $-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$

$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \,; \quad \gamma = \frac{b}{2m} \,, \; \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$[\gamma] = [\omega_0] = s^{-1}$

Underkritisk demping, $\gamma < \omega_0$ (dvs $b < 2m\sqrt{k/m} = \sqrt{4k \cdot m}$)

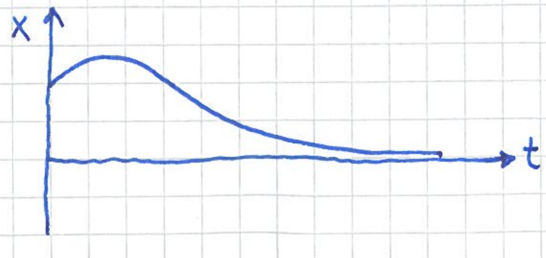
$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) \,; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$



- redusert frekvens pga demping ($\omega < \omega_0$)
- amplituden, $Ae^{-\gamma t}$, avtar eksponentielt med t
- A, φ fastlegges med 2 initialbetingelser

Overkritisk demping, $\gamma > \omega_0$

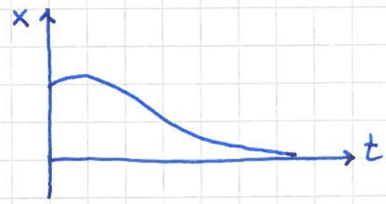
$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t} \,; \quad \alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$



(dvs ingen svingninger)

Kritisk demping, $\gamma = \omega_0$

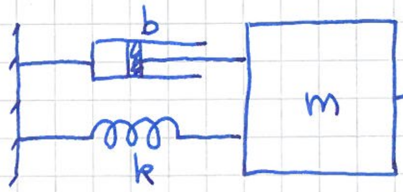
$$x(t) = A e^{-\gamma t} + B t e^{-\gamma t}$$



Eks: Støtdempere i bil dempes nær kritisk

$\Rightarrow$ mest behagelig på humpete vei

Tvungen svingning. Resonans [YF 14.8; TM 14.5; LL 9.9; HS 6.3]



$F_y(t) = F_0 \cos \omega t$ = ytre kraft, antas harmonisk

N2: $-kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

[inhomogen 2. ordens diff. ligning]

Løsning: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

der homogen løsn. x_h oppfyller $\ddot{x}_h + 2\gamma\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$

og partikulær løsn. x_p — " — $\ddot{x}_p + 2\gamma\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$

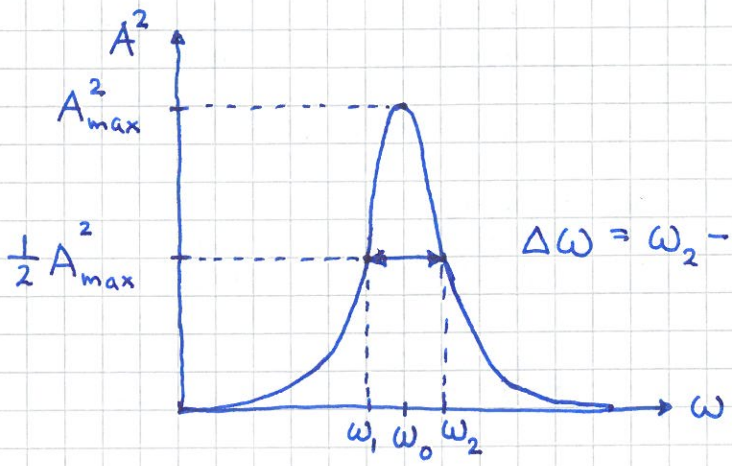
I starten (dvs: før $e^{-\gamma t}$ blir mye mindre enn 1) bidrar både x_h og x_p til et (som regel) komplekst <u>innsvingningsforløp</u> (jf Laboppg.).

Etter "lang tid", slik at $\gamma t \gg 1$ og $e^{-\gamma t} \approx 0$, vil $x_h(t) \to 0$, og $x(t) \approx x_p(t)$.

"Gjetter" $x_p(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$, verifiseres ved innsetting, og finner den <u>frekvensavhengige amplituden</u>

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\gamma = \frac{b}{m}$$

som viser at vi får resonans: Med svak demping (dvs liten γ) og ytre kraft med frekvens ω i nærheten av systemets egenfrekvens $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, så blir amplituden A stor:



$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ = halvverdibredden

$\Delta\omega$ refererer til oscillatorens energi, som er prop. med A^2 (se s. 24). Liten γ $\Rightarrow$ skarp resonans, med $\Delta\omega \approx 2\gamma$.

Resonanstoppens Q-faktor (Q for "quality"):

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma} \qquad (\gg 1 \text{ hvis } \gamma \ll \omega_0)$$

Frekvensavhengig fasekonstant:

$$\varphi(\omega) = \arctan\left\{\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right\}$$

Tilført effekt av $F_y(t) = F_0 \cos\omega t$ ved resonans, $\omega \approx \omega_0$:

$$P(t) = F_y(t)\cdot \dot{x}_p(t) = F_0 \cos\omega t \cdot \omega A(\omega)\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \varphi = \arctan 0 = 0, \quad \text{og} \quad A = A(\omega_0) = A_{max} = \frac{F_0}{b\cdot\omega_0}$$

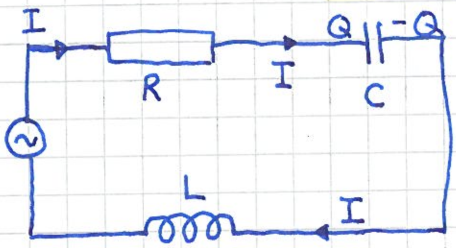
$$\Rightarrow P(t) = \frac{F_0^2}{b}\cdot\cos^2\omega_0 t \geq 0 \quad \text{hele tiden;}$$

dvs maksimal tilført effekt ved resonans!

Elektrisk svingekrets

(Denne siden er ikke pensum i TFY4115; kun orienteringsstoff!)

$V(t) = V_0 \cos \omega t$



$I = dQ/dt = \dot{Q}$

R : motstand

C : kondensator

L : spole

Spenning over motstand R : $V_R = R \cdot I = R \cdot \dot{Q}$ (Ohms lov)

—— " —— kapasitans C : $V_C = Q/C$

—— " —— induktans L : $V_L = L \cdot dI/dt = L \cdot \ddot{Q}$

Kirchhoffs spenningsregel $\Rightarrow$ $L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C} Q = V_0 \cos \omega t$

Dvs <u>nøyaktig samme diff.ligн.</u> for Q, ladningen på kondensatoren, som for x, massens utsving fra likevekt, i det mekaniske svingesystemet : $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$

Vi har dermed <u>analoge</u> ("tilsvarende") størrelser :

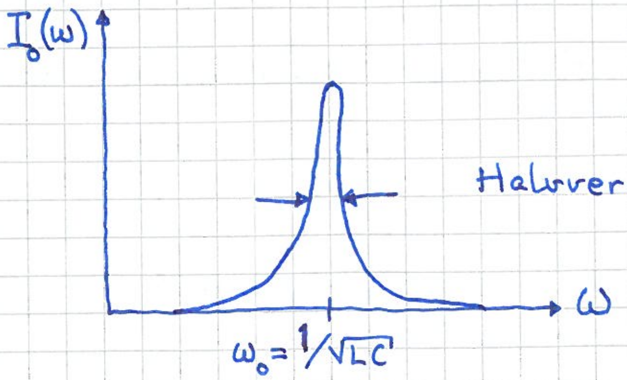
$m \leftrightarrow L, \quad b \leftrightarrow R, \quad k \leftrightarrow 1/C, \quad x \leftrightarrow Q, \quad \dot{x} \leftrightarrow I$

$\omega_0^{mek} = \sqrt{k/m} \longleftrightarrow \omega_0^{el} = \sqrt{1/LC}$ osv.

$Q(t) = Q_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow I(t) = \dot{Q}(t) = \omega Q_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$

med $Q_0(\omega) = (V_0/L) / \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$; $2\gamma = R/L$

Resonans, dvs stor strømamplitude $I_0(\omega) = \omega Q_0(\omega)$, når $\omega \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$:



Halvverdibredde $\Delta\omega \approx 2\gamma = R/L$

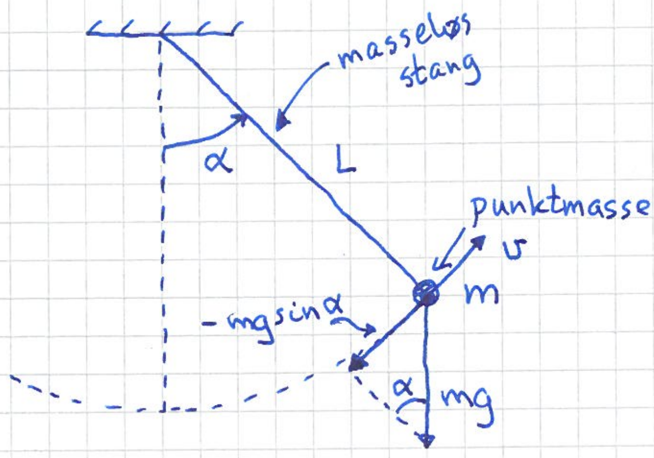
Eks : $L = 22$ mH, $C = 0.15\ \mu$F, $R = 20\ \Omega$

$\Rightarrow f_0 = 2.77$ kHz , $\Delta f \approx 0.29$ kHz, $Q = f_0/\Delta f \approx 20$

Eksempel, inkl. numerisk løsningsmetode [TM 5.4]

(Øving 4, oppgave 1)

Matematisk pendel (se s. 21, samt øving 2, oppg. 4):



N2 ∥ sirkelbuen:

$$-mg\sin\alpha = m a_{\parallel}$$

$$a_{\parallel} = L\ddot{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\alpha} + \frac{g}{L}\sin\alpha = 0$$

Hvis små utsving, $|\alpha| \ll 1$: $\sin\alpha \approx \alpha$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\alpha} + \frac{g}{L}\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Enkel harmonisk oscillator med $\omega = \sqrt{g/L}$, dvs $T = 2\pi\sqrt{L/g}$

Hvis større utsving: $\ddot{\alpha} + \frac{g}{L}\sin\alpha = 0$ kan ikke løses analytisk; numerisk løsningsmetode er nødvendig.

Enkleste metode er såkalt "forward Euler":

Vi har (pr def.)

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{\dot{\alpha}(t+dt) - \dot{\alpha}(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \dot{\alpha}(t+dt) = \dot{\alpha}(t) + \ddot{\alpha}(t)\,dt$$

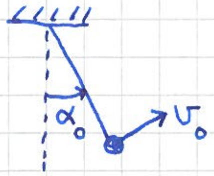
$$\dot{\alpha}(t) = \frac{\alpha(t+dt) - \alpha(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \alpha(t+dt) = \alpha(t) + \dot{\alpha}(t)\,dt$$

La $dt \rightarrow$ endelig tidssteg Δt og "$= \,\rightarrow\, \approx$":

$$\alpha(t+\Delta t) \approx \alpha(t) + \dot{\alpha}(t)\,\Delta t$$

$$\dot{\alpha}(t+\Delta t) \approx \dot{\alpha}(t) + \ddot{\alpha}(t)\,\Delta t \overset{\text{her}}{=} \dot{\alpha}(t) - \Delta t \cdot \frac{g}{L} \cdot \sin\alpha(t)$$

Dermed, med initialbetingelser $\alpha(0) = \alpha_0$ og $v(0) = v_0$, dvs $\dot{\alpha}(0) = v_0 / L$:



$\boxed{t=0}$

$$\alpha(\Delta t) \approx \alpha(0) + \dot{\alpha}(0)\,\Delta t = \alpha_0 + \frac{v_0}{L}\,\Delta t$$

$$\dot{\alpha}(\Delta t) \approx \dot{\alpha}(0) + \ddot{\alpha}(0)\,\Delta t = \frac{v_0}{L} - \Delta t \cdot \frac{g}{L} \cdot \sin \alpha_0$$

$\vdots$

$$\left.\begin{aligned} \alpha[(n+1)\cdot\Delta t] &\approx \alpha[n\cdot\Delta t] + \dot{\alpha}[n\cdot\Delta t]\cdot\Delta t \\ \dot{\alpha}[(n+1)\cdot\Delta t] &\approx \dot{\alpha}[n\cdot\Delta t] + \ddot{\alpha}[n\cdot\Delta t]\cdot\Delta t \end{aligned}\right\} \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Kan nå blant annet:

- plotte $\alpha(t)$, $\dot{\alpha}(t)$ etc.
- regne ut $K(t)$, $U(t)$ og $E(t)$ og sjekke energibevarelse (se s. 21)
- sammenligne numerisk løsning med harm. osc. - tilnærmelsen
- inkludere friksjon, med $f = -bv$ evt $f = -Dv^2$ (se s. 14)
- inkludere ytre kraft $F_y(t)$

etc. etc.

Andre (og bedre) num. metoder for løsn. av ordinære diff. lign:

- Verlet
- Runge - Kutta

Verlet:

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t-\Delta t)}{2\,\Delta t}$$

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{\dot{\alpha}(t+\Delta t/2) - \dot{\alpha}(t-\Delta t/2)}{\Delta t}$$

$$= \frac{\dfrac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} - \dfrac{\alpha(t) - \alpha(t-\Delta t)}{\Delta t}}{\Delta t}$$

$$= \frac{\alpha(t+\Delta t) - 2\alpha(t) + \alpha(t-\Delta t)}{\Delta t^2}$$

Impuls og impulsbevarelse [YF 8; TM 8; LL 5; HS 3.6, 3.7]

[Terminologi: impuls ≡ bevegelsesmengde]

[Engelsk: (linear) momentum]

N2 for legeme med (konstant) masse m:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

impuls = masse · hastighet

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \qquad [p] = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

Dermed: $\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$ N2

som gir

Lov om impulsbevarelse:

Hvis sum av ytre krefter på et legeme er null, er legemets impuls bevart: $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konst.}$

Kollisjoner [YF 8.3+8.4; TM 8.3; LL 5.3; HS 3.7.1]

= (som regel kortvarige) støt mellom legemer

Elastisk støt: $\Delta K = 0$ (energien er bevart)

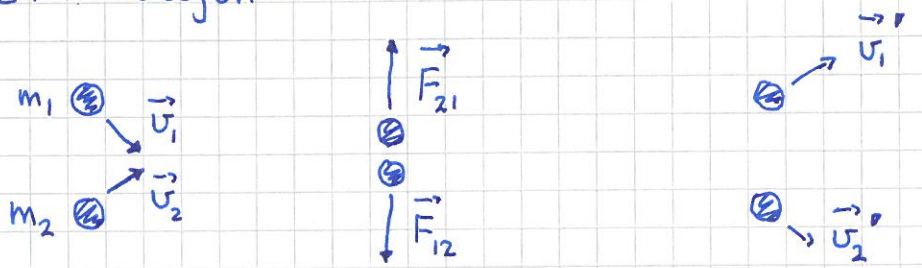
Uelastisk støt: $\Delta K < 0$ (—"— ikke bevart)

<u>Fullstendig</u> uelastisk støt: Legemene henger sammen og har <u>felles hastighet</u> etter kollisjonen. (Gir <u>maksimalt</u> energitap $|\Delta K|$.)

Tapt mekanisk energi ΔK → deformasjon, varme, lyd, ...

<u>Men</u>: Dersom $\vec{F}_{ytre} = 0$ (evt. neglisjerbar) under kollisjonen, er $\underline{\Delta \vec{p} = 0}$ for <u>alle typer</u> kollisjoner.

Har typisk <u>store</u> men <u>ukjente</u> indre krefter i en kollisjon:



Før

Kollisjon, kort varighet Δt

Etter

N3 garanterer impulsbevarelse for systemet $m_1 + m_2$:

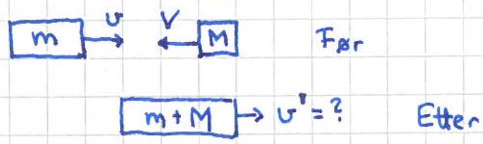
$$\vec{F}_{21} \overset{N3}{=} -\vec{F}_{12}$$

$$\overset{N2}{\Rightarrow} \quad \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{P}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst.}$$

Eks: Fullstendig uelastisk støt.



Løsn: $P_{før} = mv - MV$

$= P_{etter} = (m+M)v'$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{v' = \frac{mv - MV}{m+M}}}$$

Eks: $\langle F \rangle$ på bordtennisball = ? $\langle F \rangle / mg$ = ?

Løsning: $m = 2.7\,g$, $v_i \sim 10\ m/s$, $v_f \sim 30\ m/s$, $\Delta t \sim 1\,ms$

$$\Rightarrow \langle F \rangle \approx \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} = \frac{2.7 \cdot 10^{-3}\ kg \cdot 40\ m/s}{10^{-3}\ s} = \underline{\underline{108\ N}}$$

$$\langle F \rangle / mg \approx \frac{\Delta v}{g\,\Delta t} = \frac{\langle a \rangle}{g} \approx \frac{40 \cdot 10^3\ m/s^2}{10\ m/s^2} = \underline{\underline{4000}}$$

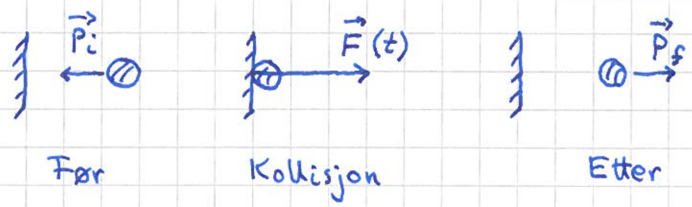
Dvs: Helt OK å neglisjere ytre kraft mg i støtet

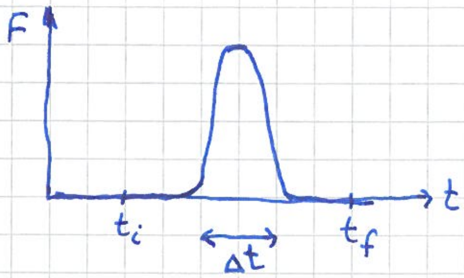
Kraftstøt [YF 8.1; TM 8.3; LL 5.2; HS 3.7.1]

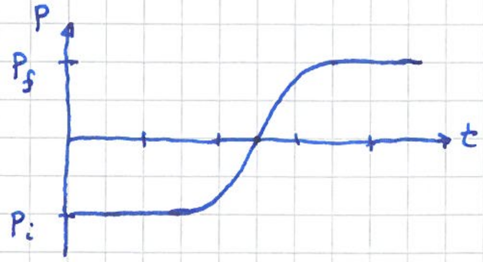
(Eng: impulse) ("kraftimpuls")

= impulsendring i støt

Ball mot vegg:







Ballens impulsendring i kollisjonen:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt \equiv \text{kraftstøtet (\underline{fra} veggen \underline{på} ballen)}$$

[Hva blir veggens impulsendring i denne kollisjonen?]

Sentralt støt [YF 8.2–8.4; TM 8.3; LL 5.3; HS 3.7.1]

Før: $\underset{m}{\bullet} \longrightarrow v \qquad V \longleftarrow \underset{M}{\bullet}$ (i)

$(- \longleftrightarrow +)$

Etter: $v' \longleftarrow \underset{m}{\bullet} \ \underset{M}{\bullet} \longrightarrow V'$ (f)

$$\Delta p = 0 \Rightarrow \underbrace{mv + MV}_{p_i} = \underbrace{mv' + MV'}_{p_f}$$ (alle typer støt)

(a) Elastisk støt, $\Delta K = 0$:

$$\underbrace{\tfrac{1}{2} mv^2 + \tfrac{1}{2} MV^2}_{K_i} = \underbrace{\tfrac{1}{2} mv'^2 + \tfrac{1}{2} MV'^2}_{K_f}$$

Omskriving:

$$m(v+v')(v-v') = M(V'+V)(V'-V) \quad (1) \quad (\Delta K = 0)$$

$$m(v-v') = M(V'-V) \quad (2) \quad (\Delta p = 0)$$

Triks: Ta (1)/(2)

$$\Rightarrow \quad v + v' = V + V'$$

dvs $\quad v' - V' = -(v - V) \quad (3)$ (relativhastigheten skifter fortegn)

Finner v' og V' fra (2) og (3):

$$v' = \frac{M}{m+M}\left\{2V + v \cdot \frac{m-M}{M}\right\}$$

$$V' = \frac{m}{M+m}\left\{2v + V \cdot \frac{M-m}{m}\right\}$$

(merk ombytte $m \to M$, $v \to V$ etc. når $v' \to V'$)

(b) Fullstendig uelastisk støt:

$$v' = V' = \frac{mv + MV}{m+M}$$ (fra $\Delta p = 0$)

(c) Delvis uelastisk støt: Har kun 1 ligning ($\Delta p = 0$) for 2 ukjente (v', V'). Trenger en ekstra opplysning for å bestemme både v' og V'.

Eks: Elastisk kollisjon med vegg

Før: $m \longrightarrow$ | $V = 0$, $M \gg m$, $(M \to \infty)$

Etter: $v' = ?$ $\longleftarrow m$ | $V' = ?$

Sjekk: Er $\Delta p = 0$? Er $\Delta K = 0$?

Løsning:

$$v' = \frac{M}{m+M}\left\{0 + v \cdot \frac{m-M}{M}\right\} \approx \frac{M}{M} \cdot v \cdot \left(\frac{-M}{M}\right) = \underline{\underline{-v}} \qquad \text{(som ventet)}$$

$$V' = \frac{m}{M+m}\left\{2v + 0\right\} \approx \frac{m}{M} \cdot 2v \approx \underline{\underline{0}} \qquad (\;-\text{"}-\;)$$

Er $\Delta p = 0$?

$$p' = mv' = -mv, \qquad P' = MV' \approx M \cdot \frac{m}{M} \cdot 2v = 2mv$$

$$p = mv, \qquad P = MV = 0$$

$$\Rightarrow \quad p' + P' = p + P = mv \qquad \text{ok!}$$

Er $\Delta K = 0$?

$$K_m' = \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} m v^2, \qquad K_M' = \frac{1}{2} M V'^2 \approx \frac{1}{2} M \cdot \left(\frac{m}{M} \cdot 2v\right)^2$$

$$= 2 \cdot \frac{m^2}{M} \cdot v^2 \approx 0$$

$$K_m = \frac{1}{2} m v^2, \qquad K_M = \frac{1}{2} M V^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad K_m' + K_M' = K_m + K_M = \frac{1}{2} m v^2 \qquad \text{ok!}$$

Rakettprinsipp [YF 8.6; TM 8.5; LL 5.4; HS 3.7.2]

Ved tid t: m(t) $\longrightarrow v(t)$ $\qquad p(t) = m(t)v(t)$

Ved tid $t+dt$: eksos

$v_e \longleftarrow$ $\underbrace{\;\;}_{dm_e}$ m(t+dt) $\longrightarrow v(t+dt)$

$$p(t+dt) = \underbrace{m(t+dt)}_{m(t)+dm} \cdot \underbrace{v(t+dt)}_{v(t)+dv} + \underbrace{dm_e}_{-dm} \cdot \underbrace{v_e(t)}_{v(t)+u}$$

, der u = eksosens hastighet relativt raketten

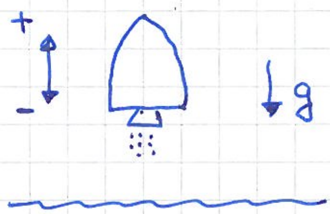
$$= \underbrace{m(t)v(t)}_{=p(t)} + m(t)\,dv + \underbrace{dm \cdot v(t) - dm \cdot v(t)}_{=0} - u\,dm$$

"Outer space": $F_{ytre} = 0 \overset{N2}{\Rightarrow} p(t+dt) = p(t) \Rightarrow m(t)\,dv = u\,dm$

$$\Rightarrow m(t) \cdot \frac{dv}{dt} = u \cdot \frac{dm}{dt} = u\dot{m} \qquad (u<0,\ \dot{m}<0)$$

$$\Rightarrow \text{Skyvkraft}: \quad F_{skyv} = u\dot{m} > 0$$

I tyngdefeltet: $F_{ytre} = -m(t)g$



$\Rightarrow$ Totalkraft på (rest-)raketten:

$F_{skyv} + F_{ytre}$

$$\overset{N2}{\Rightarrow} \quad u\dot{m} - mg = ma$$

Øving 5: Saturn V, trinn 1. [TM Ex. 8.19; litt andre tall]

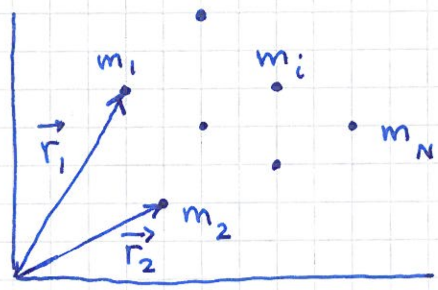
[HS 3.7.2; — " —]

Så langt i kurset: Punktmasser (eller: form og størrelse på legemet uten praktisk betydning)

Nå: Partikkelsystemer; for det meste stive legemer.
Rotasjonsdynamikk blir et aktuelt tema!

Men aller først:

Massesenter, tyngdepunkt [YF 8.5; TM 5.5; LL 5.6+5.8; HS 3.5]



System med N partikler, masser $m_1, m_2, \dots, m_N$ i posisjoner $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$

Massesenteret (CM = center of mass):

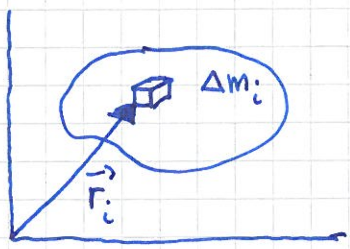
$$\vec{R}_{CM} \overset{\text{def.}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Total masse: $M = \sum_i m_i$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i}$$

(Med konstant g over hele systemet er tyngdepunktet samme sted som massesenteret.)

Med kontinuerlig massefordeling: [YF oppg 8.115 + 8.116; TM 5.5; LL 6.1; HS 3.5]



$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i \Delta m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} \xrightarrow{\Delta m_i \to 0} \frac{\int dm \cdot \vec{r}}{\int dm}$$

$M = \int dm$ = total masse

$$\Rightarrow \boxed{\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm}$$

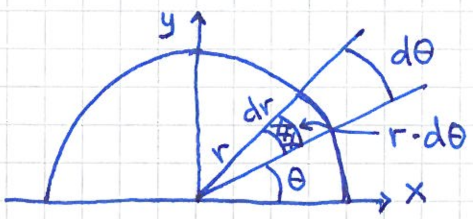
Her går integralet "over legemet" (der massen er!)

Masseelementet:

$$dm = \begin{cases} \rho \cdot dV \;; & \rho = \text{masse pr volumenhet} \;;\; dV = \text{volumelement} \quad (3D) \\ \sigma \cdot dA \;; & \sigma = \text{—"— flate —"—} \;;\; dA = \text{flate —"—} \quad (2D) \\ \lambda \cdot d\ell \;; & \lambda = \text{—"— lengde —"—} \;;\; d\ell = \text{linje —"—} \quad (1D) \end{cases}$$

Et hensiktsmessig <u>koordinatsystem</u> velges ut fra legemets form og eventuell symmetri.

Eks: Halvsirkulær tynn skive, radius R, masse σ pr flateenhet



$$dm = \sigma \cdot dA = \sigma \cdot r\,d\theta \cdot dr$$

$$M = \sigma \cdot \tfrac{1}{2}\pi R^2$$

$$\vec{r} = \hat{x}\,x + \hat{y}\,y = \hat{x}\,r\cos\theta + \hat{y}\,r\sin\theta$$

<u>Ser</u> at $X_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{R}_{CM} = Y_{CM}\,\hat{y}$

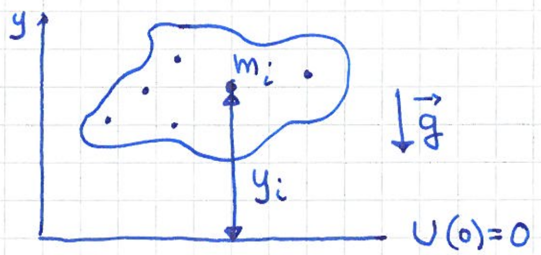
med $Y_{CM} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int y \cdot dm = \dfrac{2}{\sigma \pi R^2} \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi} r\sin\theta \cdot \sigma \cdot r\,d\theta \cdot dr$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \underbrace{\left(\int_0^R r^2\,dr\right)}_{=\frac{1}{3}R^3} \cdot \underbrace{\left(\int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta\right)}_{=\left.(-\cos\theta)\right|_0^{\pi} = 1+1=2} = \underline{\underline{\frac{4}{3\pi}R \approx 0.42\,R}}$$

Oppg, 1D: Vis at $Y_{CM} = \frac{2}{\pi}R$ for halvsirkel

Oppg, 3D: Vis at $Y_{CM} = \frac{3}{8}R$ for halvkule

Potensiell energi for partikkelsystem i tyngdefeltet



$$U = \sum_i U_i = \sum_i m_i g y_i \overset{\text{anta}}{\underset{g=\text{konst.}}{=}} g \sum_i m_i y_i = \underline{g M Y_{CM}}$$

Dvs: Som om hele massen $M = \sum_i m_i$ var samlet i høyden $Y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i$, og da f.eks. i massesenteret $\vec{R}_{CM}$.

Tyngdepunktbevegelsen [YF 8.5; TM 5.5; LL 5.8; HS 3.5]

Ser på system med N masser, $m_1, m_2, \dots, m_N$.

N2 for m_i: $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$ $\quad (i = 1, 2, \dots, N)$

der
$\vec{F}_{i,ytre}$ = ytre kraft på m_i
$\vec{F}_{ji}$ = ("indre") kraft fra m_j på m_i
$\Rightarrow \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$ = total indre kraft på m_i

Ta $\sum_i$ av ligningen ovenfor: $\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_{i,ytre} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2}\left(M \cdot \vec{R}_{CM}\right) = M \cdot \ddot{\vec{R}}_{CM}$$

$\sum_i \vec{F}_{i,ytre} = \vec{F}_{ytre}$ = netto ytre kraft på systemet

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}_{=0} + \underbrace{\vec{F}_{31} + \vec{F}_{13}}_{=0} + \dots + \underbrace{\vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N}}_{=0} = 0 \quad \text{(pga N3)}$$

Dermed:

$$\boxed{M \ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}}$$

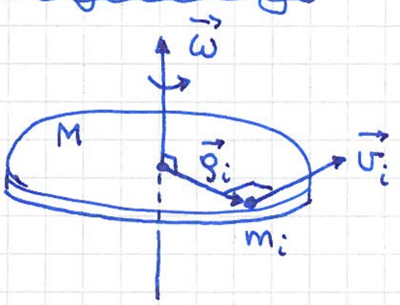
Dvs: $\vec{R}_{CM}$ beveger seg som om hele M var samlet i $\vec{R}_{CM}$ og ble utsatt for summen av alle ytre krefter som virker på systemet. I tillegg kommer <u>rotasjon om CM</u>.
[+ evt. vibrasjoner, som ikke er tema her]

Rotasjon

[YF 9+10; TM 9+10; LL 5.5+5.9+6; HS 4+5]

Først: Rask gjennomgang av ren rotasjon om fast akse.
Dernest: Grundigere og mer generell gjennomgang.

Rotasjonsenergi



$$K = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i (\rho_i \omega)^2 = \tfrac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2$$

s.8: $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$; $v_i = \rho_i \omega$

Treghetsmoment

$$I \overset{\text{def}}{=} \sum_i m_i \rho_i^2$$ = legemets treghetsmoment (om gitt akse)

Dermed:

$$K_{rot} = \tfrac{1}{2} I \omega^2$$ [Translasjonsanalogi: $K_{trans} = \frac{1}{2} M V^2$]

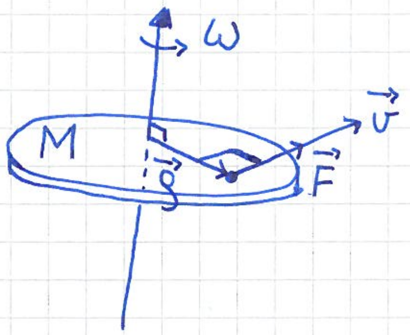
Hvis kontinuerlig massefordeling:

$$m_i \rightarrow \Delta m_i \xrightarrow{\Delta m_i \to 0} dm \text{, og } \sum_i \rightarrow \int_{\text{(over legemet)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int \rho^2 \, dm}$$

(der ρ = avstand fra rot.aksen til masseelementet dm)

Dreiemoment (evt: Kraftmoment; eng: Torque)



antar her $\vec{F} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{F} \perp \vec{\rho}$

$$\tau \overset{def}{=} F \cdot \rho = F\text{'s dreiemoment}$$

om rot.aksen

N2 for rotasjon om fast akse

Ser på tilført effekt:

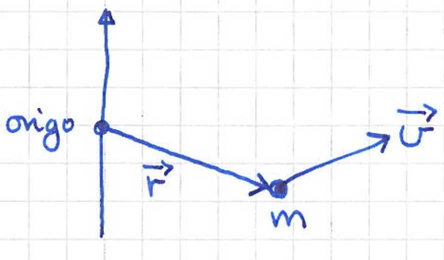
$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v = F \cdot \rho \cdot \omega = \tau \cdot \omega$$

Dessuten:

$$P = \frac{dK_{rot}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right) \underset{I = \text{konst.}}{\overset{\text{anta}}{=}} I \omega \frac{d\omega}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = I \dot{\omega}} \qquad [\text{Transl. analogi: } F = M\dot{V} \quad (\text{N2})]$$

Dreieimpuls (evt: spinn)



$$\vec{L} \overset{def}{=} \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$= m$'s dreieimpuls (relativt origo)

Dreiemoment som vektor

$$\vec{\tau} \overset{def}{=} \vec{r} \times \vec{F} = \vec{F}\text{'s dreiemoment}$$

(relativt origo)

Dreieimpulsbevarelse

Hva gir <u>endring</u> i $\vec{L}$? La oss se på $\dot{\vec{L}}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v}) = m\left\{\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{v}}_{=\vec{v}\times\vec{v}=0} + \underbrace{\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}}_{=\vec{r}\times\vec{F}/m \text{ (N2!)}}\right\} = \vec{\tau}$$

N2 for rotasjon, inkl. bevaring av $\vec{L}$:

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}\ ; \quad \text{dvs } \vec{L} = \text{konst. hvis } \vec{\tau} = 0}$$

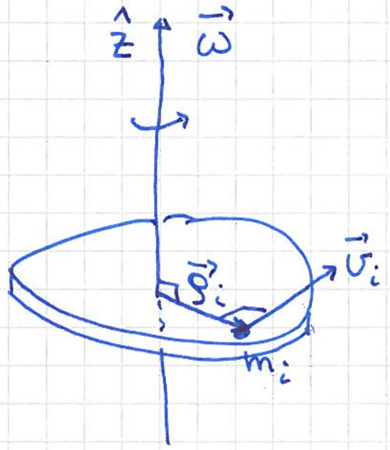
[Transl. analogi: $\vec{F} = d\vec{p}/dt$; dvs $\vec{p}$ = konst. hvis $\vec{F} = 0$]

$$\boxed{\text{For isolert system: } E,\ \vec{p} \text{ og } \vec{L} \text{ er bevart.}}$$

Hva er $\vec{L}$ for ren rotasjon om fast akse?

Svar: $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

Bevis:



$$\vec{L} = \sum_i \vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_i$$

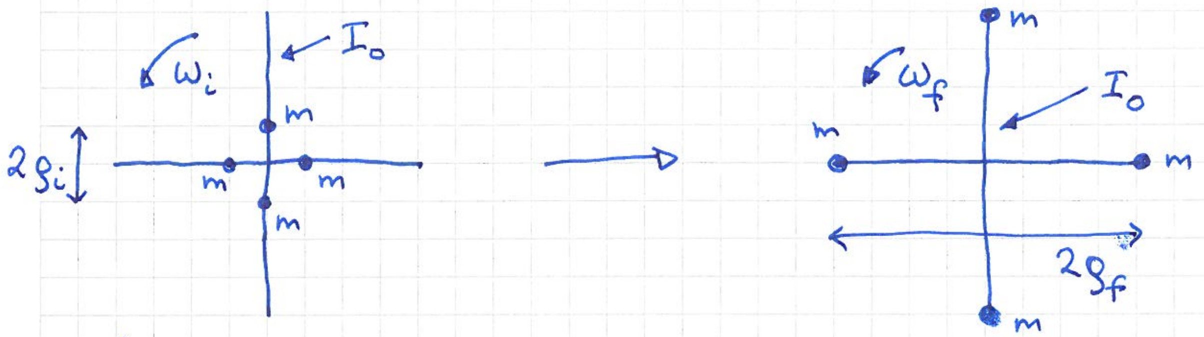
$$\vec{\rho}_i \times \vec{v}_i = \rho_i v_i \hat{z} = \rho_i^2 \omega \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \underbrace{\left(\sum_i m_i \rho_i^2\right)}_{=I} \cdot \underbrace{\omega\hat{z}}_{=\vec{\omega}}$$

$$= I\vec{\omega} \qquad \text{qed}$$

[Translasjonsanalogi: $\vec{p} = M\vec{V}$]

Relevans for LAB-oppg. om rotasjon:



"Før" (i) "Etter" (f)

$$I_i = I_0 + 4m\rho_i^2 \qquad I_f = I_0 + 4m\rho_f^2 > I_i$$

Intet ytre dreiemoment fra (i) til (f)

$\Rightarrow \quad L_i = L_f \qquad$ (dreieimpulsbevarelse!)

$$\Rightarrow \quad I_i\omega_i = I_f\omega_f \qquad \Rightarrow \quad \omega_f = \omega_i \cdot \frac{I_i}{I_f} < \omega_i$$

Hva med energibevarelse?

$$K_i = \frac{1}{2} I_i \omega_i^2$$

$$K_f = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 = \frac{1}{2} I_f \cdot \left(\omega_i \frac{I_i}{I_f}\right)^2 = \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 \cdot \frac{I_i}{I_f}$$

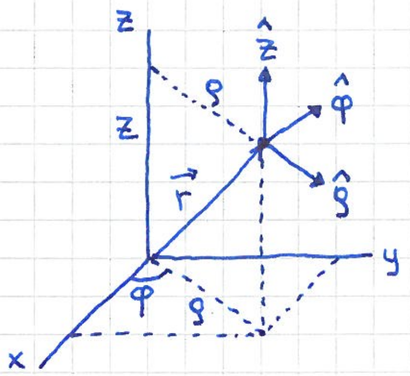
$$= K_i \cdot \frac{I_i}{I_f} \quad < \quad K_i$$

Hmm...!? Hvor ble det av $|\Delta K| = |K_f - K_i|$?

<u>Sirkelbevegelse</u> [YF 9.1-9.3; TM 9.1; LL 1.8; HS 2.1.2] 43

(Delvis repetisjon, se s. 6-8.)

Anta rotasjon om z-aksen $\Rightarrow$ velger sylinderkoord. (ρ, φ, z)

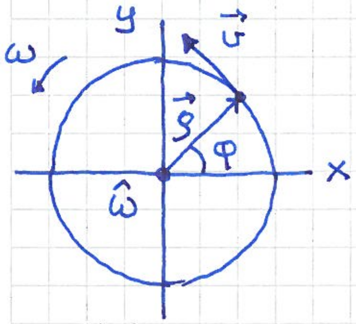


$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\rho^2+z^2}$$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{\rho\, d\varphi}{dt}\hat{\varphi} = \rho\omega\hat{\varphi}$$

$$\vec{\omega} = \omega\hat{z} = \omega\hat{\omega}, \quad \vec{\rho} = \rho\hat{\rho}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

$T = 2\pi/\omega$ = periode, $f = 1/T$ = frekvens

$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ = vinkelakselerasjon

$v = \omega\rho$ = banehastighet

$a_{\parallel} = \dot{v} = \dot{\omega}\rho = \alpha\rho$ = baneaks. $(\vec{a}_{\parallel} = \alpha\rho\hat{\varphi})$

$a_{\perp} = v^2/\rho = \omega v = \omega^2\rho$ = sentripetalaks. $(\vec{a}_{\perp} = -\omega^2\rho\hat{\rho})$

[Total aks.: $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}$

$= \dot{\omega}\rho\hat{\varphi} - \omega v\hat{\rho} = a_{\parallel}\hat{\varphi} - a_{\perp}\hat{\rho}$]

Med <u>stivt legeme</u>:

- felles ω og α for hele legemet
- v og a øker med ρ (ρ = avstand fra rot.aksen)

Treghetsmoment [YF 9.4; TM 9.3; LL 6.2, 6.3; HS 4.2]

For ren rotasjon om fast akse:

$$K = K_{rot} = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum_i m_i \rho_i^2\right)\omega^2 = \tfrac{1}{2} I \omega^2$$

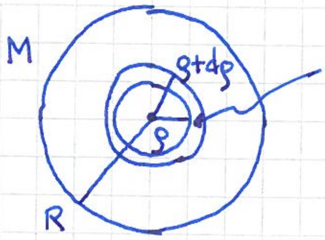
der $I = \sum_i m_i \rho_i^2$ (evt. $I = \int \rho^2 \, dm$) er legemets treghetsmoment mhp rot. aksen.

Notasjon: $I = I_0$ hvis akse gjennom legemets CM.

Eks 1: Ring (og "sylinderskall")

$$I_0 = \int_{ring} \rho^2 \, dm = R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$$

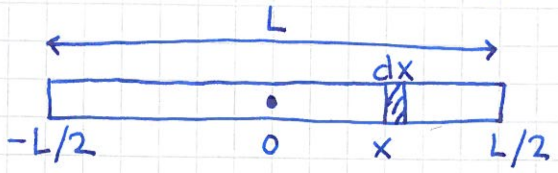
Eks 2: Sirkulær skive (og kompakt sylinder)



$$dm = M \cdot \frac{dA}{A} = M \cdot \frac{2\pi\rho \cdot d\rho}{\pi R^2} = \frac{2M}{R^2}\rho \, d\rho$$

$$I_0 = \int_0^R \rho^2 \frac{2M}{R^2} \rho \, d\rho = \frac{2M}{R^2} \Big|_0^R \tfrac{1}{4}\rho^4 = \underline{\underline{\tfrac{1}{2} MR^2}}$$

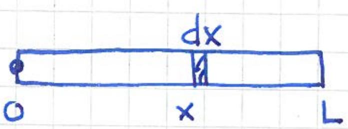
Eks 3: Tynn stang



$$dm = M \cdot \frac{dx}{L}, \quad \rho = x$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot M \cdot \frac{dx}{L} = \frac{M}{L} \Big|_{-L/2}^{L/2} \tfrac{1}{3} x^3 = \underline{\underline{\tfrac{1}{12} ML^2}}$$

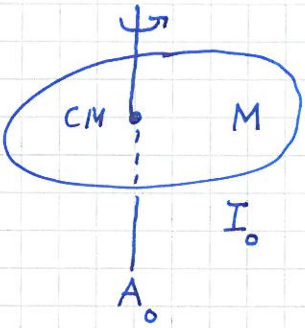
Eks 4: Om stangas ende

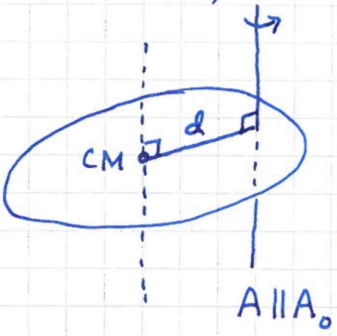


$$I = \int_0^L x^2 \cdot M \cdot \frac{dx}{L} = \underline{\underline{\tfrac{1}{3} ML^2}}$$

Øving 6: Kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$ Kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

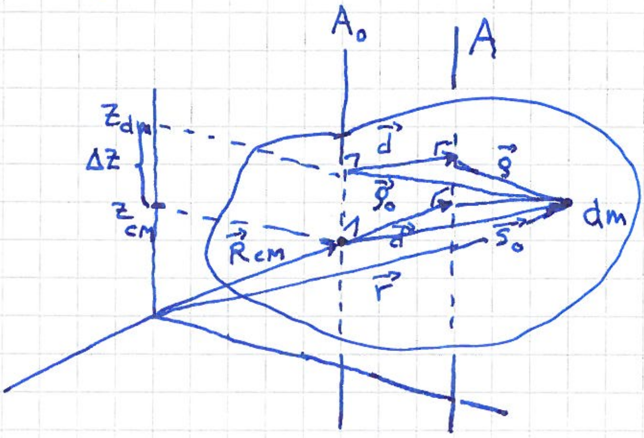
Steiners sats [YF 9.5; TM 9.3; LL 6.3; HS 4.3]





$$\boxed{I = I_0 + Md^2}$$

Bevis:



[Bedre figur på s. 45B]

$$\vec{\varrho}_0 = \vec{d} + \vec{\varrho}$$

$$I_0 = \int \varrho_0^2 \, dm$$

$$\varrho^2 = \varrho_0^2 + d^2 - 2\vec{d}\cdot\vec{\varrho}_0$$

$$\Rightarrow I = \int \varrho^2 \, dm = \underbrace{\int \varrho_0^2 \, dm}_{= I_0} + d^2 \underbrace{\int dm}_{= M} - 2\vec{d}\cdot\int \vec{\varrho}_0 \, dm$$

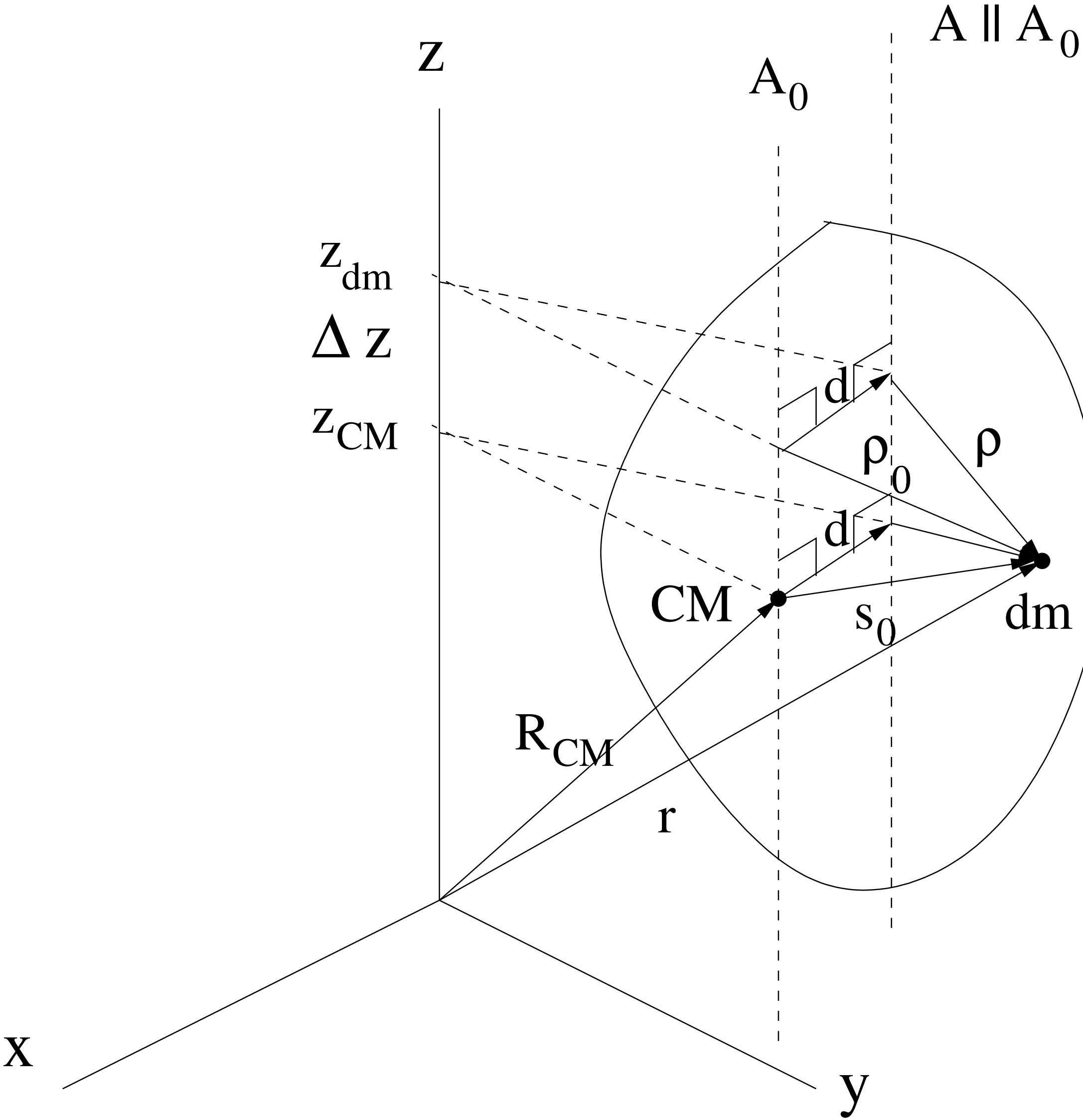
$$\vec{r} = \vec{R}_{CM} + \vec{s}_0 = \vec{R}_{CM} + \Delta z \cdot \hat{z} + \vec{\varrho}_0$$

$$\Rightarrow \vec{d}\cdot\vec{\varrho}_0 = \vec{d}\cdot(\vec{r} - \vec{R}_{CM}) - \Delta z \underbrace{\vec{d}\cdot\hat{z}}_{= 0}$$

$$\Rightarrow \vec{d}\cdot\int \vec{\varrho}_0 \, dm = \vec{d}\cdot\underbrace{\int \vec{r} \, dm}_{= M\vec{R}_{CM}} - \vec{d}\cdot\vec{R}_{CM}\underbrace{\int dm}_{= M} = 0$$

$$\Rightarrow I = I_0 + Md^2 \qquad \text{qed}$$

[Terminologi: Steiners sats = Parallellakseteoremet]



$$\rho_0 = d + \rho$$

$$\begin{aligned} r &= R_{CM} + s_0 \\ &= R_{CM} + \Delta z\,\hat{z} + \rho_0 \end{aligned}$$

Kinetisk energi for stivt legeme

[YF 10.3 ; TM 9.3 ; LL 6.6 ; HS 4.1]

Generell bevegelse for stivt legeme:

Translasjon av CM + Rotasjon om akse A_0 gjennom CM.

Skal vise at: $\boxed{K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2}$

der

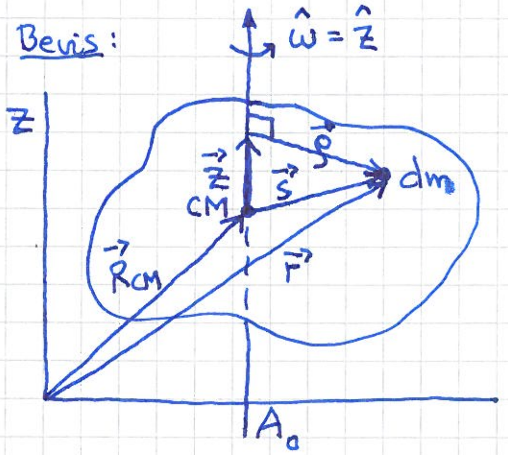
M = legemets masse

$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM}$ = hastigheten til CM

I_0 = legemets treghetsmoment om aksen A_0

$\vec{\omega}$ = vinkelhastigheten for rotasjonen om A_0

Bevis:



$\vec{r} = \vec{R}_{CM} + \vec{s} = \vec{R}_{CM} + \vec{z} + \vec{\rho}$

$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ = dm's hastighet

$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM}$ = CM's —"—

$\vec{u} = \dot{\vec{s}} = \dot{\vec{\rho}}$ = dm's hastighet relativt CM $\Rightarrow \vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$

$dK = \frac{1}{2} dm \cdot v^2$ = dm's kinetiske energi

$\Rightarrow K = \int dK = \int \frac{1}{2} dm \cdot v^2$ = legemets kinetiske energi

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = (\vec{V} + \vec{u}) \cdot (\vec{V} + \vec{u}) = V^2 + u^2 + 2 \vec{V} \cdot \vec{u}$$

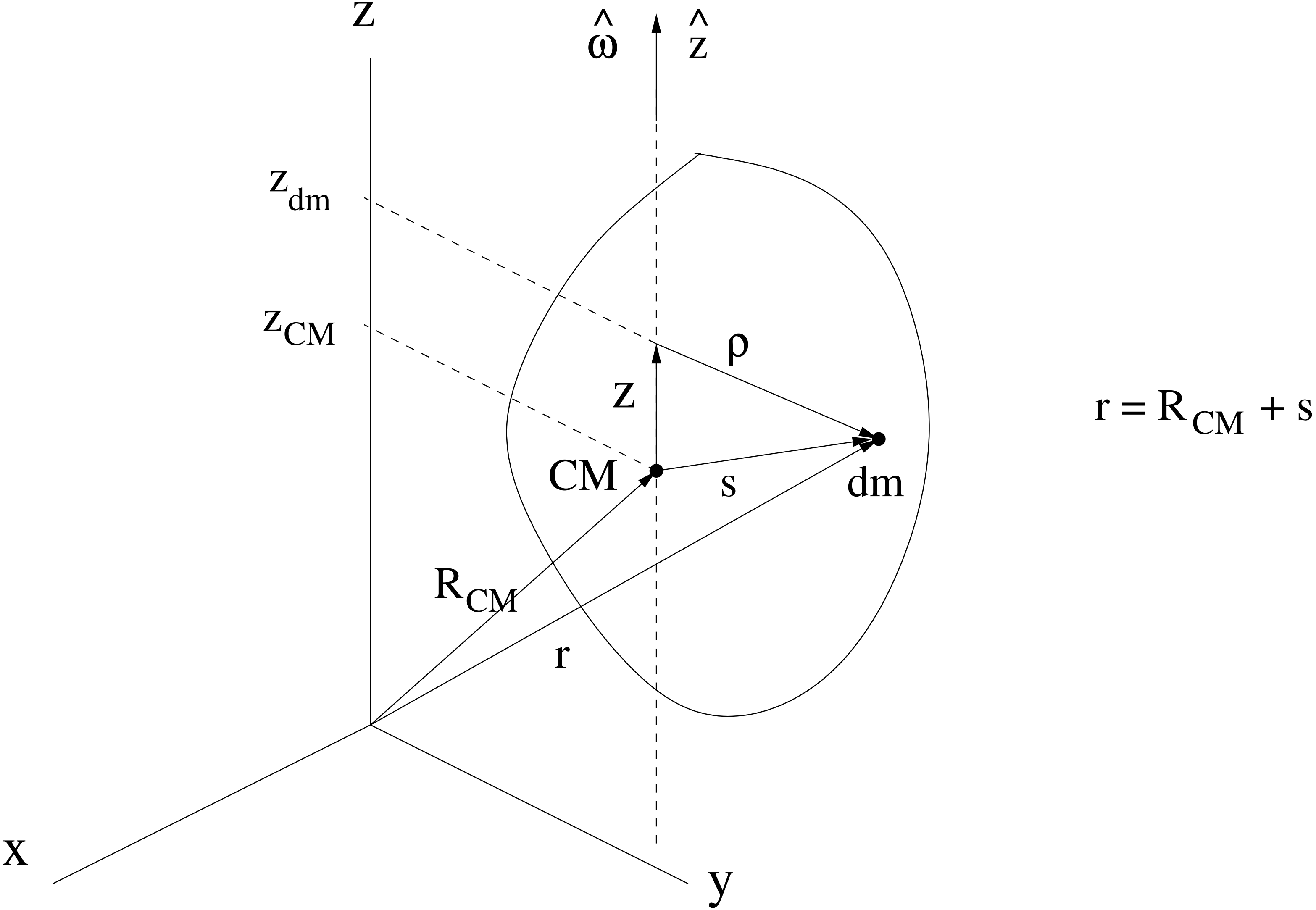
$$\frac{1}{2} \int dm \, V^2 = \underline{\frac{1}{2} M V^2}$$

$$\frac{1}{2} \int dm \, u^2 = \frac{1}{2} \int dm \, (\rho \omega)^2 = \frac{1}{2} \left(\int dm \, \rho^2 \right) \omega^2 = \underline{\frac{1}{2} I_0 \omega^2}$$

$$\int dm \, \vec{V} \cdot \vec{u} = \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \int dm \, \vec{s} = \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \int dm \, (\vec{r} - \vec{R}_{CM})$$

$$= \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \Big\{ \underbrace{\int \vec{r} \, dm}_{= M \cdot \vec{R}_{CM}} - \vec{R}_{CM} \underbrace{\int dm}_{= M} \Big\} = \underline{0}$$

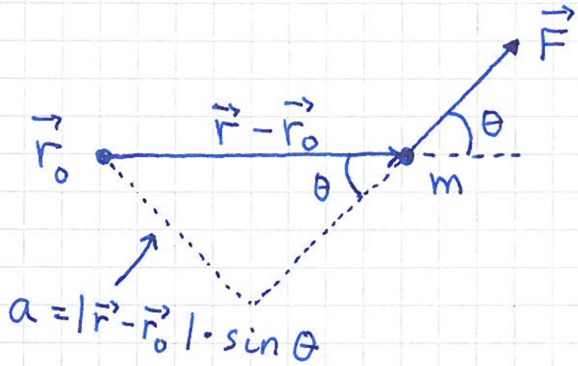
qed!


z
$\hat{\omega}$
$\hat{z}$
z_{dm}
z_{CM}
ρ
z
CM
s
dm
R_{CM}
r
x
y
$r = R_{CM} + s$

Rotasjonsdynamikk [YF 10; TM 10; LL 6 og 5; HS 5]

(nesten helt) generell beskrivelse

Dreiemoment [YF 10.1; TM 10.2; LL 5.5, 6.4; HS 5.1]



$$\boxed{\vec{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{r}-\vec{r}_0) \times \vec{F}}$$

= $\vec{F}$'s dreiemoment på m i posisjon $\vec{r}$, relativt (det fritt valgte) referansepunktet $\vec{r}_0$

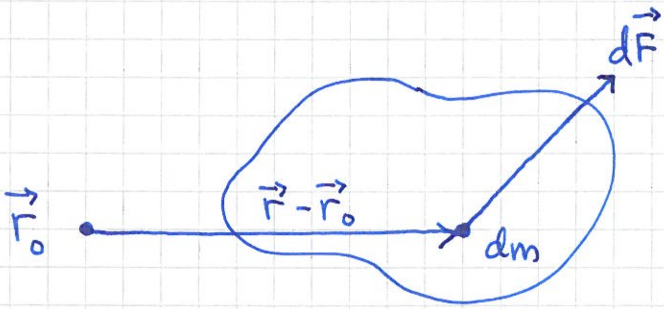
Retning: $\vec{\tau} \perp \vec{F}$ og $\vec{\tau} \perp \vec{r}-\vec{r}_0$

(h.h. regel $\Rightarrow$ $\vec{\tau}$ <u>ut</u> av planet i fig. over)

Absoluttverdi: $|\vec{\tau}| = |\vec{r}-\vec{r}_0| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\theta = a \cdot F$

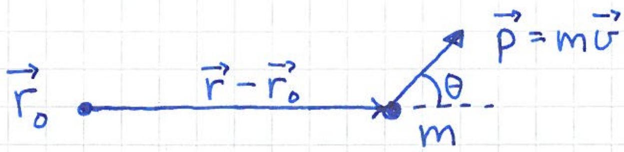
der a = "armen til $\vec{F}$"

For partikkelsystem (f.eks. stivt legeme):



$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int_{\text{legemet}} (\vec{r}-\vec{r}_0) \times d\vec{F}$$

Dreieimpuls [YF 10.5; TM 10.2; LL 6.6; HS 5.3]



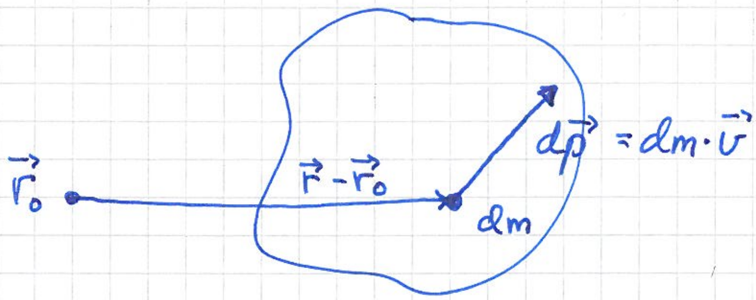
$$\boxed{\vec{L} \overset{def}{=} (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p} = m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}}$$

= m's dreieimpuls relativt $\vec{r}_0$

Retning: $\vec{L} \perp \vec{p}$ og $\vec{L} \perp \vec{r} - \vec{r}_0$

Abs. verdi: $|\vec{L}| = |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin\theta = a \cdot p$ (se s. 47)

For partikkelsystem:



$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int_{\text{legemet}} dm \, (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}$$

N2, rotasjon [YF 10.5 ; TM 10.3; LL 6.6; HS 5.2]

(="spinnsatsen")

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}\{ m(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{v}\} = m(\dot{\vec{r}}-\dot{\vec{r}}_0)\times\vec{v} + m(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\dot{\vec{v}}$$

Anta $\dot{\vec{r}}_0 = 0$ (fast $\vec{r}_0$) eller $\dot{\vec{r}}_0 \parallel \vec{v}$

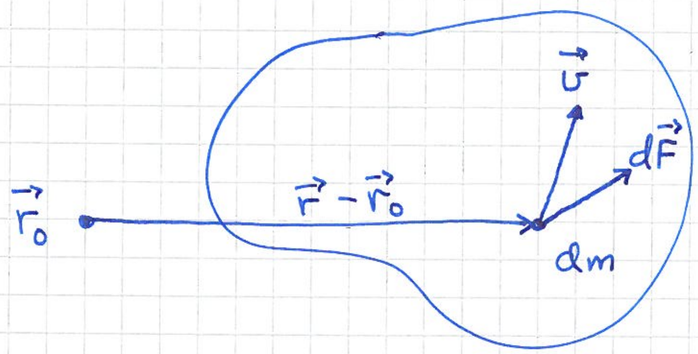
slik at $\dot{\vec{r}}_0 \times \vec{v} = 0$

Har (som s. 41): $\dot{\vec{r}} \times \vec{v} = \vec{v}\times\vec{v} = 0$

$$m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = \vec{F}$$

Dermed: $\dot{\vec{L}} = (\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{F}$, dvs $\boxed{\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}}$

For partikkelsystem:



$$\dot{\vec{L}} = \int d\dot{\vec{L}} = \int \frac{d}{dt}\{ dm\,(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{v}\}$$

$=$ .... som ovenfor, med $\dot{\vec{r}}_0 \times \vec{v} = 0$ fortsatt ....

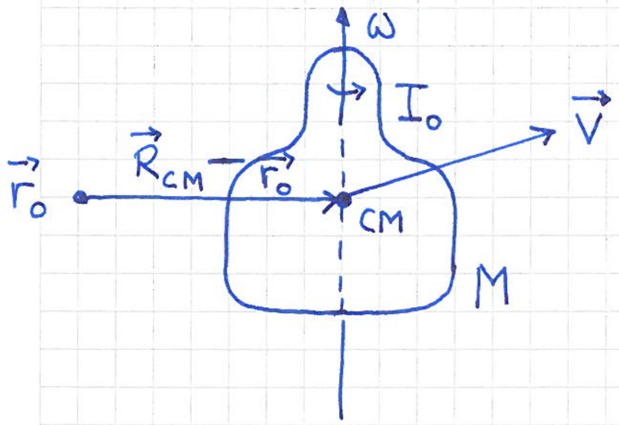
$$= \int (\vec{r}-\vec{r}_0)\times d\vec{F} = \int d\vec{\tau} = \vec{\tau}$$

med $\vec{\tau}$ = totalt dreiemoment på systemet (relativt $\vec{r}_0$)

$\vec{L}$ = total dreieimpuls for —"— (—"—)

Dreieimpuls for stivt legeme [YF 10.5; TM 10.2; LL 6.6; HS 5.3]

Anta at legemet har sylindersymmetri om (den instantane) rotasjonsaksen, "utpekt" med $\hat{\omega}$.



Fra s. 46: $K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$

Spm: Kan $\vec{L}$ på samme måte skrives som en sum av to ledd, ett assosiert med massesenterets translasjonsbevegelse, og ett assosiert med legemets rotasjonsbevegelse om en akse gjennom CM ?

Svar: Ja! Med antagelsen om sylindersymmetri om $\hat{\omega}$ kan det vises at legemets totale dreieimpuls kan skrives slik:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + I_0\vec{\omega}}$$

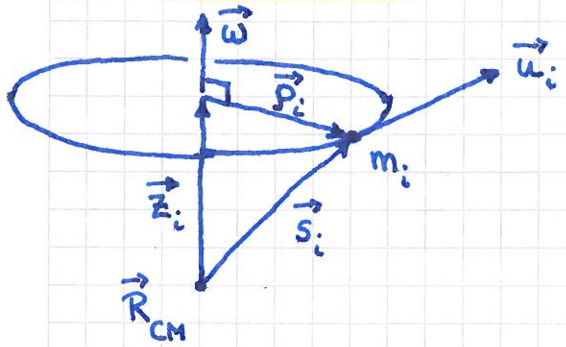
Banedreieimpuls, relativt $\vec{r}_0$: $\vec{L}_b = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V}$

Indre dreieimpuls ("spinn"; uavh. av $\vec{r}_0$): $\vec{L}_s = I_0\vec{\omega}$

[For bevis, som starter fra definisjonen $\vec{L} = \int dm\,(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}$, se s. 50 A og 50 B. Litt "kronglete", men ikke særlig vanskeligere enn bevisene s. 45 og 46.]

Bevis :

50 A



relativkoord.

$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{s}_i$$
$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{u}_i$$
relativhastighet
$$(\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}}_{CM} + \dot{\vec{s}}_i)$$

Fra figur: $\vec{s}_i = \vec{z}_i + \vec{\rho}_i$

Fra før: $\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i = \vec{\omega} \times \vec{s}_i$ (siden $\vec{\omega} \times \vec{z}_i = 0$)

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{v}_i$$
$$= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0 + \vec{s}_i) \times (\vec{V} + \vec{u}_i)$$
$$= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{V}$$
$$+ \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{u}_i + \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i$$

1. sum:

$$\sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} = \vec{L}_{CM}$$

= banedreieimpulsen relativt $\vec{r}_0$ pga CM's bevegelse (jfr. $\vec{L}$ for punktmasse)

2. sum:

$$\sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{V} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \times \vec{V} = (M\vec{R}_{CM} - M\vec{R}_{CM}) \times \vec{V} = 0$$

3. sum:

$$\sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{u}_i = \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i)$$
$$= (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times (\vec{\omega} \times \underbrace{\sum_i m_i \vec{s}_i}_{=0}) = 0$$

4. sum:

$$\sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i = \vec{L}_{rel.} =$$ dreieimpuls pga masseelementenes bevegelse relativt CM

50 B

Dermed:

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{rel.} = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i$$

som gjelder for vilkårlig partikkelsystem (ikke nødv. vis stivt legeme); alternativt $\int_M dm(\vec{s} \times \vec{u})$ for $\vec{L}_{rel}$ hvis kontinuerlig massefordeling.

Hvis stivt legeme: $\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{s}_i$

$$\Rightarrow \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i = \sum_i m_i \vec{s}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i)$$

Identitet: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

(kjedelig, men ikke vanskelig å bevise!)

Dermed:

$$\sum_i m_i \vec{s}_i \times (\vec{\omega} \times s_i) = \sum_i m_i \{ \vec{\omega} s_i^2 - \vec{s}_i (\vec{s}_i \cdot \vec{\omega}) \}$$

$$= \sum_i m_i \{ \vec{\omega}(z_i^2 + \rho_i^2) - (\vec{z}_i + \vec{\rho}_i) z_i \omega \}$$

$$= \sum_i m_i \{ \vec{\omega}(z_i^2 + \rho_i^2) - z_i^2 \vec{\omega} - z_i \omega \vec{\rho}_i \}$$

$$= \sum_i m_i \rho_i^2 \vec{\omega} - \omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i$$

$$= I_0 \vec{\omega} - \omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i$$

Hvis sylindersymmetri om $\hat{\omega}$, dvs om $\hat{z}$:

$$\sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i = \sum_i m_i z_i (x_i \hat{x} + y_i \hat{y}) = 0$$

fordi bidragene fra like store masseelementer i (x_i, y_i, z_i) og $(-x_i, -y_i, z_i)$ kansellerer.

Dette er ofte tilfelle, men ikke alltid.

Men hvis sylindersymmetri om $\hat{\omega}$: $\vec{L}_{rel} = I_0 \vec{\omega}$

$$\Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{rel} = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}$$

qed

Bevaringslover

For isolert system (dvs: system som ikke påvirkes av ytre krefter) er energi, impuls og dreieimpuls bevarte størrelser.

$$W = 0 \quad \left(\text{dvs } P = \frac{dW}{dt} = 0\right) \quad \Rightarrow \quad E = \text{konst.}$$

$$\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{konst.}$$

$$\vec{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{konst.}$$

Mekanisk likevekt (Statikk)

[YF 11.1–11.3; TM 12.1–12.3; LL 7.1 ; HS 4.6]

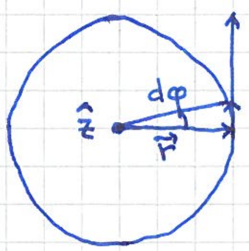
Et stivt legeme er i ro,

$$\vec{p} = 0 \quad \text{og} \quad \vec{L} = 0$$

bare dersom $\sum_i \vec{F}_i = 0$ og $\sum_i \vec{\tau}_i = 0$

Arbeid utført ved rotasjon

[YF 10.4; TM 9.5; LL 6.4; HS 4.4.1]



$$\vec{F} = F\,\hat{\varphi}$$

$$d\vec{s} = r\,d\varphi\,\hat{\varphi}$$

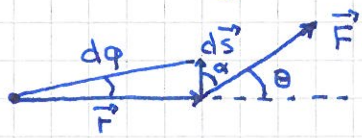
$$\vec{r} = r\,\hat{r}$$

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{s} = F\cdot r\,d\varphi$$

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = r\cdot F\ \hat{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{dW = \tau\,d\varphi} \Rightarrow P = \frac{dW}{dt} = \tau\cdot\omega$$

Enn om $\vec{F}$ og $d\vec{s}$ ikke er parallelle?



$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$$

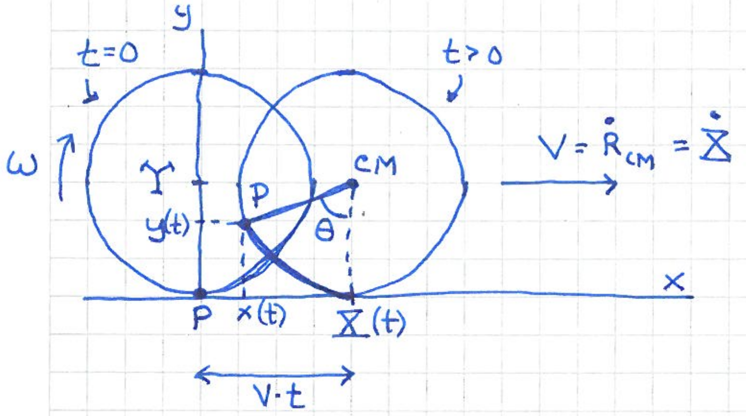
$$dW = F\cdot ds\cdot\cos\alpha = F\cdot r\,d\varphi\cdot\sin\theta$$

$$\tau = |\vec{\tau}| = |\vec{r}\times\vec{F}| = r\cdot F\cdot\sin\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{dW = \tau\,d\varphi}$$

Rulling [YF 10.3 ; TM 9.6 ; LL 6.7 ; HS 4.5.3 og 5.4.3]

Ren rulling:



Sammenhenger:

$\theta = \omega t$ (hvis ω = konst.)

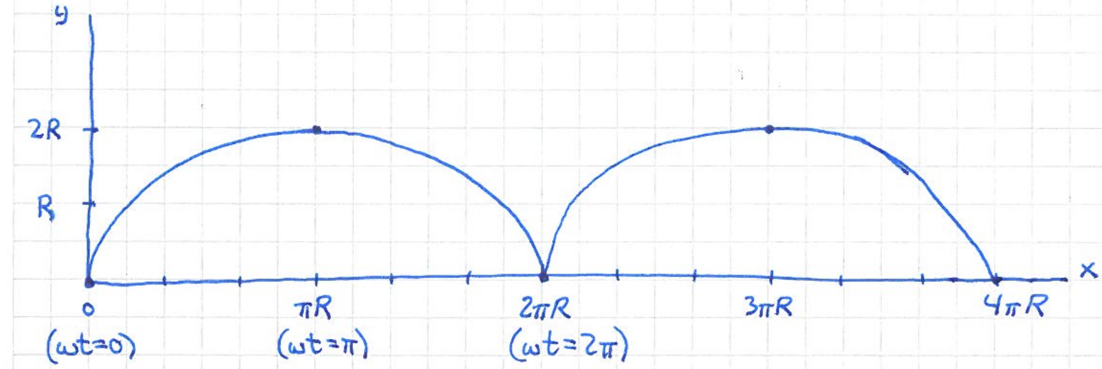
$$\left\{\begin{array}{l} X = Vt = R\theta \; (= R\omega t) \\ V = \dot{X} = R\omega \quad \text{(hvis } \omega = \text{konst.)} \\ A = \ddot{X} = R\ddot{\theta} = R\dot{\omega} = R\alpha \end{array}\right.$$

→ rullebetingelser

Ser fra fig. at banen til P (= punkt på periferien) blir en sykloide:

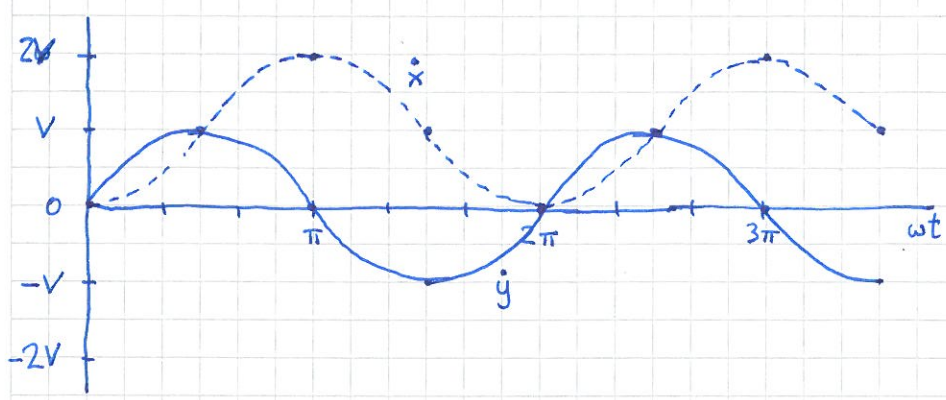
$x(t) = X(t) - R\sin\theta = Vt - R\sin\omega t$; $\quad y(t) = R - R\cos\theta = R - R\cos\omega t$

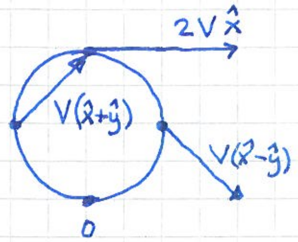
[der vi nå antar ω = konst.]



P's hastighet:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = V - \omega R\cos\omega t = V(1-\cos\omega t) \\ \dot{y} = \omega R\sin\omega t = V\sin\omega t \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}(\theta) = \hat{x}\,V(1-\cos\theta) + \hat{y}\,V\sin\theta$$





⇒ Ingen relativ bevegelse i kontaktpunktet ved ren rulling.

Kin. energi ved ren rulling:

$$K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \qquad (s.46)$$

$I_0 = c \cdot M R^2$ (med $c=1$ for ring, $\frac{2}{5}$ for massiv kule osv)

$\omega = V/R$ (rullebetingelse)

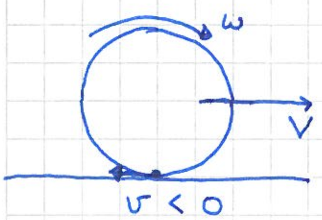
$$\Rightarrow \quad K = (1+c) \cdot \frac{1}{2} M V^2$$

Sluring

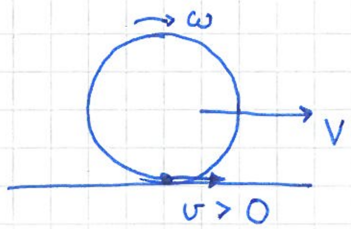
$\omega \neq V/R \Rightarrow$ kontaktpunktet får hastighet $v = V - \omega R \neq 0$ relativt underlaget

$\Rightarrow$ legemet roterer og glir samtidig

Hvis $\omega > V/R$:



Hvis $\omega < V/R$:



Friksjonens rolle

Hvis sluring: Friksjonskraft $f = \mu_k N$ rettet mot $\vec{v}$.

Effekttap: $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$

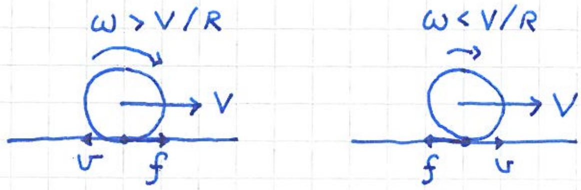
($\Rightarrow$ redusert mekanisk energi)

Hvis ren rulling: $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$

Null effekttap

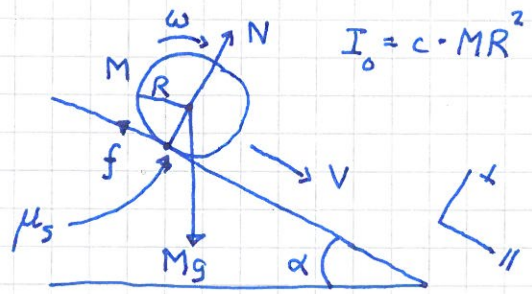
Statisk friksjon: $f \leq \mu_s \cdot N$

Sluring:



Ren rulling: Retningen på den statiske friksjonskraften bestemmes ved å besvare spørsmålet "Hva ville kontaktpunktets relativhastighet $\vec{v}$ ha vært hvis det ikke var friksjon?"

Eks: Rulling på skråplan



$I_0 = c \cdot MR^2$

- $\dot{V} = ?$
- $\mu_s^{min} = ?$

} for <u>ren</u> rulling

- ren rulling ⇒ $\omega = V/R$, <u>med</u> klokka
- V og ω <u>øker</u> ⇒ dreiemoment τ om CM i fråd med dette ⇒ friksjonskraft f <u>oppover</u>

N2: $\sum F_{\parallel} = M\dot{V}$, $\sum \tau = I_0 \dot{\omega}$, $\sum F_{\perp} = 0$

$\Downarrow$

$Mg \sin\alpha - f = M\dot{V}$

$\Downarrow$

$f \cdot R = I_0 \dot{\omega}$

$\Downarrow$

$f = (cMR^2 \cdot \frac{\dot{V}}{R})/R = cM\dot{V}$

$\Downarrow$

$N = Mg\cos\alpha$

$\Downarrow$

$Mg \sin\alpha - cM\dot{V} = M\dot{V}$

$\Downarrow$

$$\underline{\underline{\dot{V} = g \frac{\sin\alpha}{1+c}}}$$

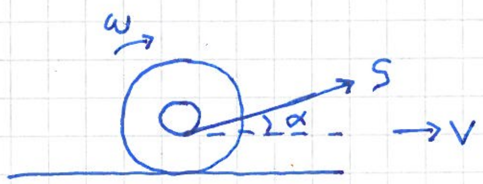
$$f \leq f_{max} = \mu_s \cdot N$$

$$\Rightarrow \quad cMg \frac{\sin\alpha}{1+c} \leq \mu_s Mg \cos\alpha$$

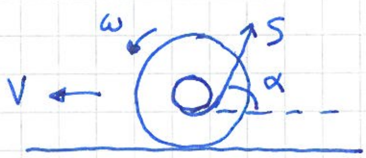
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mu_s^{min} = \frac{c}{1+c} \tan\alpha}} \quad \text{(for å ha ren rulling)}$$

	c	$\dot{v}$	μ_s^{min}
Ring og hul sylinder	1	$\frac{1}{2} g \sin\alpha$	$\frac{1}{2}\tan\alpha$
Skive og kompakt sylinder	1/2	$\frac{2}{3} g \sin\alpha$	$\frac{1}{3}\tan\alpha$
Kompakt ball	2/5	$\frac{5}{7} g \sin\alpha$	$\frac{2}{7}\tan\alpha$

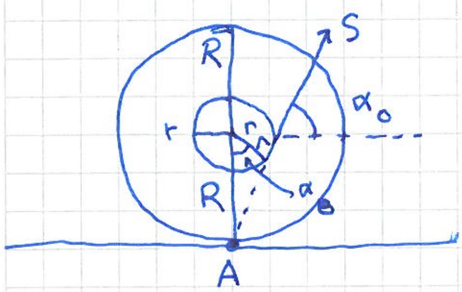
Eks: Snelle



liten α $\Rightarrow$ ruller mot høyre



stor α $\Rightarrow$ mot venstre



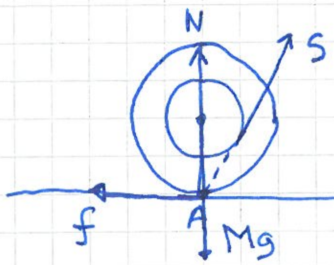
snelle i ro

når $\alpha = \alpha_0$ gitt ved

$\underline{\underline{\cos\alpha_0 = r/R}}$ (ses fra figur!)

Da går alle krefter gjennom kontaktpunktet A (f, N, mg og S)

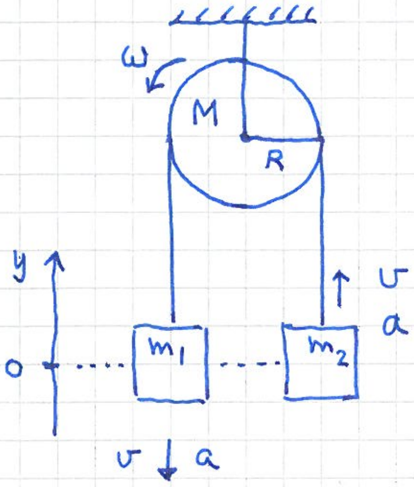
$\Rightarrow \sum \tau_A = 0$



Eks: Atwoods maskin

Løses på øving med N2 trans. + rot. (evt kun N2 rot.)

Løses her med energibevarelse



- $m_1 > m_2$
- snora glir ikke på skiva $\Rightarrow \omega R = v$
- $I_0 = \frac{1}{2} M R^2$ = skivas tregh.mom.
- Anta $U(y=0) = 0$; lodd i ro ved start
- Bestem loddenes akselerasjon a

Løsning:

Total energi, $E = U_i + K_i = 0$ ("initial")

E er bevart

$\Rightarrow U_f + K_f = 0$ ("final")

$$\Rightarrow m_2 g y - m_1 g y + \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \underbrace{\frac{1}{2} I_0 \omega^2}_{= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M R^2 \cdot \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{4} M v^2} = 0$$

(der $y > 0$ er posisjon til m_2)

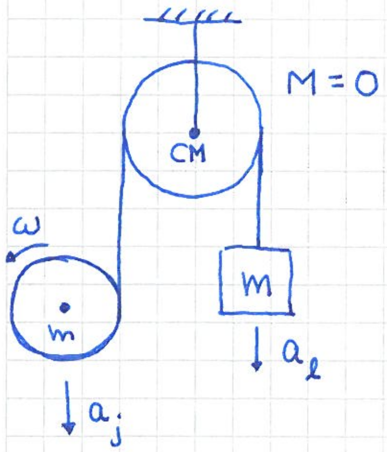
$$\Rightarrow \frac{1}{2} v^2 = y \cdot \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + M/2}$$

Tar $\frac{d}{dt}$ på begge sider:

$$\frac{1}{2} \cdot 2v \cdot \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{=a} = \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=v} \cdot \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + M/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = g \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}}$$

Eks: Atwood med ideell trinse og lodd + jojo, $m_1 = m_2 = m$.



Er $a_j = a_\ell$?

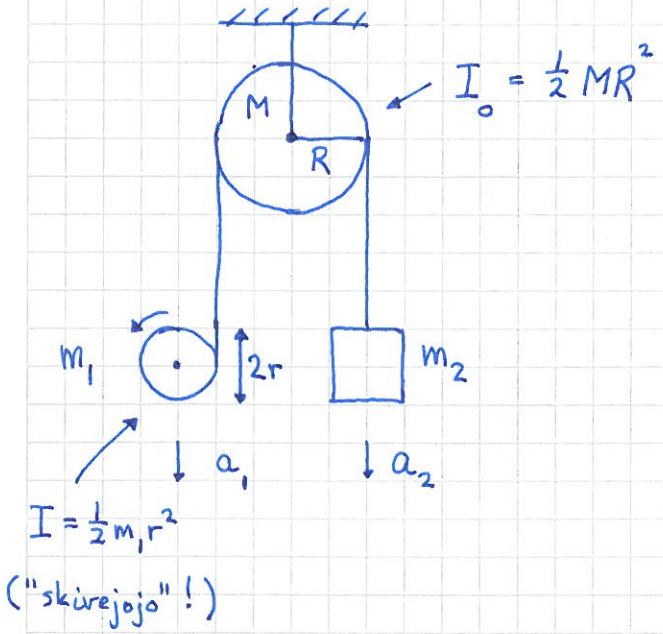
Ja:

Må ha likt snordrag på begge sider. Ellers ville trinsa ha vært utsatt for et netto dreiemoment mhp CM. Men med M = 0 ville trinsa da ha fått uendelig vinkelakselerasjon, umulig!

Med likt snordrag og lik tyngde på begge sider blir akselerasjonen den samme:

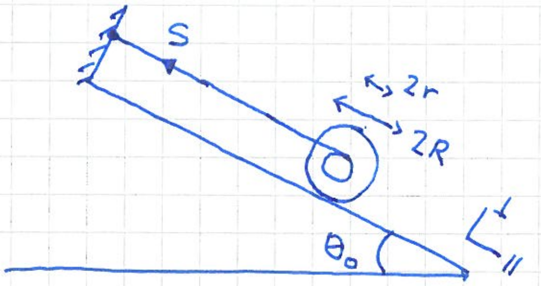
$m \cdot a_j = mg - S \; ; \quad m \cdot a_\ell = mg - S \quad \Rightarrow a_j = a_\ell = g - S/m$

Utfordring: Atwood med lodd + jojo (generelt)



Bestem a_1 og a_2!

Eks: Sluresnelle (demo + øving)



θ_0 = max vinkel før snella glir (slurer) nedover skråplanet

Bestem θ_0. Hva er snordraget S da?

Tips: Bruk $\sum F_{\parallel} = 0$ samt $\sum \tau = 0$ (med snellas CM som ref.punkt)

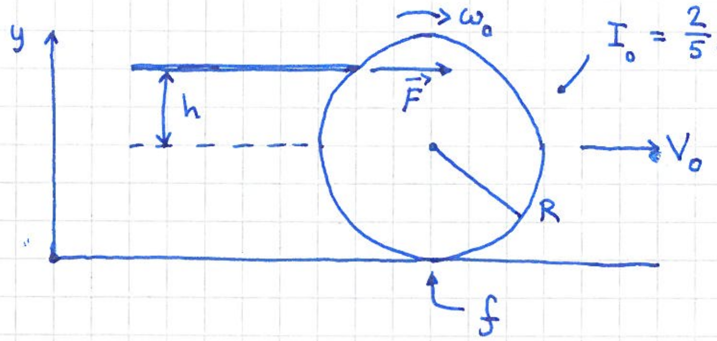
Ved $\theta = \theta_0$ er $f = f_{max} = \mu_s \cdot N$

Ekstraoppg: Bestem snellas akselerasjon når $\theta > \theta_0$.

Tips: $\sum F_{\parallel} = M \cdot a$, $\sum \tau = I\dot{\omega}$, $v = \omega r$ (siden det vikles av snorlengde $2\pi r$ på tiden $T = 2\pi/\omega$, dvs $v = 2\pi r/T = \omega r$)

Eks: Snooker (øving)

$I_0 = \frac{2}{5}MR^2$



Kortvarig støt, $\Delta t \gtrsim 0$:

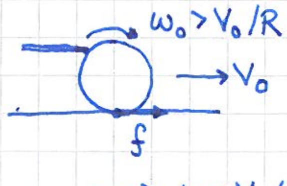
$F \cdot \Delta t = \Delta p = MV_0$

$\tau \cdot \Delta t = \Delta L = I_0 \omega_0$

$\tau = F \cdot h$

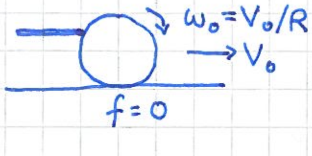
$F \gg f$

Hvis $h > h_0$:



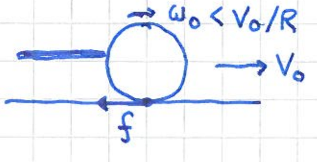
(sluring)

Hvis $h = h_0$:



(ren rulling) (h_0 = ?)

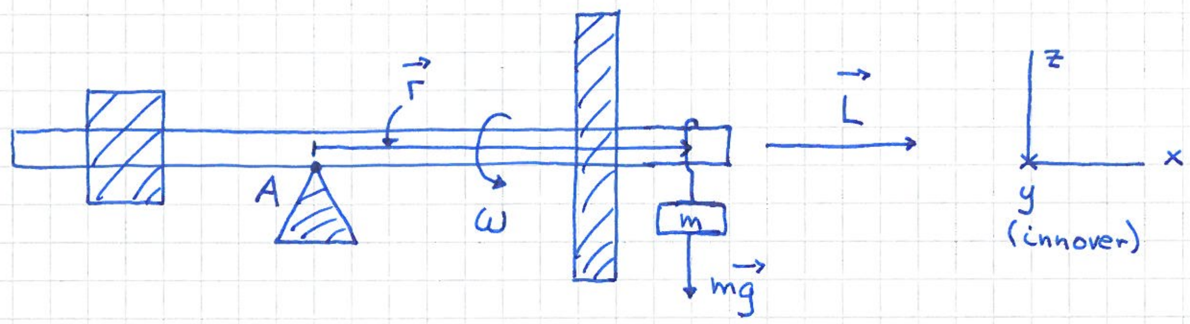
Hvis $h < h_0$:



(sluring)

Presesjon

Gyroskop (kvalitativt):



Uten lodd: Dynamisk likevekt med roterende skive

$$\vec{\omega} = \omega\hat{x}, \quad \vec{L}_A = L_A\hat{x}, \quad L_A = I_{skive}\cdot\omega$$

Med lodd: Dreiemoment relativt A:

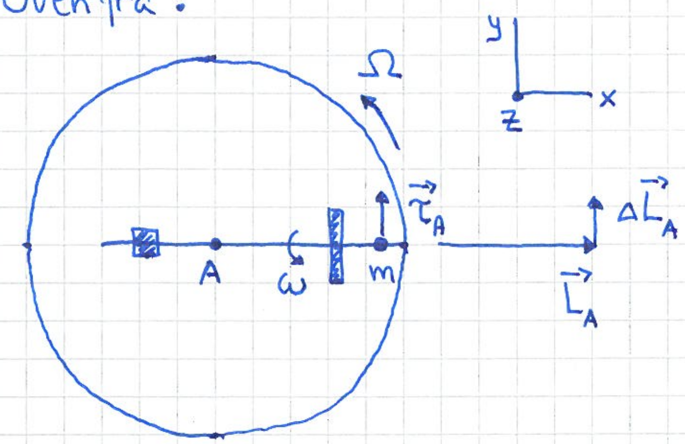
$$\vec{\tau}_A = \vec{r}\times m\vec{g} = rmg\,\hat{y}$$

N2, rot: $\vec{\tau}_A = \Delta\vec{L}_A/\Delta t$

$\Rightarrow$ $\Delta\vec{L}_A$ peker i retning $\hat{y}$

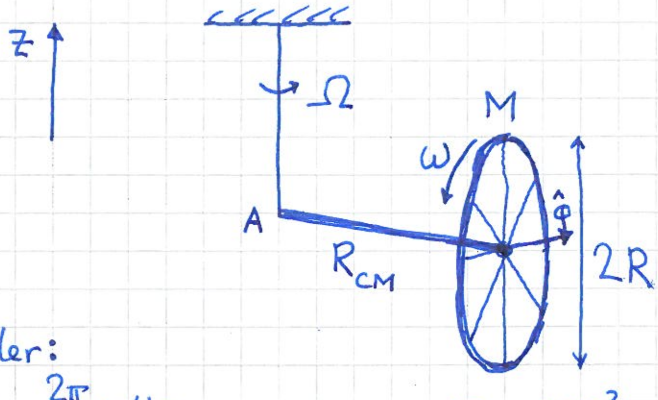
$\Rightarrow$ rotasjon mot klokka om z-aksen, <u>presesjon</u>, med vinkelhastighet $\Omega \ll \omega$

Ovenfra:



- større $m\vec{g}$ $\Rightarrow$ raskere presesjon (større Ω)
- større $\vec{r}$ (lengre arm) $\Rightarrow$ større Ω
- vipping opp og ned, "nutasjon"

Sykkelhjul (halvkvantitativt):



Estimerer:

$M \approx 5$ kg

$R \approx \frac{3}{10}$ m

$R_{CM} \approx \frac{2}{10}$ m

$T_\omega = 2\pi/\omega \approx \frac{1}{3}$ s

Måler:

$T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 4$s

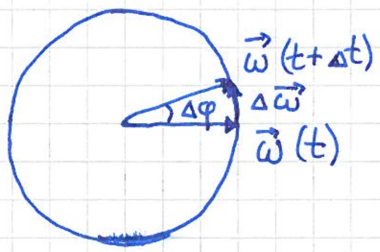
$I_0 \approx MR^2$

Finn estimat for T_Ω !

Løsning: $\vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} + I_0 \vec{\omega}$

$\vec{L}_b = R_{CM} \cdot MV \hat{z} \approx$ konst.

$\Rightarrow \dot{\vec{L}}_A \simeq I_0 \dot{\vec{\omega}} = \vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} \Rightarrow R_{CM} Mg \, \hat{\varphi}$



$\Delta\vec{\omega} = \omega \cdot \Delta\varphi \cdot \hat{\varphi}$

$\Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \omega \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \hat{\varphi} = \omega\Omega\hat{\varphi}$

$\Rightarrow R_{CM} Mg = I_0 \omega\Omega \simeq MR^2 \omega\Omega$

$\Rightarrow \underline{\underline{\Omega = \frac{R_{CM}\, g}{R^2 \omega}}}$

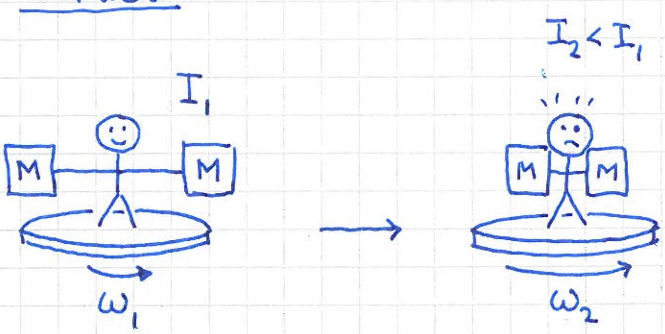
Dermed:

$T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi R^2 \omega}{R_{CM}\, g} = \frac{(2\pi R)^2 / T_\omega}{R_{CM}\, g} \approx \frac{(6\pi/10)^2 \, m^2 / (\frac{1}{3} s)}{\frac{2}{10} m \cdot 10 \, m/s^2}$

$= \frac{27\pi^2}{50}$ s $\approx \underline{5 \text{ s}}$, ikke verst !!

To raske demonstrasjoner av <u>dreieimpulsbevarelse</u> helt til slutt:

Piruett



$\tau_{ytre} = 0 \Rightarrow L = \text{konst.}$

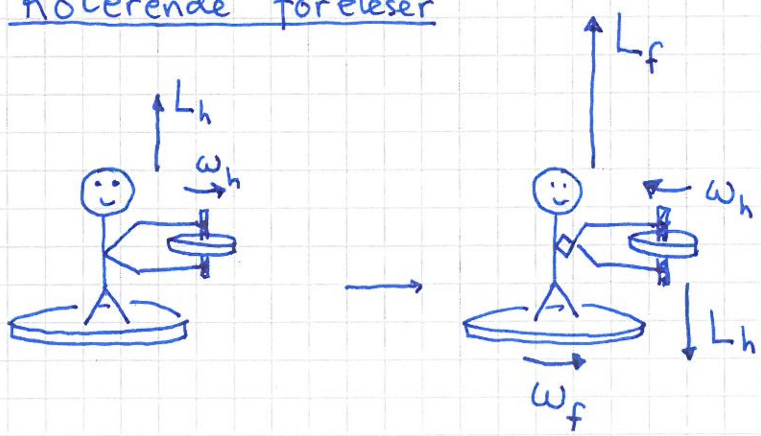
$\Rightarrow I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$

$\Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \omega_1 > \omega_1$

[$K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 \cdot \frac{I_1}{I_2} = K_1 \cdot \frac{I_1}{I_2} > K_1$!

Henter energi fra armmusklene når bøkene trekkes inn, gir økt mekanisk energi.]

Roterende foreleser



h: hjul

f: foreleser

$\Delta \vec{L} = 0 \Rightarrow L_f \approx 2 L_h$

Slutten på del I av kurset.