

KLASSISK MEKANIKK

[YF 1-10,14 ; TM 1-10,14 ; LL 1-6,9 ; HS 1-6]

Størrelser og enheter. SI-systemet. [YF1, TM1, HS1]

Fysisk størrelse = målbar størrelse for fysisk fenomen

Eks: Tid. $\tau = 1.0167 \text{ ns}$

↑ symbol ↑ måltall ↑ enhet, inkl. dekadisk prefiks
 (n = nano = 10^{-9})

$[\tau] = s$ "enheten til tau er sekund"

SI : 7 grunnenheter + div. sammensatte og avledete

Navn	Symbol(er)	Enhet	
lengde	$l, s, \Delta x, \dots$	m	} Mekanikk
masse	m, M, \dots	kg	
tid	t, τ, \dots	s	
elektrisk strømstyrke	I	A	ELmag
temperatur	T	K	Termisk
stoffmengde	n	mol	— " — (Kjemi)
lysstyrke	I	cd	Lite brukt
<hr/>			
hastighet	v	m/s	} avledete
akselerasjon	a	m/s^2	
kraft	F	$kg \cdot m/s^2 \equiv N$	
energi	E, K, U, W, ...	$Nm \equiv J$	
effekt	P	$J/s \equiv W$	
⋮			

Eks: Hvor lang tid bruker lyset på å gå 1 fot, i vakuum? (2)

Løsn: $c = 299792458 \text{ m/s}$, $l = 1 \text{ fot} = 12 \text{ in} = 12 \cdot 25.4 \text{ mm}$

$$\tau = l/c = 12 \cdot 25.4 \cdot 10^{-3} \text{ m} / 299792458 \text{ m/s}$$

$$\approx 1.0167 \cdot 10^{-9} \text{ s} = \underline{1.0167 \text{ ns}}$$

Eks: Hvor mye er en (engelsk!) pint i SI-enheter?

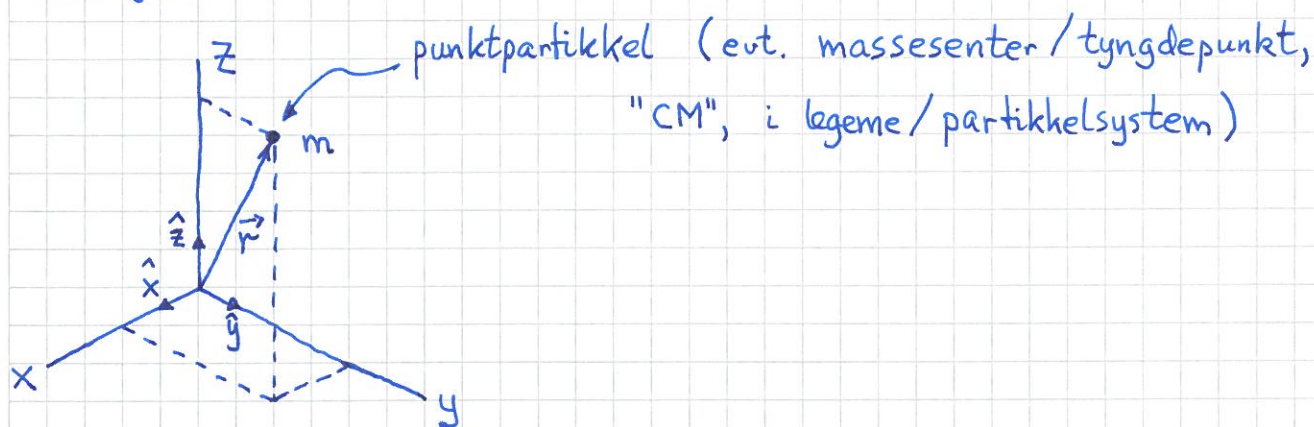
Løsn: 1 pint = 0.56826125 L \approx 0.568 dm³

$$= 0.568 \cdot (10^{-1} \text{ m})^3 = \underline{5.68 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3}$$

Kinematikk [YF 2,3 ; TM 2,3 ; LL 1 ; HS 2.1]

= beskrivelse av bevegelse

Posisjon:



$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} + z(t) \hat{z}$$

= posisjonen til m ved tid t (i kartesiske koord.)

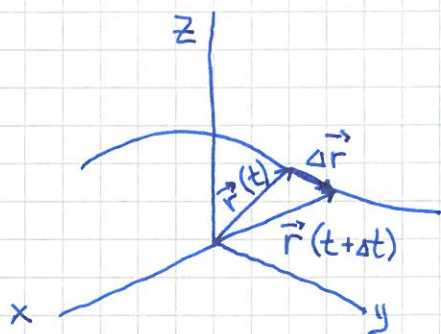
$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ = enhetsvektorer i hver x-, y-, z-retning

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1 ; \quad [\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \quad (\text{dimensjonsløse})$$

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1, \quad \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \dots = 0$$

m's bevegelse beskrives ved banen $\vec{r}(t)$:

(3)



Forflytning (i løpet av tid Δt):

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

(= posisjonsendring)

Hastighet = forflytning pr tidsenhet:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Δt er (positiv) skalar, så $\vec{v} \parallel \Delta \vec{r}$, dvs \vec{v} er tangentiell til banen

Akselerasjon = hastighetsendring pr tidsenhet:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Standard notasjon for derivert mhp tid t :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad \text{etc.}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

Med kartesiske komponenter:

(4)

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \\ \parallel \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{dx}{dt} \hat{x} + \frac{dy}{dt} \hat{y} + \frac{dz}{dt} \hat{z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} \text{ etc.}$$

Tilsvarende: $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ etc.

M.a.o: Finner \vec{v} og \vec{a} fra \vec{r} og \vec{v} med derivasjon (mhp t)

\Rightarrow Må kunne finne \vec{r} og \vec{v} fra \vec{v} og \vec{a} med integrasjon:

Først i én dimensjon (dvs rettlinjet, 1D):

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v \cdot dt$$

$$\Rightarrow \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^t v(t) dt \Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(t) dt$$

Tilsvarende:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a \cdot dt$$

$$\Rightarrow \int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^t a(t) dt \Rightarrow v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(t) dt$$

Generalisering til 3D: $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, $\vec{a} = d\vec{v}/dt$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt$$

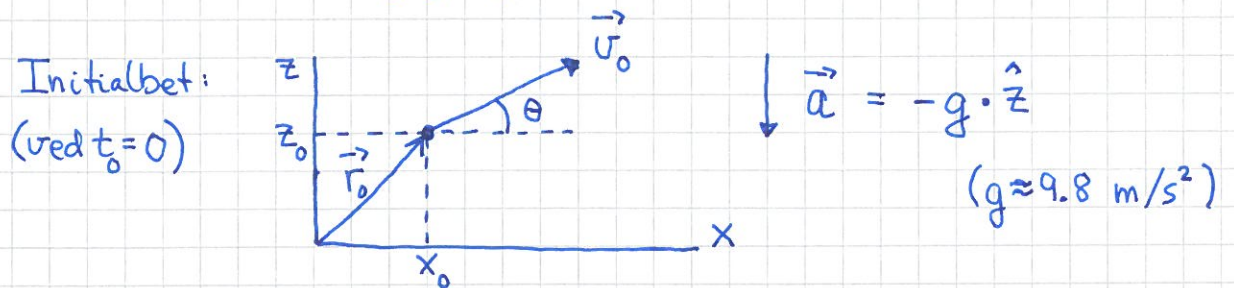
$$\int_{\vec{v}(t_0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt$$

Eks: $\vec{a} = \text{konstant}$, og initialbetingelser $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$ (5)

Dermed: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0)$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot (t - t_0)^2$$

Eks: Skrått kast i tyngdefeltet.

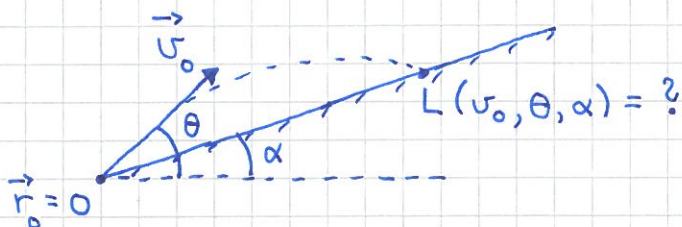


$$\Rightarrow x(t) = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{1}{2} a_x t^2 = x_0 + v_0 t \cos \theta$$

$$z(t) = z_0 + v_{0z} \cdot t + \frac{1}{2} a_z t^2 = z_0 + v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2$$

Eliminasjon av t gir banen $z(x)$. [Parabel; vis dette!]

Øving 1: Skrått kast i motbakke.



Eks: Hastighetsavhengig akselerasjon, $a = a(v)$.

Gitt $v(0) = v_0$, bestem $v(t)$.

Løsn: $a(v) = dv/dt \Rightarrow dt = dv/a(v)$

$$\Rightarrow t = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{a(v)} \Rightarrow \dots$$

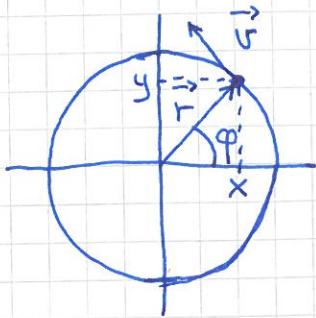
[Øving 1]

Sirkelbevegelse

[YF 3.4; TM 3.3; LL 1.7, 1.8; HS 2.1.2]

⑥

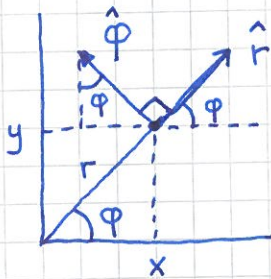
Først: $v = |\vec{v}| = \text{konst.}$ (uniform sirkelbevegelse)



Fra figur: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$
 $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{konst.}$
 $\vec{r} = r \cos \varphi \hat{x} + r \sin \varphi \hat{y}$
 $\tan \varphi = y/x$

Polarkoordinater: $r =$ avstand fra origo

$\varphi =$ vinkel mellom x-aksen og \vec{r}
(positiv mot klokka)



$\hat{r} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi$
 $=$ enhetsvektor radiekt (bort fra origo)
 $\hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$
 $=$ enhetsvektor angulært (mot klokka)

$$\hat{r} \cdot \hat{\varphi} = 0, \quad \hat{r} \cdot \hat{r} = \hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi} = 1$$

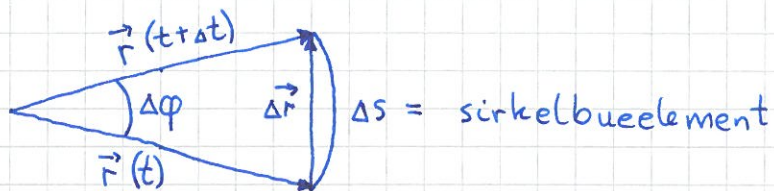
Vinkelhastighet = vinkelendring pr tidsenhet:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Vinkel = buelengde delt på radius:

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta s}{r} \Rightarrow [\varphi] = \left[\frac{s}{r} \right] = \frac{m}{m} = 1 \quad (\text{evt. rad})$$

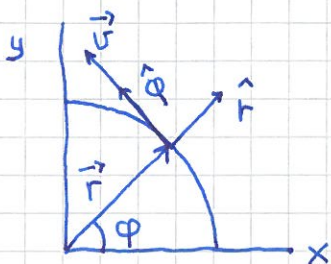
$$\Rightarrow [\omega] = [\varphi/t] = 1/s = s^{-1}$$



Hvis $\Delta t \rightarrow 0$: $\Delta \varphi \rightarrow 0$, $\Delta \vec{r} \perp \vec{r}$, $|\Delta \vec{r}| \approx \Delta s = r \cdot \Delta \varphi$

Dermed:
$$\underline{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \Delta \varphi}{\Delta t} = r \frac{d\varphi}{dt} = \underline{r \omega}$$

Retning på \vec{v} : $\vec{v} \parallel \Delta \vec{r}$ og $\Delta \vec{r} \perp \vec{r} \Rightarrow \underline{\vec{v} \perp \vec{r}}$



$$\vec{v} = v \hat{\varphi} = r \omega \hat{\varphi}$$

$v = \text{konst.} \Rightarrow \omega = \text{konst.} \Rightarrow \varphi$ endres lineært med t :

$$\omega = d\varphi/dt \Rightarrow \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} d\varphi = \int_0^t \omega dt \Rightarrow \varphi(t) = \varphi(0) + \omega t = \omega t$$

↑ anta $\varphi(0) = 0$

Dermed:

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} = r \cos \omega t \hat{x} + r \sin \omega t \hat{y}$$

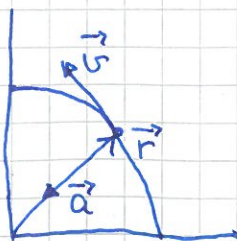
$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t) \hat{x} + \dot{y}(t) \hat{y} = -r\omega \sin \omega t \hat{x} + r\omega \cos \omega t \hat{y}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t) \hat{x} + \ddot{y}(t) \hat{y} = -r\omega^2 \cos \omega t \hat{x} - r\omega^2 \sin \omega t \hat{y}$$

Dvs:

$$\boxed{\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}}$$

Akselerasjon ved uniform sirkelbevegelse
(sentripetalakselerasjon)



$$\vec{r} = r \hat{r}, \quad v = \omega r$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -r\omega^2 \hat{r} = -\frac{v^2}{r} \hat{r}$$

Flere nyttige størrelser for sirkelbevegelse:

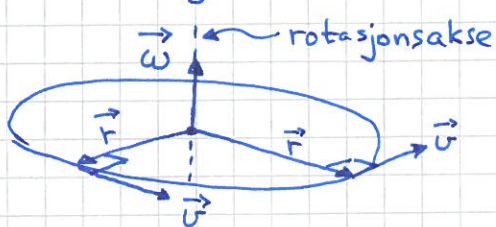
Vinkelakselerasjon: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ $[\alpha] = s^{-2}$

Periode: $T = \text{tid pr omdreining}$ $[T] = s$

Frekvens: $f = \text{antall omdreininger pr tidsenhet}$ $[f] = \text{Hz} = s^{-1}$

Dermed: $v = \frac{2\pi r}{T}$, $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$, $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

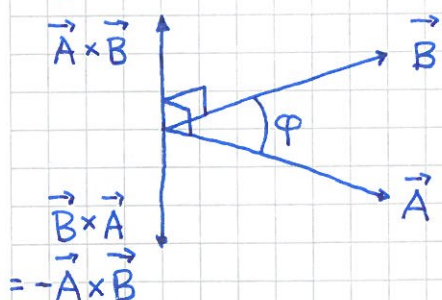
Vinkelhastighet som vektor:



La $\vec{\omega}$ peke langs rot.aksen

\Rightarrow kan da skrive $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Kryssprodukt:



- $\vec{A} \times \vec{B} \perp \vec{A}$ og \vec{B}
- Fortegn via høyrehandsregel
- $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \varphi$
 $= A \cdot B \cdot \sin \varphi$

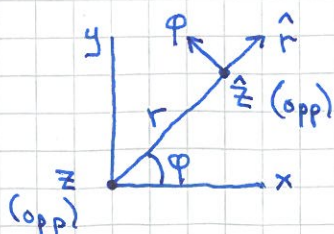
For sirkelbevegelsen:

$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin \frac{\pi}{2} = \omega r = v$, OK!

$\vec{\omega}$ opp $\Rightarrow \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ mot klokka (og omvendt)

Ehetsvektorer og kryssprodukt:

$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$, $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$, $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$, $\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0$



$\hat{r} \times \hat{\phi} = \hat{z}$, $\hat{\phi} \times \hat{z} = \hat{r}$, $\hat{z} \times \hat{r} = \hat{\phi}$

Newtons lover [YF 4,5; TM 4,5; LL 2,3; HS 2] (9)

Empiriske lover (ders: basert på eksperimenter, erfaring):

N1: $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{konst.}$

Null netto ytre kraft \Rightarrow legemet forblir i ro eller i rettlinjet bevegelse med uendret hastighet.

N2: $\vec{F} = m\vec{a}$

Netto ytre kraft $\vec{F} \Rightarrow$ legemet får akselerasjon proporsjonal med \vec{F} ; $m =$ legemets masse

N3: $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

Hvis A virker på B med kraft \vec{F}_{AB} , så virker B på A med kraft $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$. Legemene A og B vekselvirker.

Enhet: $[F] = [m \cdot a] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}$ (newton)

Fundamentale krefter i naturen

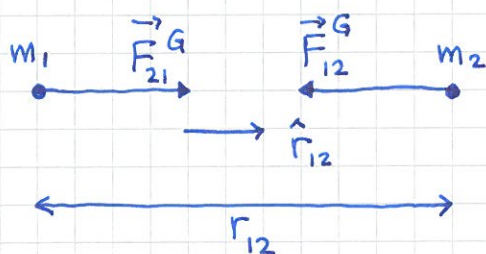
[YF 5.5; TM 4.2; LL 2.1; HS 2.2.2]

- Gravitasjon: Svak tiltrekning mellom legemer pga masse
- Elektromagnetisk: Tiltrekning eller frastøtning pga elektrisk ladning

(• Svake og sterke kjernekrefter: Kort rekkevidde, hvor ca 10^{-18} m og 10^{-15} m, beskriver hvor radioaktivitet og at kjernepartiklene holdes sammen.)

Newton's gravitasjonslov:

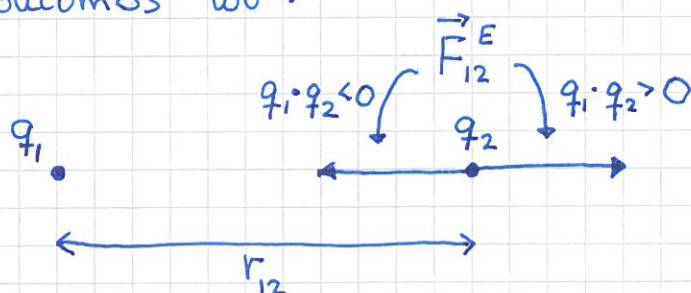
(10)



$$\vec{F}_{12}^G = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{kg}^2$$

Coulombs lov:



$$\vec{F}_{12}^E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$[q] = \text{C (coulomb)}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2 ; \epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{Nm}^2$$

(vakuumpermittiviteten)

Mellom 2 elektroner: $F^G / F^E \sim 10^{-43}$

[Sjekk selv! $m \sim 10^{-30} \text{ kg}$, $q \sim 10^{-19} \text{ C}$]

Mellom jorda og månen: $F^G / F^E \sim 10^{15}$

[Selv om vi antar netto ladning $q \sim 10^6 \text{ C}$ på begge]

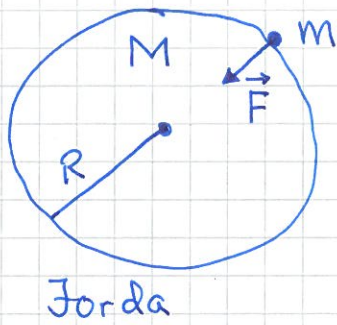
"Dagligdagse" objekter er (omtrent) elektrisk nøytrale

\Rightarrow coulombkraftene er i stor grad nøytralisert

\Rightarrow "hverdagen" styres av både F^G og F^E

Masse og tyngde

[YF 4.4; TM 4.4; LL 2.5; HS 2.2.1] (11)



$$M \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad R \approx 6370 \text{ km}$$

\Rightarrow m ved jordas overflate trekkes mot jordas sentrum med tyngdekraften \vec{F} .

$$F = |\vec{F}| = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot g$$

med $g = G \cdot M / R^2 \approx 9.8 \text{ m/s}^2 =$ tyngdens akselerasjon

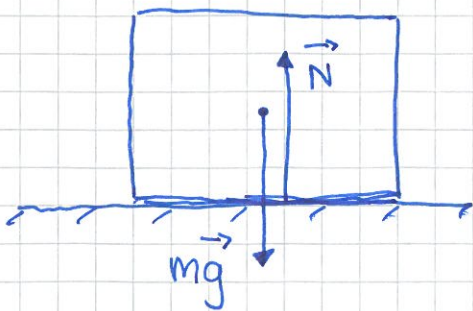
Hvis mg er eneste kraft : fritt fall !

$$\text{Da blir : } mg \stackrel{N2}{=} ma, \quad \text{dvs } \underline{a = g}$$

Coulombkrefter i mekanikken : Kontaktkrefter

[YF 4.1; TM 4.5; LL 3; HS 2.3]

Trykk-kraft (Normalkraft) :

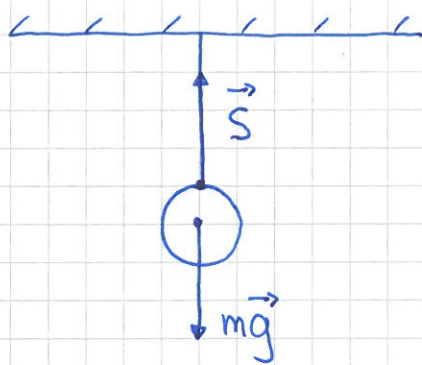


$$\text{kloss i ro} \stackrel{N1}{\Rightarrow} N = mg$$

Normalkraften N er netto frastøtende coulombkraft fra underlaget på klossen.

[Spm: Hva er motkreftene ($N3!$) til \vec{N} og \vec{mg} ?]

Strekk-kraft (Snordrag):

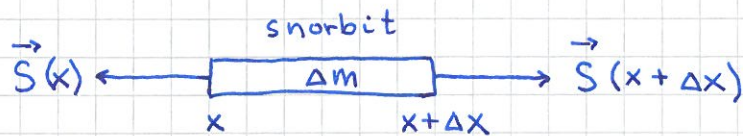


kule i ro $\xrightarrow{N1} S = mg$

Snordraget S er netto tiltrekkende coulombkraft ~~fra snora~~ fra snora på kula

[Spm: Hva er motkraften til \vec{S} ?]

Lett snor/stang antas ofte masseløs, $m_{snor} \approx 0$.

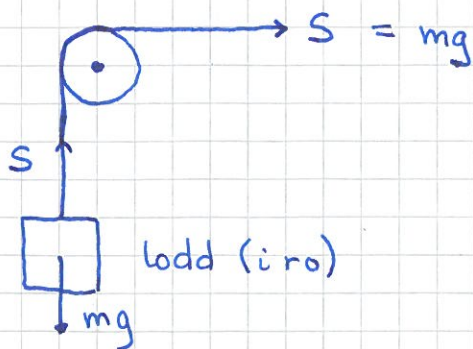


$$N2: \vec{S}(x+\Delta x) + \vec{S}(x) = \Delta m \cdot \vec{a}$$

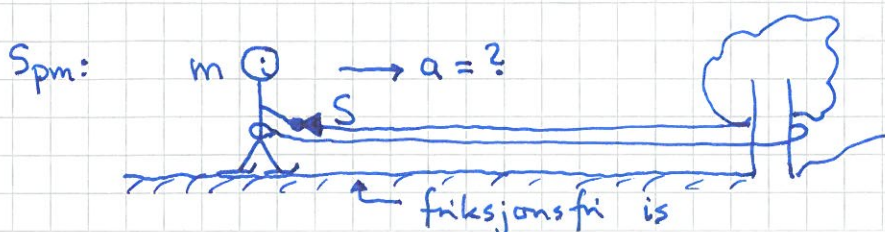
$$\Rightarrow \vec{S}(x+\Delta x) = -\vec{S}(x) \text{ hvis } \Delta m = 0 \text{ (og/eller } \vec{a} = 0)$$

\Rightarrow like stor $S = |\vec{S}|$ langs hele snora

Retningsendring med kant eller trinse:



[Spm: Hva hvis vi har friksjon mellom tau og trinse/sylinder?]

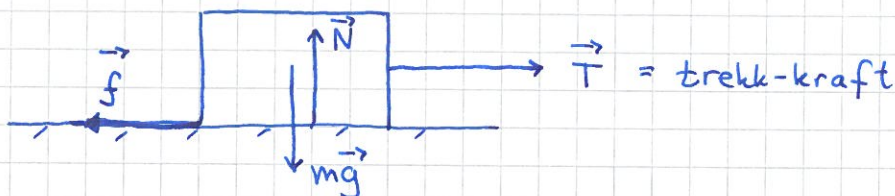


Friksjon [YF 5.3 ; TM 5.1, 5.2 ; LL 3.1 ; HS 2.3]

(13)

coulombkraft / kontaktkraft \vec{f} rettet mot (potensiell) relativ bevegelse

Tørr friksjon :



Statisk (kloss i ro) : $N \Rightarrow f = T$

Empirisk : $f_{\max} = \mu_s N$

Kinetisk (kloss i bevegelse) : $f = \mu_k N$

Friksjonskoeffisienter : μ_s, μ_k Enhet : $[\mu] = 1$

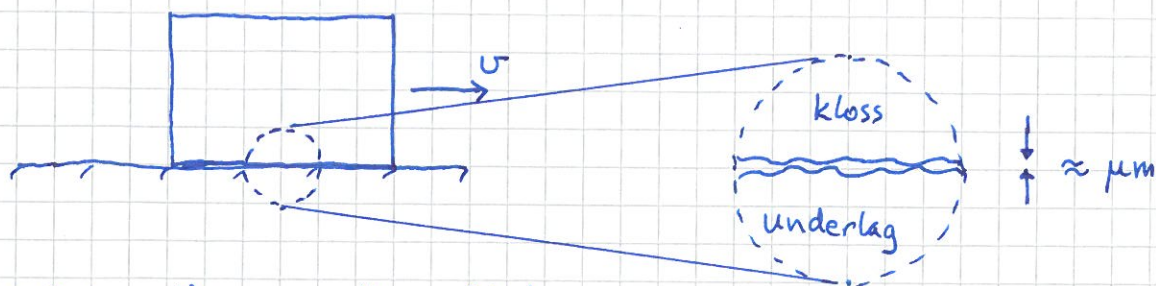
Noen tallverdier :

Tre mot tre : $\mu_s = 0.25 - 0.50$ $\mu_k \approx 0.2$

Gummi mot tørr asfalt : $\mu_s \approx 1.0$ $\mu_k \approx 0.8$

— " — våt — " — : $\mu_s \approx 0.3$ $\mu_k \approx 0.25$

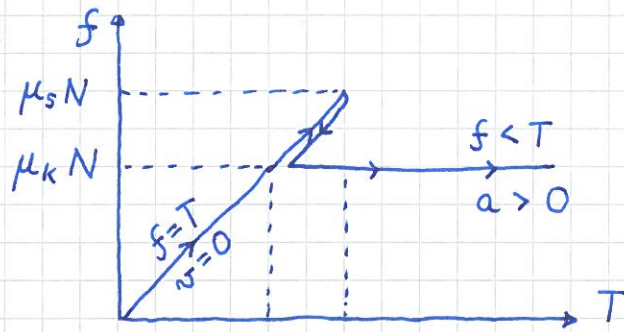
Hvorfor er $\mu_k < \mu_s$?



$v = 0$: godt grep mellom flatene

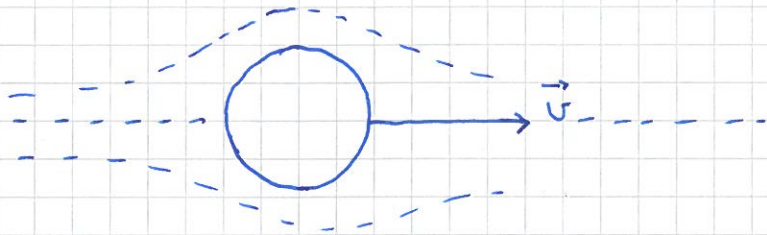
$v > 0$: "flyter" oppå

Dermed:



Friksjon i fluider (Våt friksjon)

[YF 5.3; TM 5.2; (LL 8); HS 2.3.4]



- liten $v \Rightarrow$ pen, laminær strømning av fluidet

$$\vec{f} = -k \vec{v} = -k v \hat{v} \quad \left[\begin{array}{l} \text{kan utledes fra} \\ \text{Newton's lover} \end{array} \right]$$

Kule: $\vec{f} = -6\pi\eta R \vec{v}$ Stokes' lov (Lab nr 1)

$R =$ kulas radius

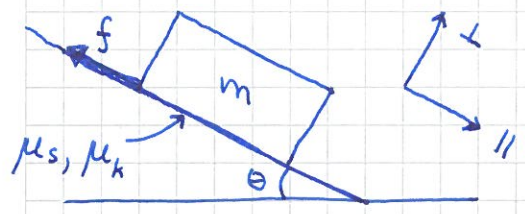
$\eta =$ fluidets viskositet

- stor $v \Rightarrow$ turbulent strømning

$$\vec{f} = -D v^2 \hat{v} \quad (D \text{ for "drag"})$$

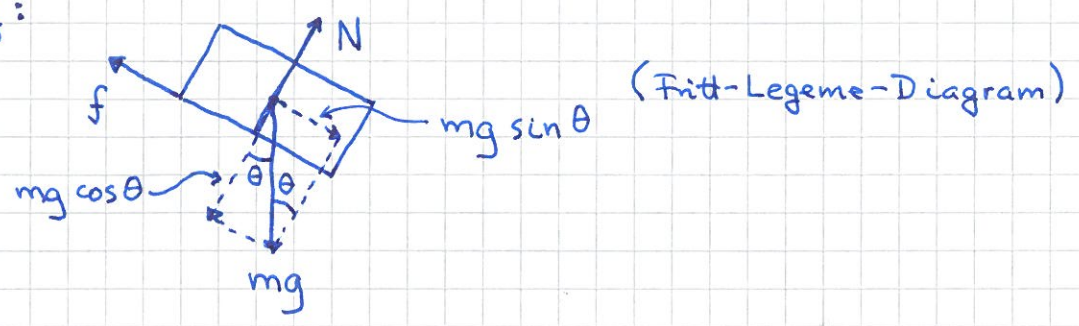
[empirisk]

Lett eks: Kloss på skråplan



- Hva er f, med kloss i ro?
- " — i beregelse?
- Minimal μ_s for kloss i ro?
- $\mu_s < \mu_s^{min} \Rightarrow a_{||} = ?$

Løsning:



• I ro: $\sum F_{||} = 0 \Rightarrow \underline{f = mg \sin \theta}$

I beregelse: $f = \mu_k N = \underline{\mu_k mg \cos \theta}$

(da $\sum F_{\perp} = 0 \Rightarrow N = mg \cos \theta$)

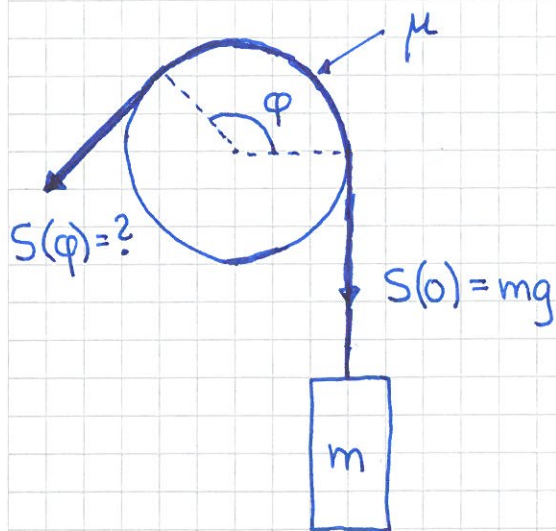
• I ro: $f \leq \mu_s N \Rightarrow$ begynner å gli når $f = \mu_s^{min} \cdot N$
 $\Rightarrow \mu_s^{min} = f/N = mg \sin \theta / mg \cos \theta = \underline{\tan \theta}$

• Hvis $\mu_s < \mu_s^{min}$, dvs $\theta > \arctan \mu_s$:

$$a_{||} = \sum F_{||} / m = (mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta) / m$$

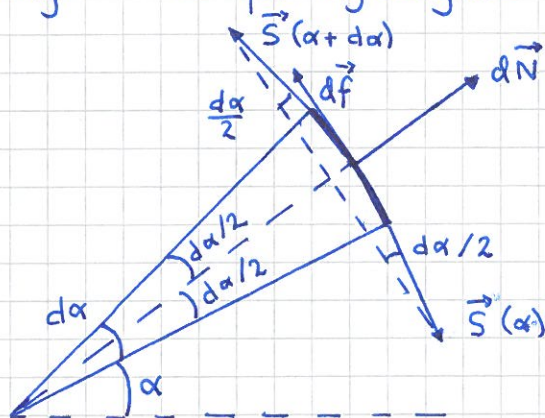
$$= \underline{g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)}$$

Vanskelig eks: Tau rundt sylinder



Eksp. med plastrør, hyssing og lodd viser at snordrag $S(\varphi)$ som er nødvendig for å holde lodd oppe, evt. heise opp lodd, avhenger sterkt av φ , der φ = vinkelen med kontakt mellom hyssing og rør.
Bestem $S(\varphi)$.

Løsning: Se på hyssingbit mellom α og $\alpha + d\alpha$:



- \vec{S} = kraft fra resten av hyssingen på hyssingbiten
- $d\vec{N}$ = normalkraft fra rør på hyssingbit
- $d\vec{f}$ = friksjonskraft ————— ; $df \leq \mu \cdot dN$

Minste nødvendige $S(\varphi)$ finnes når $df = \mu dN$.

Lodd i ro når $\vec{S}(\alpha + d\alpha) + \vec{S}(\alpha) + d\vec{N} + d\vec{f} = 0$ (N1)

Tangentielt: $S(\alpha + d\alpha) \cdot \cos \frac{d\alpha}{2} - S(\alpha) \cdot \cos \frac{d\alpha}{2} + df = 0$

Normalt: $S(\alpha + d\alpha) \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} + S(\alpha) \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} - dN = 0$

Når $d\alpha \rightarrow 0$:

$$\cos \frac{d\alpha}{2} \approx 1, \quad \sin \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$$

$$S(\alpha + d\alpha) + S(\alpha) \approx 2S(\alpha)$$

$$S(\alpha + d\alpha) - S(\alpha) = dS$$

Dermed:

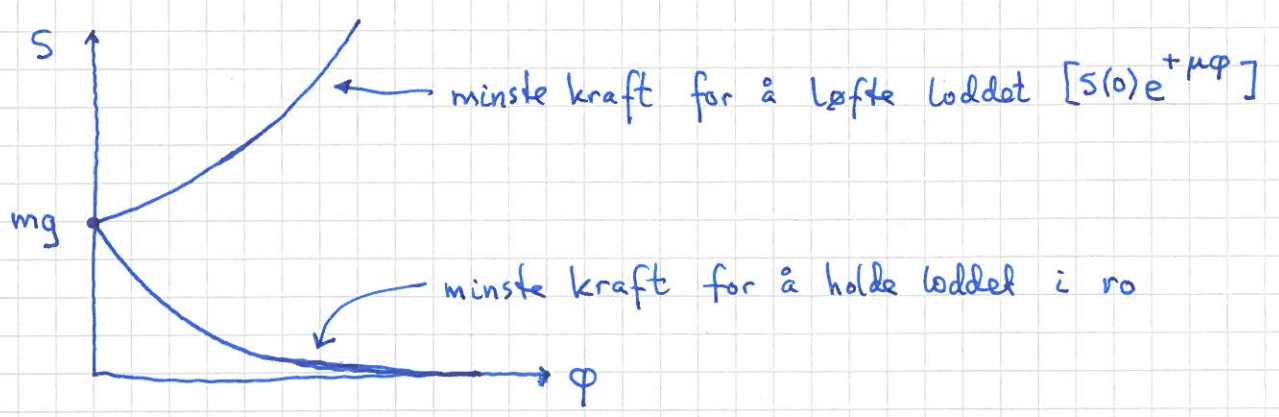
$$dS + \mu dN = 0$$

$$2S \cdot \frac{d\alpha}{2} - dN = 0$$

$$\Rightarrow \int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = - \int_0^{\varphi} \mu d\alpha$$

$$\Rightarrow \underbrace{\ln S(\varphi) - \ln S(0)}_{= \ln \frac{S(\varphi)}{S(0)}} = -\mu\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{S(\varphi) = S(0) e^{-\mu\varphi}} \quad S(0) = mg$$

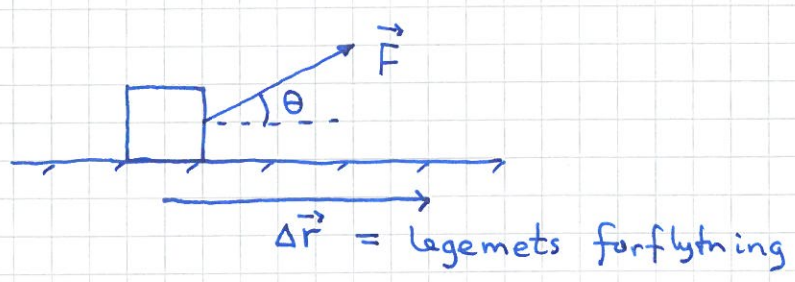


Med $\mu = 0.2$ og $2 \frac{1}{4}$ "omdreining", dvs $\varphi = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} = 9\pi/2$:

$$S(\varphi)/S(0) = \exp(-0.2 \cdot 9\pi/2) \approx 0.06$$

Arbeid og energi [YF 6,7; TM 6,7; LL 4; HS 3]

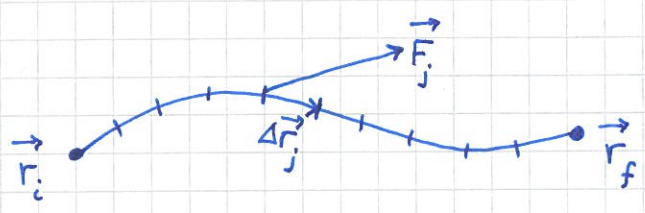
Arbeid [YF 6.1-6.3; TM 6.1-6.3; LL 4.1; HS 3.1]



$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta = \text{arbeid utført av kraft } \vec{F} \text{ på legemet}$$

$$[W] = [F \cdot r] = \text{Nm} = \text{J (joule)}$$

Generelt:



Arbeid utført ved forflytning fra \vec{r}_i til \vec{r}_f :

$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \xrightarrow{\Delta \vec{r}_j \rightarrow 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Effekt [YF 6.4; TM 6.3; LL 4.1; HS 3.1]

effekt $\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{(energi)}}{\text{arbeid pr tidsenhet}}$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

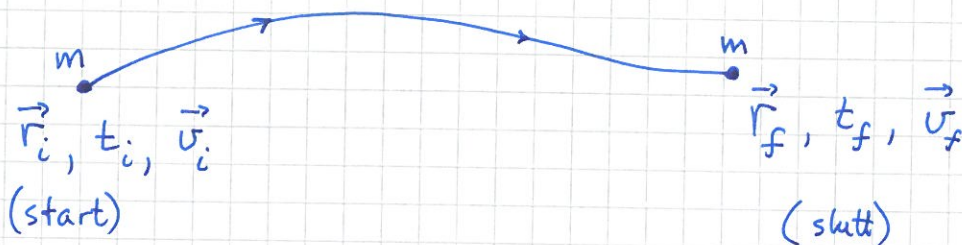
$$[P] = [W/t] = \text{J/s} = \text{W (watt)}$$

Eks: Om på 1000 W står på i 1 time. Energi forbruk = ?

$$\text{Løsn: } \Delta W = P \cdot \Delta t = 1 \text{ kW} \cdot 1 \text{ h} = \underline{\underline{1 \text{ kWh}}} = 1000 \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 3600 \text{ s} = \underline{\underline{3.6 \text{ MJ}}}$$

Kinetisk energi [YF 6.2; TM 6.1; LL 4.2; HS 3.1]

(19)



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} dt = m \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{u}}_{=u^2} \right) dt$$
$$= \frac{1}{2} m u_f^2 - \frac{1}{2} m u_i^2$$

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2 = \text{kinetisk energi}$$

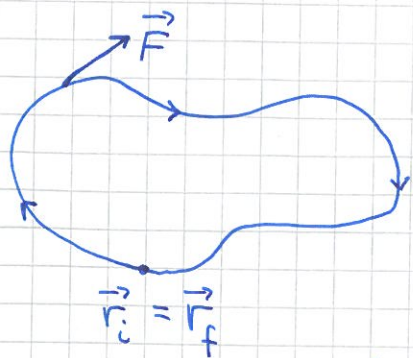
$$\Rightarrow \boxed{W = K_f - K_i = \Delta K}$$

Arbeid W utført av (netto) ytre kraft \vec{F} tilsvarende endringen ΔK i legemets kinetiske energi

Konservativ kraft. Potensiell energi. Energibevarelse.

[YF 7.1-7.4; TM 7.1-7.3; LL 4.3-4.5; HS 3.2.1]

Konservativt system = system uten tap av mekanisk energi (dvs uten dissipasjon) til andre energiformer (som varme)



(rundtur; lukket kurve)

Hvis \vec{F} er konservativ, er $K_f = K_i$ (og $u_f = u_i$); dvs $W = \Delta K = 0$.

$$\text{Dermed: } \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_i} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Standard notasjon:

$$\boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0}$$

\oint : integral rundt lukket kurve

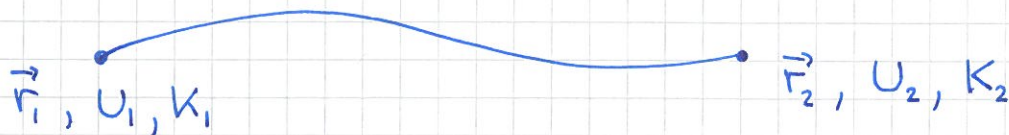
Potensiell energi:

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

(20)

Her er \vec{F} en kons. kraft, og vi har valgt $U(\vec{r}_0) = 0$

Mekanisk energibevarelse:

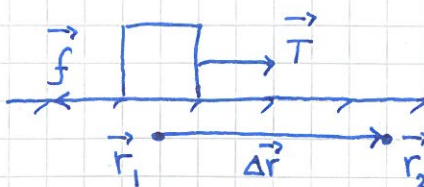


$$U_1 - U_2 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = K_2 - K_1$$

$$\Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

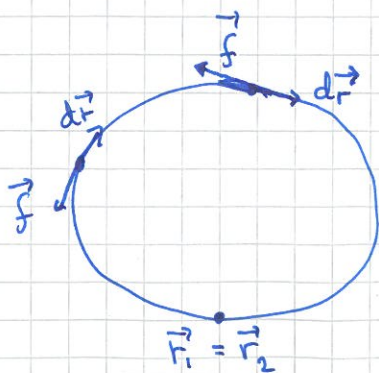
Dvs: Total mekanisk energi, $E = K + U$, er konstant for et konservativt system

Friksjonsarbeid:



$$W_f = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \quad \text{fordi } \vec{f} \text{ er rettet mot } d\vec{r}$$

\Rightarrow friksjonsarbeidet W_f "går tapt" (som varme)

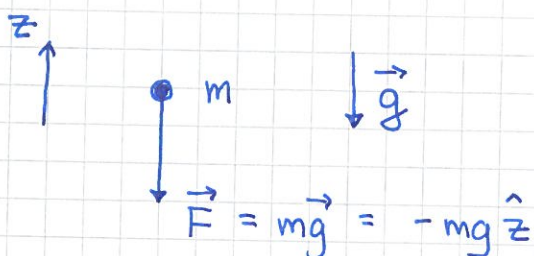


$$\Rightarrow \oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$$

\Rightarrow friksjonskraft \vec{f} er ikke konservativ

Eks: Tyngdefeltet

(21)

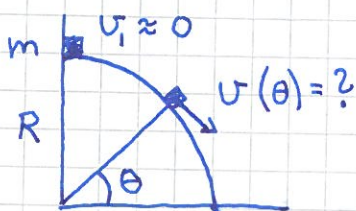


- Velg $U(0) = 0$ og bestem $U(z)$
- Anta $v(0) = 0$ og bestem $v(z)$ ($z < 0$)

Løsning: • $U(z) = - \int_0^z \underbrace{(-mg\hat{z})}_{\vec{F}} \cdot \underbrace{(\hat{z} dz)}_{d\vec{r}} = \underline{\underline{mgz}}$

• $E(0) = U(0) + K(0) = 0 = U(z) + K(z)$
 $= mgz + \frac{1}{2} m v(z)^2$
 $\Rightarrow v(z) = \underline{\underline{\sqrt{-2gz}}}$ ($z < 0$)

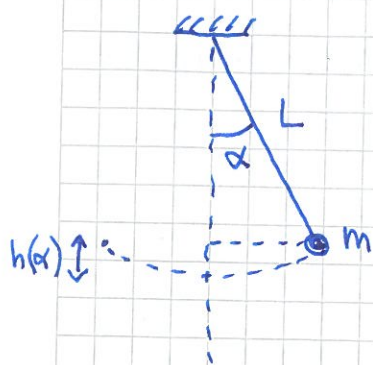
Eks: Gli på kuleflate (uten friksjon)



Løsn: E er bevart
 $\Rightarrow \frac{1}{2} m v(\theta)^2 + mgR \sin \theta = mgR$
 $\Rightarrow v(\theta) = \underline{\underline{\sqrt{2gR(1 - \sin \theta)}}$

[Spm: Fra der hvor normalkrafta N fra underlaget forsvinner ($N=0$) har vi et "skrått kast". Ved hvilken vinkel θ skjer dette?]

Eks: Matematisk pendel



Bestem $E(\alpha, \dot{\alpha})$.

Løsn: $U(\alpha) = mgh(\alpha) = mgL(1 - \cos \alpha)$ [Velgen $U(0) = 0$]
 $K(\dot{\alpha}) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (L\dot{\alpha})^2$

$\Rightarrow E(\alpha, \dot{\alpha}) = \underline{\underline{\frac{1}{2} m L^2 \dot{\alpha}^2 + mgL(1 - \cos \alpha)}}$

Swingninger

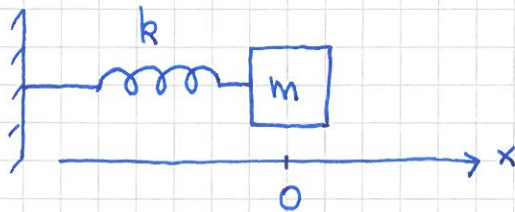
[YF 14; TM 14; LL 9; HS 6]

(22)

= oscillasjoner = periodisk oppførsel omkring likevekt

Eks: masse/fjær, pendel, gitarstreng, vibrerende atomer i krystall, ...

Harmonisk oscillator [YF 14.2; TM 14.1; LL 9.1-9.3; HS 6.1]



Likevekt ($F=0$) med m i $x=0$.

Strukket fjær ($x > 0$):

Sammenpresset fjær ($x < 0$):

$$\vec{F} = -k \times \hat{x}$$

Hookes lov

Ideell fjær: $F \sim |x|$

$$N2: -kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\text{Innfør } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Ligning for
harm. osc. i
1D

Generell løsning:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{evt. } x(t) = B \cos \omega t + C \sin \omega t$$

2.ordens diff. lign. \Rightarrow 2 integrasjonskonstanter,

[A og φ fastlegges via 2 initialbetingelser, φ f.eks. $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$]

[$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \Rightarrow$ sammenheng mellom A, φ og B, C]

A = amplitude = max utsving

ω = vinkel-frekvens = vinkelhastighet

$[\omega] = s^{-1}$

T = $2\pi/\omega$ = periode = tid pr svingning

$[T] = s$

f = T^{-1} = frekvens = antall svingn. pr tidsenhet

$[f] = Hz = s^{-1}$

$\omega t + \varphi$ = svingningens fase

φ = fasekonstant

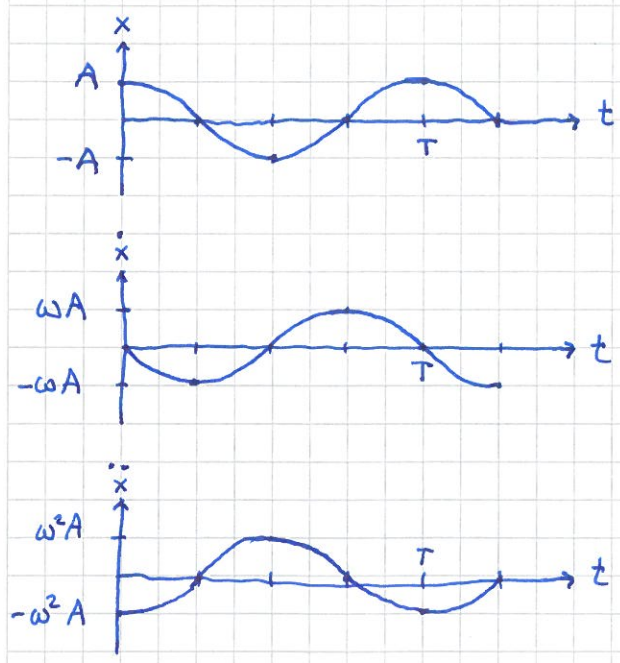
$[\varphi] = 1$

$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

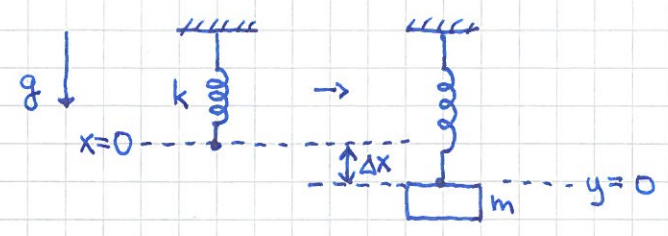
$\Rightarrow \dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = \omega A \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$

$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi + \pi) = -\omega^2 x(t)$

Anta f.eks. $\varphi = 0$ og $A > 0$:



Hvis vertikalt i tyngdefeltet (Øving 3 og Lab):



\Rightarrow Harmonisk svingn. om $y=0$, med $\omega = \sqrt{k/m}$ som før.

Energi i harmonisk oscillator

(24)

[YF 14.3; TM 14.2; LL 9.4 ~~§~~ §§]

Massens kinetiske energi:

$$K(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2} m \underbrace{\omega^2 A^2}_{=k} \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Potensiell energi i fjæra:

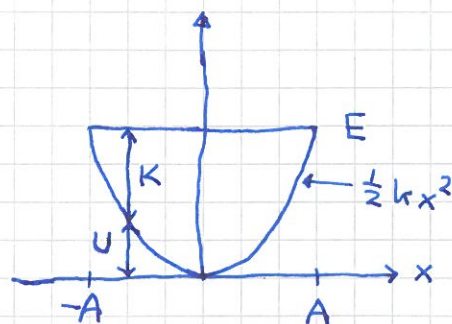
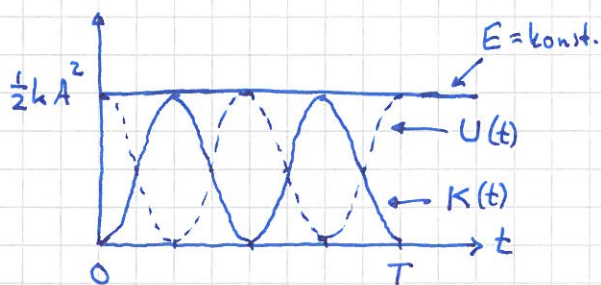
$$U = - \int_0^x F(x) \cdot dx = - \int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\Rightarrow U(t) = \frac{1}{2} k x(t)^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Total energi: $E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \text{konstant}$

\Rightarrow vi har konserverbart system; E er bevart

Anta $\varphi = 0$:



Enkel harmonisk oscillator, oppsummering:

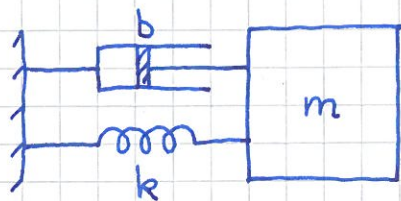
- F er proporsjonal med utsvinget fra likevekt
- U ————— " ————— kvadraten av utsvinget
- Bevegelsesligning: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
- "Utsving" kan være lengde, vinkel etc

Fra sist:



$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= 0; \quad \omega = \sqrt{k/m} \\ x(t) &= A \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right\} \text{ Enkel harmonisk oscillator}$$

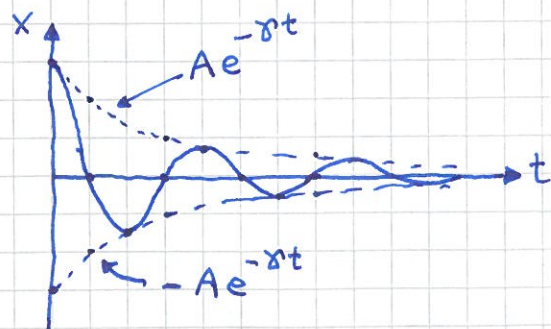
Dempet svingning [YF 14.7; TM 14.4; LL 9.7; HS 6.2.1]

Friksjon \Rightarrow fri svingninger dempes (og dør ut)Antar $f = -b\dot{x}$ (som for langsom bevegelse i fluid; s.14)

$$\begin{aligned} \text{N2: } -kx - b\dot{x} &= m\ddot{x} \\ \Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0; \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ [\gamma] &= [\omega_0] = \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Underkritisk demping, $\gamma < \omega_0$ (dvs $b < 2m\sqrt{k/m} = \sqrt{4k \cdot m}$)

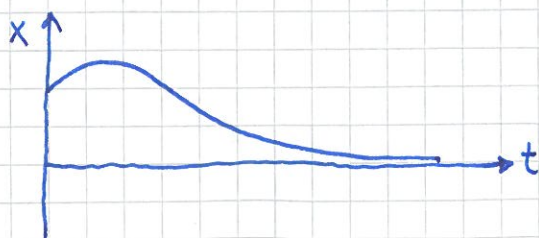
$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi); \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



- redusert frekvens pga demping ($\omega < \omega_0$)
- amplituden, $Ae^{-\gamma t}$, avtar eksponentielt med t
- A, φ fastlegges med 2 initialbetingelser:

Overkritisk demping, $\gamma > \omega_0$

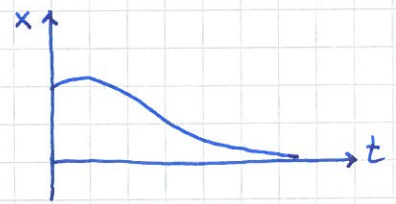
$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}; \quad \alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$



(dvs ingen svingninger)

Kritisk demping, $\delta = \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\delta t} + B t e^{-\delta t}$$

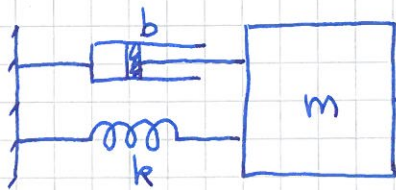


(26)

Eks: Støtdempere i bil dempes nær kritisk

\Rightarrow mest behagelig på humpete vei

Tvingen svingning. Resonans [YF 14.8; TM 14.5; LL 9.9; HS 6.3]



$F_y(t) = F_0 \cos \omega t =$ ytre kraft, antas harmonisk

$$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

[inhomogen 2.ordens diff.ligning]

Løsning: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

der homogen løsn. x_h oppfyller $\ddot{x}_h + 2\delta\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$

og partikulær løsn. x_p — " — $\ddot{x}_p + 2\delta\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$

I starten (dvs: før $e^{-\delta t}$ blir mye mindre enn 1) bidrar både x_h og x_p til et (som regel) komplekst innsvingningsforløp (jf Laboppg.).

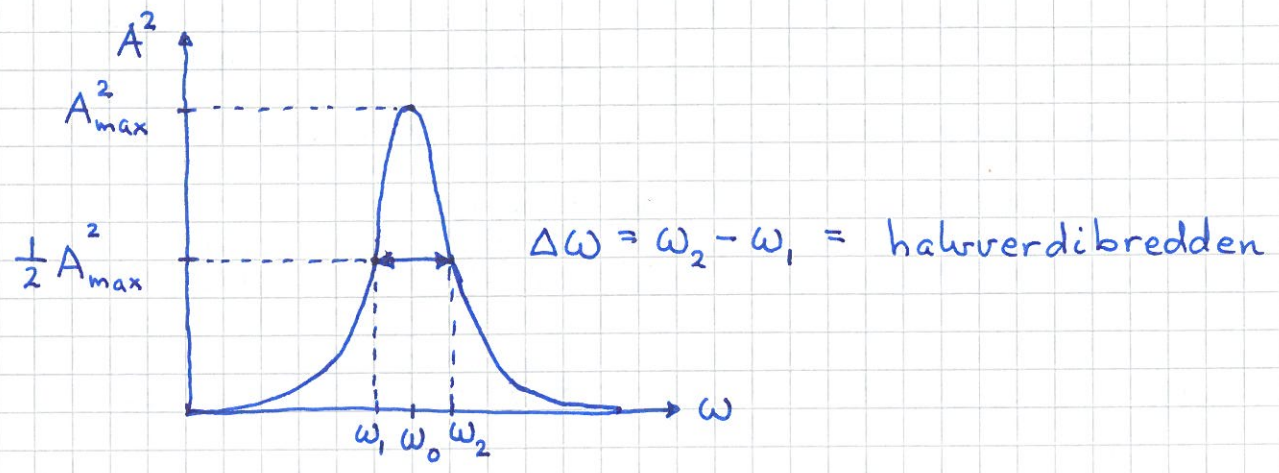
Etter "lang tid", slik at $\delta t \gg 1$ og $e^{-\delta t} \approx 0$, vil

$x_h(t) \rightarrow 0$, og $x(t) \approx x_p(t)$.

"Gjetter" $x_p(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$, verifiseres ved innsetting, og finner den frekvensavhengige amplituden.

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\delta = \frac{b}{m}$$

som viser at vi får resonans: Med svak demping (dvs liten δ) og ytre kraft med frekvens ω i nærheten av systemets egenfrekvens $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, så blir amplituden A stor:



$\Delta\omega$ refererer til oscillatorens energi, som er prop. med A^2 (se s. 24). Liten $\delta \Rightarrow$ skarp resonans, med $\Delta\omega \approx 2\delta$.

Resonanstoppens Q-faktor (Q for "quality"):

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\delta} \quad (\gg 1 \text{ hvis } \delta \ll \omega_0)$$

Frekvensavhengig fasekonstant:

$$\varphi(\omega) = \arctan \left\{ \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega} \right\}$$

Tilført effekt av $F_y(t) = F_0 \cos \omega t$ ved resonans, $\omega \approx \omega_0$:

$$P(t) = F_y(t) \cdot \dot{x}_p(t) = F_0 \cos \omega t \cdot \omega A(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \varphi = \arctan 0 = 0, \text{ og } A = A(\omega_0) = A_{\max} = \frac{F_0}{b \cdot \omega_0}$$

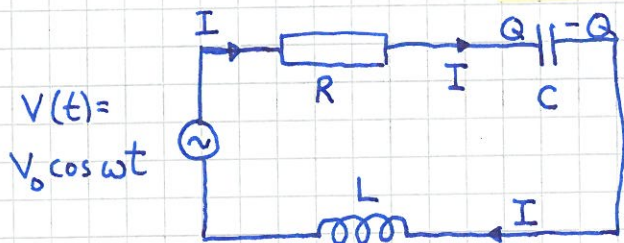
$$\Rightarrow P(t) = \frac{F_0^2}{b} \cdot \cos^2 \omega_0 t \geq 0 \text{ hele tiden;}$$

dvs maksimal tilført effekt ved resonans!

Elektrisk svingekrets

(Denne siden er ikke pensum i TFY4115; kun orienteringsstoff!)

27B



$$I = dQ/dt = \dot{Q}$$

- R : motstand
- C : kondensator
- L : spole

Spenning over motstand R : $V_R = R \cdot I = R \cdot \dot{Q}$ (Ohms lov)

— " — kapasitans C : $V_C = Q/C$

— " — induktans L : $V_L = L \cdot dI/dt = L \cdot \ddot{Q}$

Kirchhoffs spenningsregel $\Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V_0 \cos \omega t$

Dus nøyaktig samme diff.lign. for Q, ladningen på kondensatoren, som for x, massens utsving fra likevekt, i det mekaniske svingesystemet : $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$

Vi har dermed analoge ("tilsvarende") størrelser :

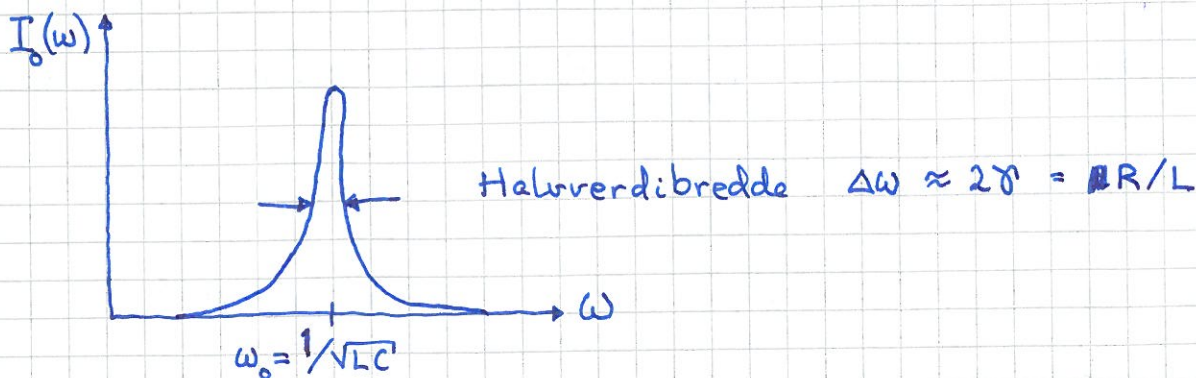
$$m \leftrightarrow L, \quad b \leftrightarrow R, \quad k \leftrightarrow 1/C, \quad x \leftrightarrow Q, \quad \dot{x} \leftrightarrow I$$

$$\omega_0^{\text{mek}} = \sqrt{k/m} \leftrightarrow \omega_0^{\text{el}} = \sqrt{1/LC} \quad \text{osv.}$$

$$Q(t) = Q_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow I(t) = \dot{Q}(t) = \omega Q_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{med } Q_0(\omega) = (V_0/L) / \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}; \quad 2\gamma = R/L$$

Resonans, dvs stor strømamplitude $I_0(\omega) = \omega Q_0(\omega)$, når $\omega \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$:



Eks : $L = 22 \text{ mH}, \quad C = 0.15 \mu\text{F}, \quad R = 20 \Omega$

$$\Rightarrow f_0 = 2.77 \text{ kHz}, \quad \Delta f \approx 0.29 \text{ kHz}, \quad Q = f_0/\Delta f \approx 20$$

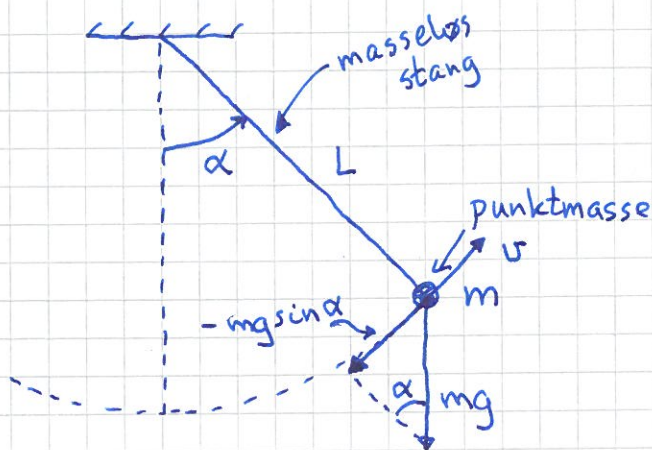
Eksempel, inkl. numerisk løsningsmetode

[TM 5.4]

(28)

(Øving 4, oppgave 1)

Matematisk pendel (se s. 21, samt øving 2, oppg. 4) :



N2 || sirkelbuen :

$$-mg \sin \alpha = m a_{||}$$

$$a_{||} = L \ddot{\alpha}$$

$$\Rightarrow \ddot{\alpha} + \frac{g}{L} \sin \alpha = 0$$

Hvis små utsving, $|\alpha| \ll 1$: $\sin \alpha \approx \alpha$

$$\Rightarrow \ddot{\alpha} + \frac{g}{L} \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \left. \vphantom{\alpha(t)} \right\} \text{ Enkel harmonisk oscillator}$$

med $\omega = \sqrt{g/L}$, dvs $T = 2\pi\sqrt{L/g}$

Hvis større utsving : $\ddot{\alpha} + \frac{g}{L} \sin \alpha = 0$ kan ikke løses analytisk ; numerisk løsningsmetode er nødvendig.

Enkleste metode er såkalt "forward Euler" :

Vi har (pr def.)

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{\dot{\alpha}(t+dt) - \dot{\alpha}(t)}{dt} \Rightarrow \dot{\alpha}(t+dt) = \dot{\alpha}(t) + \ddot{\alpha}(t) dt$$

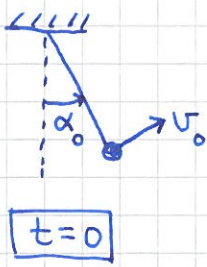
$$\dot{\alpha}(t) = \frac{\alpha(t+dt) - \alpha(t)}{dt} \Rightarrow \alpha(t+dt) = \alpha(t) + \dot{\alpha}(t) dt$$

La $dt \rightarrow$ endelig tidssteg Δt og " $=$ " \rightarrow " \approx " :

$$\alpha(t+\Delta t) \approx \alpha(t) + \dot{\alpha}(t) \Delta t$$

$$\dot{\alpha}(t+\Delta t) \approx \dot{\alpha}(t) + \ddot{\alpha}(t) \Delta t \quad \stackrel{\text{her}}{=} \dot{\alpha}(t) - \Delta t \cdot \frac{g}{L} \cdot \sin \alpha(t)$$

Dermed, med initialbetingelser $\alpha(0) = \alpha_0$ og $v(0) = v_0$, (29)
 dvs $\dot{\alpha}(0) = v_0/L$:



$$\alpha(\Delta t) \approx \alpha(0) + \dot{\alpha}(0) \Delta t = \alpha_0 + \frac{v_0}{L} \Delta t$$

$$\dot{\alpha}(\Delta t) \approx \dot{\alpha}(0) + \ddot{\alpha}(0) \Delta t = \frac{v_0}{L} - \Delta t \cdot \frac{g}{L} \cdot \sin \alpha_0$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha[(n+1) \cdot \Delta t] &\approx \alpha[n \cdot \Delta t] + \dot{\alpha}[n \cdot \Delta t] \cdot \Delta t \\ \dot{\alpha}[(n+1) \cdot \Delta t] &\approx \dot{\alpha}[n \cdot \Delta t] + \ddot{\alpha}[n \cdot \Delta t] \cdot \Delta t \end{aligned} \right\} n=0,1,2,\dots$$

Kan nå blant annet:

- plote $\alpha(t)$, $\dot{\alpha}(t)$ etc.
- regne ut $K(t)$, $U(t)$ og $E(t)$ og sjekke energibevarelse (se s. 21)
- sammenligne numerisk løsning med harm. osc.-tilnærmelsen
- inkludere friksjon, med $f = -bv$ evt $f = -Dv^2$ (se s. 14)
- inkludere ytre kraft $F_y(t)$

etc. etc.

Andre (og bedre) num. metoder for løsn. av ordinære diff.lign:

- Verlet
- Runge-Kutta

Verlet:
$$\dot{\alpha}(t) = \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t-\Delta t)}{2\Delta t}$$

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{\dot{\alpha}(t+\Delta t/2) - \dot{\alpha}(t-\Delta t/2)}{\Delta t}$$

$$= \frac{\frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} - \frac{\alpha(t) - \alpha(t-\Delta t)}{\Delta t}}{\Delta t}$$

$$= \frac{\alpha(t+\Delta t) - 2\alpha(t) + \alpha(t-\Delta t)}{\Delta t^2}$$

Impuls og impulsbevarelse [YF8; TM8; LL5; HS 3.6,3.7] (30)

[Terminologi: impuls \equiv beregelsesmengde]

[Engelsk: (linear) momentum]

N2 for legeme med (konstant) masse m :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

impuls = masse \cdot hastighet

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad [p] = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

Dermed:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \quad \text{N2}$$

som gir

Loen om impulsbevarelse:

Hvis sum av ytre krefter på et legeme er null, er legemets impuls bevart: $\vec{F}=0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konst.}$

Kollisjoner [YF 8.3+8.4; TM 8.3; LL 5.3; HS 3.7.1]

= (som regel kortvarige) støt mellom legemer

Elastisk støt: $\Delta K = 0$ (energien er bevart)

Uelastisk støt: $\Delta K < 0$ (— " — ikke bevart)

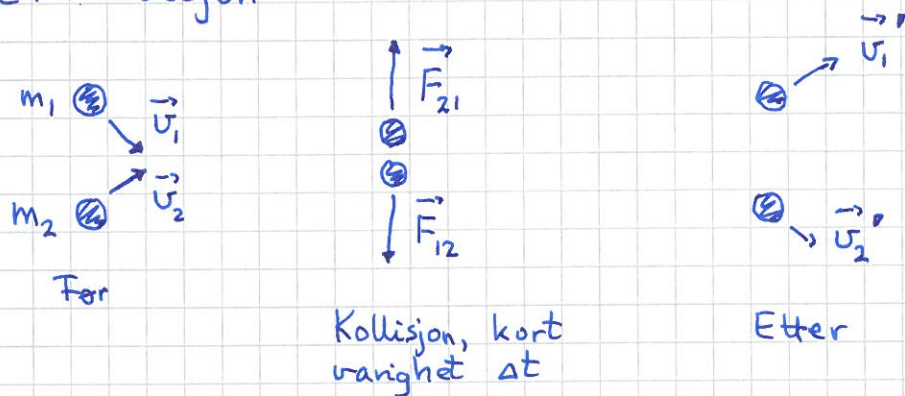
Fullstendig uelastisk støt: Legemene henger sammen og har felles hastighet etter kollisjonen.

(Gir maksimalt energitap $|\Delta K|$.)

Tapt mekanisk energi $\Delta K \rightarrow$ deformasjon, varme, lyd, ...

Men: Dersom $\vec{F}_{\text{ytre}} = 0$ (evt. neglisjerbar) under kollisjonen, er $\Delta \vec{p} = 0$ for alle typer kollisjoner.

Har typisk store men ukjente indre krefter i en kollisjon:



N_3 garanterer impulsbevarelse for systemet $m_1 + m_2$:

$$\vec{F}_{21} \stackrel{N_3}{=} -\vec{F}_{12}$$

$$\stackrel{N_2}{\Rightarrow} \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\Rightarrow d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst.}$$

Eks: Fullstendig uelastisk støt.

Før: $m \rightarrow v$, $M \leftarrow V$

Etter: $m+M \rightarrow v'=?$

Løsn: $p_{\text{før}} = mv - MV$
 $= p_{\text{etter}} = (m+M)v'$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v' = \frac{mv - MV}{m+M}}}$$

Eks: $\langle F \rangle$ på bordtennisball = ? $\langle F \rangle / mg = ?$

32

Løsning: $m = 2.7 \text{ g}$, $v_i \sim 10 \text{ m/s}$, $v_f \sim 30 \text{ m/s}$, $\Delta t \sim 1 \text{ ms}$

$$\Rightarrow \langle F \rangle = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} = \frac{2.7 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 40 \text{ m/s}}{10^{-3} \text{ s}} = \underline{108 \text{ N}}$$

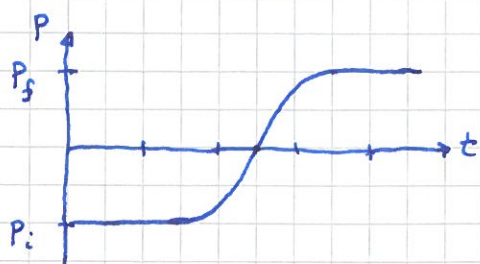
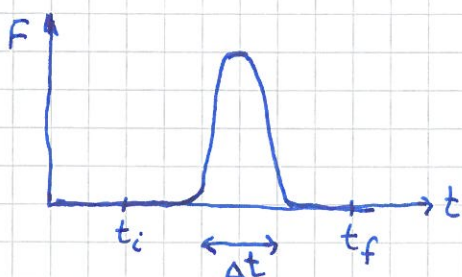
$$\langle F \rangle / mg \approx \frac{\Delta v}{g \Delta t} = \frac{\langle a \rangle}{g} \approx \frac{40 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2}{10 \text{ m/s}^2} = \underline{4000}$$

Dvs: Heft OK å neglisjere ytre kraft mg i støtet

Kraftstøt [YF 8.1; TM 8.3; LL 5.2; HS 3.7.1]

(Eng: impulse) ("kraftimpuls")

= impulsendring i støt



Ballens impulsendring i kollisjonen:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt \quad \approx \text{kraftstøket (fra vegg på ballen)}$$

[Hva blir veggen impulsendring i denne kollisjonen?]

Sentralt støt [YF 8.2-8.4; TM 8.3; LL5.3; HS 3.7.1]

33

Før: $\begin{array}{ccc} \odot \rightarrow v & & V \leftarrow \odot \\ m & & M \end{array} \quad (i)$

(\leftarrow \rightarrow +)

Etter: $\begin{array}{ccc} v' \leftarrow \odot & \odot \rightarrow & V' \\ m & & M \end{array} \quad (f)$

$$\Delta p = 0 \Rightarrow \underbrace{mv + MV}_{P_i} = \underbrace{mv' + MV'}_{P_f} \quad (\text{alle typer støt})$$

(a) Elastisk støt, $\Delta K = 0$:

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2}_{K_i} = \underbrace{\frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2}_{K_f}$$

Omskriving:

$$m(v+u')(v-u') = M(v'+V)(v'-V) \quad (1) \quad (\Delta K=0)$$

$$m(v-u') = M(v'-V) \quad (2) \quad (\Delta p=0)$$

Triks: Ta (1)/(2)

$$\Rightarrow v + u' = V + v'$$

$$\text{dvs } v' - V' = -(v - V) \quad (3) \quad (\text{relativhastigheten skifter fortegn})$$

Finnes v' og V' fra (2) og (3):

$$v' = \frac{M}{m+M} \left\{ 2V + v \cdot \frac{m-M}{M} \right\}$$
$$V' = \frac{m}{M+m} \left\{ 2v + V \cdot \frac{M-m}{m} \right\}$$

(merk ombytte $m \rightarrow M$,
 $v \rightarrow V$ etc. når $v' \rightarrow V'$)

(b) Fullstendig uelastisk støt:

$$v' = V' = \frac{mv + MV}{m+M} \quad (\text{fra } \Delta p = 0)$$

(c) Delvis uelastisk støt: Har kun 1 ligning ($\Delta p = 0$) for 2 ukjente (v', V').
Trenger en ekstra opplysning for å bestemme både v' og V' .

Eks: Elastisk kollisjon med vegg



Sjekk: Er $\Delta p = 0$? Er $\Delta K = 0$?

Løsning:

$$v' = \frac{M}{m+M} \left\{ 0 + v \cdot \frac{m-M}{M} \right\} \approx \frac{M}{M} \cdot v \cdot \left(\frac{-M}{M} \right) = \underline{\underline{-v}} \quad (\text{som ventet})$$

$$V' = \frac{m}{M+m} \{ 2v + 0 \} \approx \frac{m}{M} \cdot 2v \approx \underline{\underline{0}} \quad (-''-)$$

Er $\Delta p = 0$?

$$p' = mv' = -mv, \quad P' = MV' \approx M \cdot \frac{m}{M} \cdot 2v = 2mv$$

$$p = mv, \quad P = MV = 0$$

$$\Rightarrow p' + P' = p + P = mv \quad \text{OK!}$$

Er $\Delta K = 0$?

$$K_m' = \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} m v^2, \quad K_M' = \frac{1}{2} M V'^2 \approx \frac{1}{2} M \cdot \left(\frac{m}{M} \cdot 2v \right)^2 \\ = 2 \cdot \frac{m^2}{M} \cdot v^2 \approx 0$$

$$K_m = \frac{1}{2} m v^2, \quad K_M = \frac{1}{2} M V^2 = 0$$

$$\Rightarrow K_m' + K_M' = K_m + K_M = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{OK!}$$

Rakettprinsipp [YF 8.6; TM 8.5; LL 5.4; HS 3.7.2]

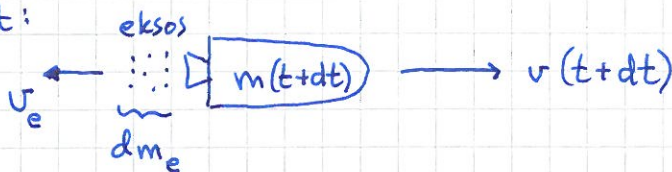
(35)

Ved tid t :



$$p(t) = m(t)v(t)$$

Ved tid $t+dt$:



$$p(t+dt) = \underbrace{m(t+dt)}_{m(t)+dm} \cdot \underbrace{v(t+dt)}_{v(t)+dv} + \underbrace{dm_e}_{-dm} \cdot \underbrace{v_e(t)}_{v(t)+u, \text{ der } u = \text{eksosens hastighet relativt raketten}}$$

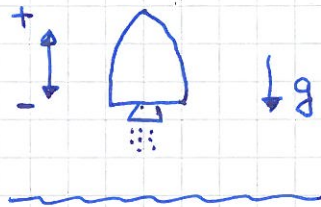
$$= \underbrace{m(t)v(t)}_{= p(t)} + m(t)dv + \underbrace{dm \cdot v(t)}_{= 0} - dm \cdot v(t) - u dm$$

"Outer space": $F_{\text{ytre}} = 0 \stackrel{N2}{\Rightarrow} p(t+dt) = p(t) \Rightarrow m(t)dv = u dm$

$$\Rightarrow m(t) \cdot \frac{dv}{dt} = u \cdot \frac{dm}{dt} = u \dot{m} \quad (u < 0, \dot{m} < 0)$$

$$\Rightarrow \text{Skyrkraft: } F_{\text{skyr}} = u \dot{m} > 0$$

I tyngdefeltet: $F_{\text{ytre}} = -m(t)g$



\Rightarrow Totalkraft på (rest-)raketten:

$$F_{\text{skyr}} + F_{\text{ytre}}$$

$$\stackrel{N2}{\Rightarrow} u \dot{m} - mg = ma$$

Øving 5: Saturn V, tinn 1. [TM Ex. 8.19; litt andre tall]

[HS 3.7.2; - " -]

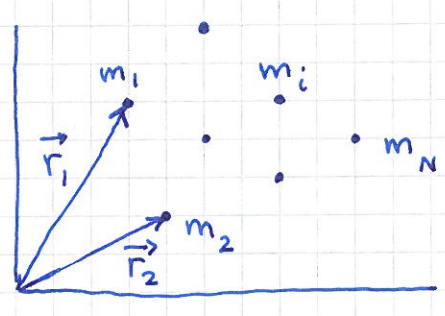
Så langt i kurset: Punktmasser (eller: form og størrelse på legemet uten praktisk betydning)

Nå: Partikkelsystemer; for det meste stive legemer.

Rotasjonsdynamikk blir et aktuelt tema!

Men aller først:

Massesenter, tyngdepunkt [YF 8.5; TMS.5; LL 5.6+5.8; HS 3.5]



System med N partikler, masser m_1, m_2, \dots, m_N i posisjoner $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$

Massesenteret (CM = center of mass):

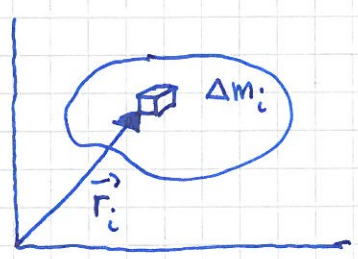
$$\vec{R}_{CM} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

Total masse: $M = \sum_i m_i$

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

(Med konstant g over hele systemet er tyngdepunktet samme sted som massesenteret.)

Med kontinuerlig massefordeling: [YF oppg 8.115 + 8.116; TM 5.5; LL 6.1; HS 3.5]



$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i \Delta m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\int dm \cdot \vec{r}}{\int dm}$$

$M = \int dm = \text{total masse}$

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

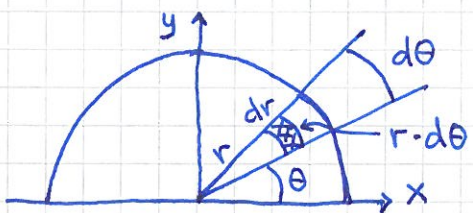
Her går integralet "over legemet" (der massen er!)

Masselementet:

$$dm = \begin{cases} \rho \cdot dV; & \rho = \text{masse pr volumenet}; & dV = \text{volumenelement (3D)} \\ \sigma \cdot dA; & \sigma = \text{---"--- flate ---}; & dA = \text{flate --- (2D)} \\ \lambda \cdot dl; & \lambda = \text{---"--- lengde ---}; & dl = \text{linje --- (1D)} \end{cases}$$

Et hensiktsmessig koordinatsystem velges ut fra legemets form og eventuell symmetri.

Eks: Halvsirkulær tynn skive, radius R, masse σ pr flateenhet



$$dm = \sigma \cdot dA = \sigma \cdot r d\theta \cdot dr$$

$$M = \sigma \cdot \frac{1}{2} \pi R^2$$

$$\vec{r} = \hat{x} x + \hat{y} y = \hat{x} r \cos \theta + \hat{y} r \sin \theta$$

Ser at $X_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{R}_{CM} = Y_{CM} \hat{y}$

$$\text{med } Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y \cdot dm = \frac{2}{\sigma \pi R^2} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} r \sin \theta \cdot \sigma \cdot r d\theta \cdot dr$$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \left(\int_0^R r^2 dr \right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \right) = \frac{4}{3\pi} R \approx 0.42 R$$

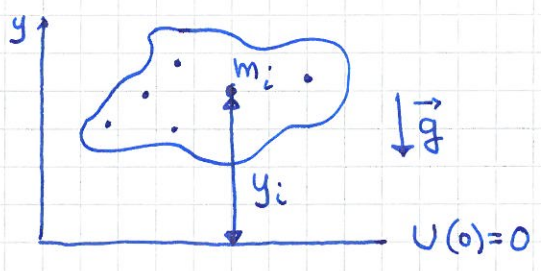
$\int_0^R r^2 dr = \frac{1}{3} R^3$
 $\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \int_0^{\pi} (-\cos \theta) = 1 + 1 = 2$

Oppg, 1D: Vis at $Y_{CM} = \frac{2}{\pi} R$ for halvsirkel



Oppg, 3D: Vis at $Y_{CM} = \frac{3}{8} R$ for halvkule

Potensiell energi for partikkelsystem i tyngdefeltet



$$U = \sum_i U_i = \sum_i m_i g y_i$$

$$\stackrel{\text{anta}}{=} \underset{g=\text{konst.}}{g} \sum_i m_i y_i = \underline{g M Y_{CM}}$$

Dvs: Som om hele massen $M = \sum_i m_i$ var samlet i høyden $Y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i$, og da f.eks. i massesenteret \vec{R}_{CM} .

Tyngdepunktbevegelsen [YF 8.5; TM 5.5; LL 5.8; HS 3.5]

Ser på system med N masser, m_1, m_2, \dots, m_N .

N2 for m_i : $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$ ($i=1,2,\dots,N$)

der $\vec{F}_{i,ytre}$ = ytre kraft på m_i
 \vec{F}_{ji} = ("indre") kraft fra m_j på m_i

$\Rightarrow \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$ = total indre kraft på m_i

Ta \sum_i av ligningen ovenfor: $\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_{i,ytre} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} (M \cdot \vec{R}_{CM}) = M \cdot \ddot{\vec{R}}_{CM}$$

$$\sum_i \vec{F}_{i,ytre} = \vec{F}_{ytre} = \text{netto ytre kraft på systemet}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}_{=0} + \underbrace{\vec{F}_{31} + \vec{F}_{13}}_{=0} + \dots + \underbrace{\vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N}}_{=0} = 0 \quad (\text{pga N3})$$

Dermed: $M \ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}$

Dvs: \vec{R}_{CM} beveger seg som om hele M var samlet i \vec{R}_{CM} og ble utsatt for summen av alle ytre krefter som virker på systemet. I tillegg kommer rotasjonen om CM.
 [Ent vibrasjoner, som ikke er tema her]

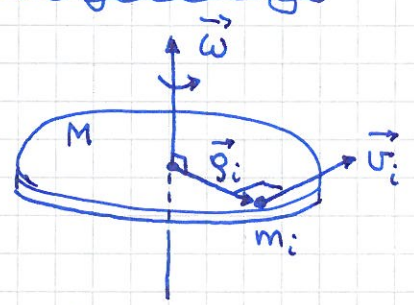
Rotasjon

[YF 9+10; TM 9+10; LL 5.5+5.9+6; HS 4+5]

Først: Rask gjennomgang av ren rotasjon om fast akse.

Derneft: Grundigere og mer generell gjennomgang.

Rotasjonsenergi



$$\begin{aligned}
 K &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\
 &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i r_i^2 \right\} \omega^2
 \end{aligned}$$

s.B: $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$; $v_i = r_i \omega$

Tregghetsmoment

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i r_i^2 = \text{legemets tregghetsmoment (om gitt akse)}$$

Dermed:

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \left[\text{Translasjonsanalogi: } K_{\text{trans}} = \frac{1}{2} M V^2 \right]$$

Hvis kontinuerlig massefordeling:

$$m_i \rightarrow \Delta m_i \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} dm, \text{ og } \sum_i \rightarrow \int_{\text{(over legemet)}}$$

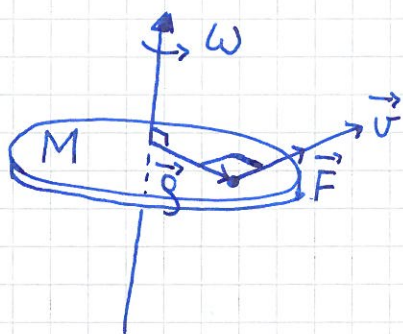
$$\Rightarrow \boxed{I = \int r^2 dm}$$

(der r = avstand fra rotaksen til masseelementet dm)

Dreiemoment

(evt: Kraftmoment; eng: Torque)

(40)



antar her $\vec{F} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{F} \perp \vec{g}$

$\tau \stackrel{\text{def}}{=} F \cdot g = F$'s dreiemoment om rot.aksen

N2 for rotasjon om fast akse

Ser på tilført effekt:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v = F \cdot g \cdot \omega = \tau \cdot \omega$$

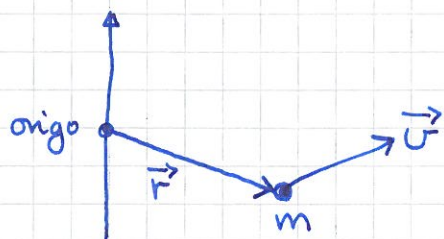
Dessuten:

$$P = \frac{dK_{\text{rot}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I \omega^2 \right) \stackrel{\substack{\text{anta} \\ I = \text{konst.}}}{=} I \omega \frac{d\omega}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = I \dot{\omega}} \quad [\text{Transl. analogi: } F = M \dot{V} \text{ (N2)}]$$

Dreieimpuls

(evt: spinn)



$$\vec{L} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \vec{v}$$

= m 's dreieimpuls (relativt origo)

Dreiemoment som vektor

$$\vec{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{F} = \vec{F}$$
's dreiemoment (relativt origo)

Dreieimpulsbevarelse

(41)

Hva gir endring i \vec{L} ? La oss se på $\dot{\vec{L}}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v}) = m \left\{ \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}}_{=\vec{v} \times \vec{v} = 0} + \underbrace{\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}}_{=\vec{r} \times \vec{F}/m \text{ (N2!)}} \right\} = \vec{\tau}$$

N2 for rotasjon, inkl. bevaring av \vec{L} :

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}; \text{ ders } \vec{L} = \text{konst. hvis } \vec{\tau} = 0$$

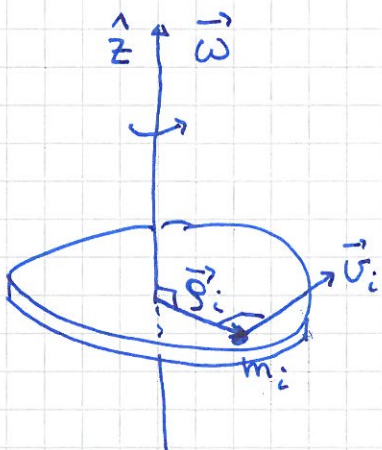
[Transl.analogi: $\vec{F} = d\vec{p}/dt$; ders $\vec{p} = \text{konst. hvis } \vec{F} = 0$]

For isolert system: E , \vec{p} og \vec{L} er bevart.

Hva er \vec{L} for ren rotasjon om fast akse?

Svar: $\vec{L} = I \vec{\omega}$.

Bewis:



$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{r}_i \times \vec{v}_i = \rho_i v_i \hat{z} = \rho_i^2 \omega \hat{z}$$

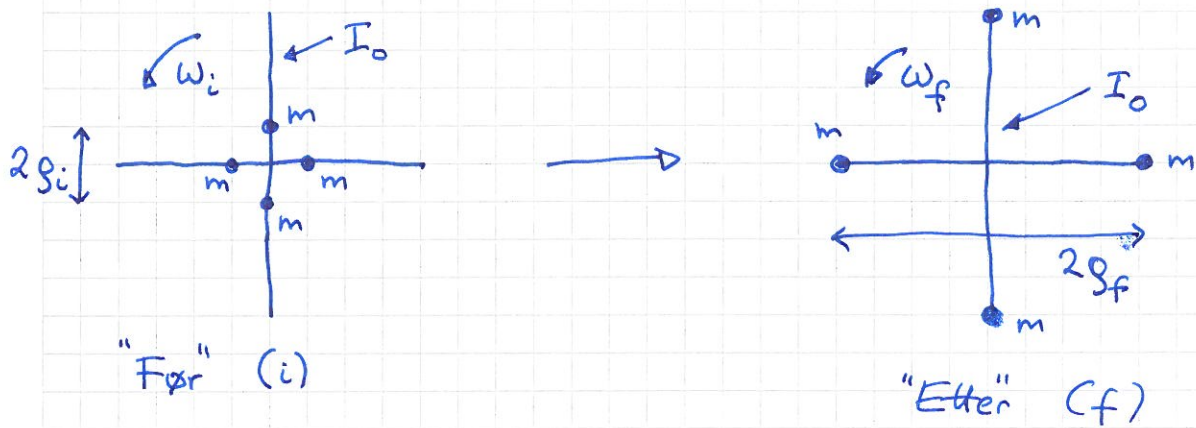
$$\Rightarrow \vec{L} = \underbrace{\left(\sum_i m_i \rho_i^2 \right)}_{=I} \cdot \underbrace{\omega \hat{z}}_{=\vec{\omega}}$$

$$= I \vec{\omega} \quad \text{qed}$$

[Translasjonsanalogi: $\vec{p} = M \vec{V}$]

Relevans for LAB-oppg. om rotasjon:

(42)



$$I_i = I_0 + 4mg_i^2$$

$$I_f = I_0 + 4mg_f^2 > I_i$$

Inlet ytre dreiemoment fra (i) til (f)

$$\Rightarrow L_i = L_f \quad (\text{dreieimpulsbevarelse!})$$

$$\Rightarrow I_i \omega_i = I_f \omega_f \quad \Rightarrow \omega_f = \omega_i \cdot \frac{I_i}{I_f} < \omega_i$$

Hva med energibevarelse?

$$K_i = \frac{1}{2} I_i \omega_i^2$$

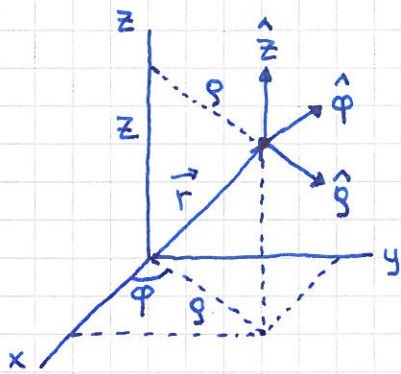
$$\begin{aligned} K_f &= \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 = \frac{1}{2} I_f \cdot \left(\omega_i \frac{I_i}{I_f} \right)^2 = \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 \cdot \frac{I_i}{I_f} \\ &= K_i \cdot \frac{I_i}{I_f} < K_i \end{aligned}$$

Hmm...!? Hvor ble det av $|\Delta K| = |K_f - K_i|$?

Sirkelbevegelse [YF 9.1-9.3; TM 9.1; LL 1.8; HS 2.1.2] (43)

(Delvis repetisjon, se s. 6-8.)

Anta rotasjon om z-aksen \Rightarrow velger sylinderkoordin. (ρ, φ, z)

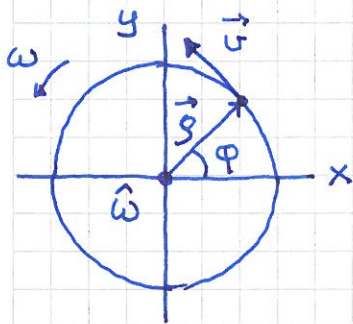


$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \hat{\varphi} = \omega \hat{\varphi}$$

$$\vec{\omega} = \omega \hat{z} = \omega \hat{\omega}, \quad \vec{\rho} = \rho \hat{\rho}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

$T = 2\pi/\omega =$ periode, $f = 1/T =$ frekvens

$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} =$ vinkelakselerasjon

$v = \omega\rho =$ banehastighet

$a_{\parallel} = \dot{v} = \dot{\omega}\rho = \alpha\rho =$ baneaks. ($\vec{a}_{\parallel} = \alpha\rho\hat{\varphi}$)

$a_{\perp} = v^2/\rho = \omega v = \omega^2\rho =$ sentripetalaks. ($\vec{a}_{\perp} = -\omega^2\rho\hat{\rho}$)

$$\begin{aligned} \text{[Total aks.: } \vec{a} = \dot{\vec{v}} &= \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}} \\ &= \dot{\omega}\rho\hat{\varphi} - \omega v\hat{\rho} = a_{\parallel}\hat{\varphi} - a_{\perp}\hat{\rho} \end{aligned}$$

Med stivt legeme:

- felles ω og α for hele legemet
- v og a øker med ρ ($\rho =$ avstand fra rot.aksen)

Trehetsmoment [YF 9.4; TM 9.3; LL 6.2, 6.3; HS 4.2] (44)


For ren rotasjon om fast akse:

$$K = K_{\text{rot}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

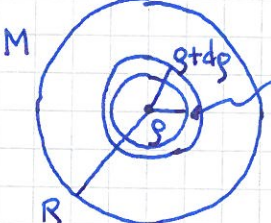
der $I = \sum_i m_i r_i^2$ (evt. $I = \int r^2 dm$) er legemets trehetsmoment mhp ^{rot.}aksen.

Notasjon: $I = I_0$ hvis akse gjennom legemets CM.

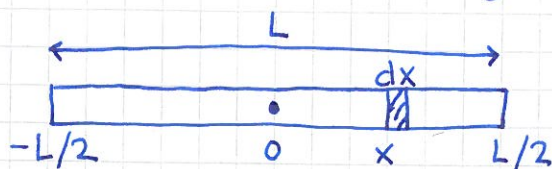
Eks 1: Ring (og "sylinderskall")


$$I_0 = \int_{\text{ring}} r^2 dm = R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$$

Eks 2: Sirkulær skive (og kompakt sylinter)


$$dm = M \cdot \frac{dA}{A} = M \cdot \frac{2\pi r \cdot dg}{\pi R^2} = \frac{2M}{R^2} r dg$$
$$I_0 = \int_0^R r^2 \frac{2M}{R^2} r dg = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \frac{1}{4} r^4 dg = \underline{\underline{\frac{1}{2} MR^2}}$$

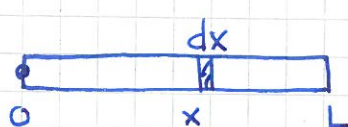
Eks 3: Tynn stang



$$dm = M \cdot \frac{dx}{L}, \quad r = x$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot M \cdot \frac{dx}{L} = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{3} x^3 = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}}$$

Eks 4: Om stangens ende



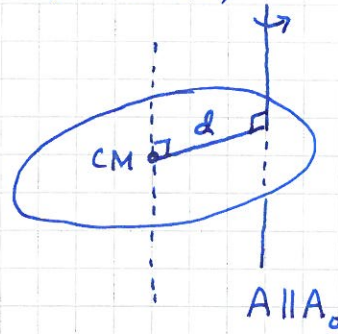
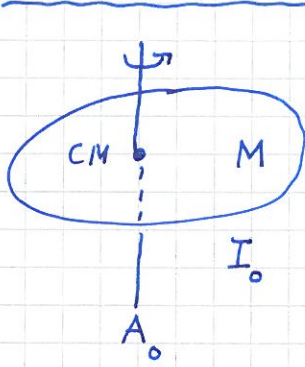
$$I = \int_0^L x^2 \cdot M \cdot \frac{dx}{L} = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}$$

Øving 6: Kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$ Kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

Steiners sats

[YF 9.5; TM 9.3; LL 6.3; HS 4.3]

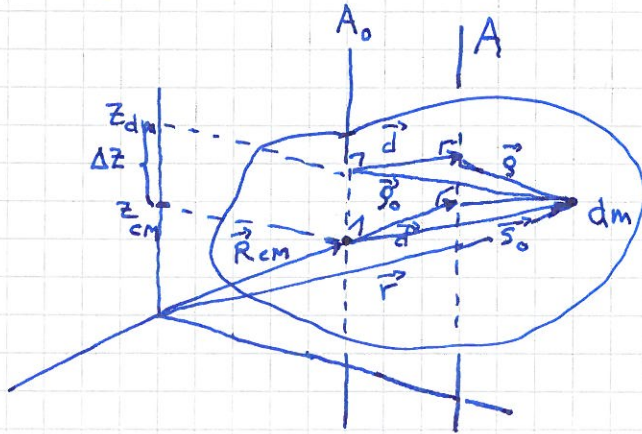
(45)



$$I = I_0 + Md^2$$

Bevis:

[Bedre figur på s. 45B]



$$\vec{s}_0 = \vec{d} + \vec{s}$$

$$I_0 = \int s_0^2 dm$$

$$s^2 = s_0^2 + d^2 - 2\vec{d} \cdot \vec{s}_0$$

$$\Rightarrow I = \int s^2 dm = \underbrace{\int s_0^2 dm}_{= I_0} + d^2 \underbrace{\int dm}_{= M} - 2\vec{d} \cdot \int \vec{s}_0 dm$$

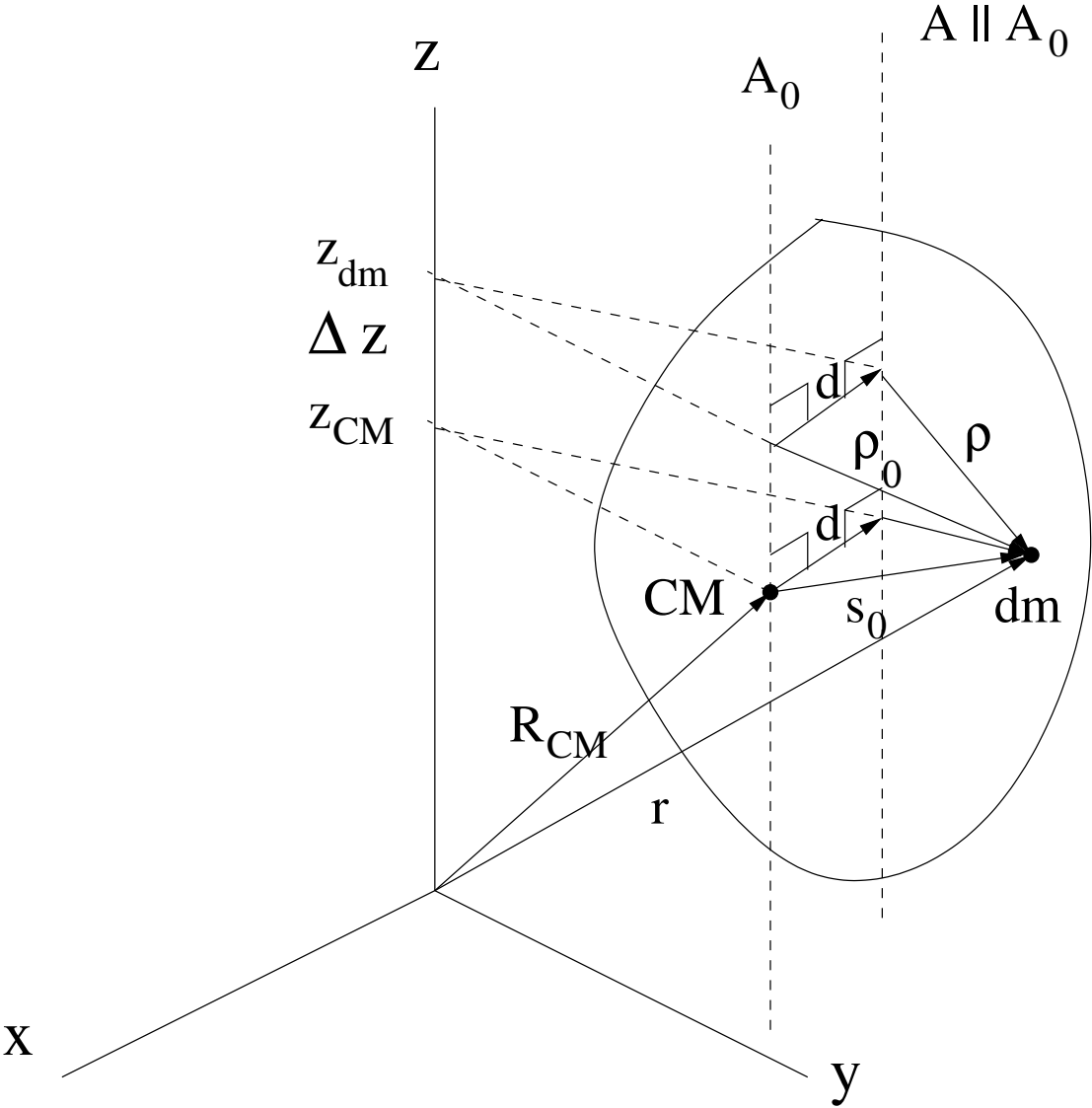
$$\vec{r} = \vec{R}_{CM} + \vec{s}_0 = \vec{R}_{CM} + \Delta z \cdot \hat{z} + \vec{s}_0$$

$$\Rightarrow \vec{d} \cdot \vec{s}_0 = \vec{d} \cdot (\vec{r} - \vec{R}_{CM}) - \Delta z \underbrace{\vec{d} \cdot \hat{z}}_{= 0}$$

$$\Rightarrow \vec{d} \cdot \int \vec{s}_0 dm = \vec{d} \cdot \underbrace{\int \vec{r} dm}_{= M\vec{R}_{CM}} - \vec{d} \cdot \underbrace{\vec{R}_{CM} \int dm}_{= M} = 0$$

$$\Rightarrow I = I_0 + Md^2 \quad \text{qed}$$

[Terminologi: Steiners sats = Parallellaksetheorem]



$$\rho_0 = d + \rho$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_{CM} + \mathbf{s}_0$$

$$= \mathbf{R}_{CM} + \Delta z \hat{\mathbf{z}} + \rho_0$$

Kinetisk energi for sturt legeme

[YF 10.3; TM 9.3; LL 6.6; HS 4.1]

Generell beregelse for sturt legeme:

Translasjon av CM + Rotasjon om akse A_0 gjennom CM.

Skal vise at:
$$K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

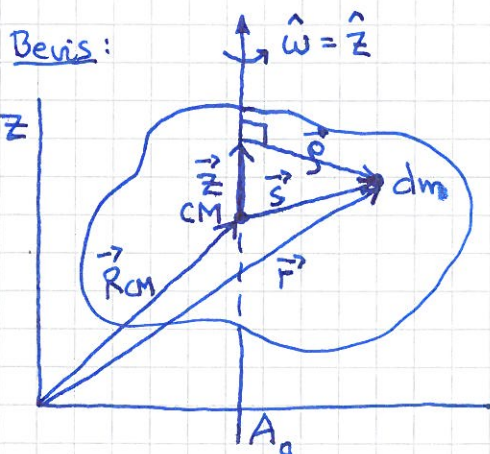
der

M = legemets masse

$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{\text{CM}}$ = hastigheten til CM

I_0 = legemets treghetsmoment om aksene A_0

$\vec{\omega}$ = vinkelhastigheten for rotasjonen om A_0



$$\vec{r} = \vec{R}_{\text{CM}} + \vec{s} = \vec{R}_{\text{CM}} + \vec{z} + \vec{g}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = dm\text{'s hastighet}$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{\text{CM}} = \text{CM's } \text{---} \text{---}$$

$$\vec{u} = \dot{\vec{s}} = \dot{\vec{g}} = dm\text{'s hastighet}$$

relativt CM $\Rightarrow \vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$

$$dK = \frac{1}{2} dm \cdot v^2 = dm\text{'s kinetiske energi}$$

$$\Rightarrow K = \int dK = \int \frac{1}{2} dm \cdot v^2 = \text{legemets kinetiske energi}$$

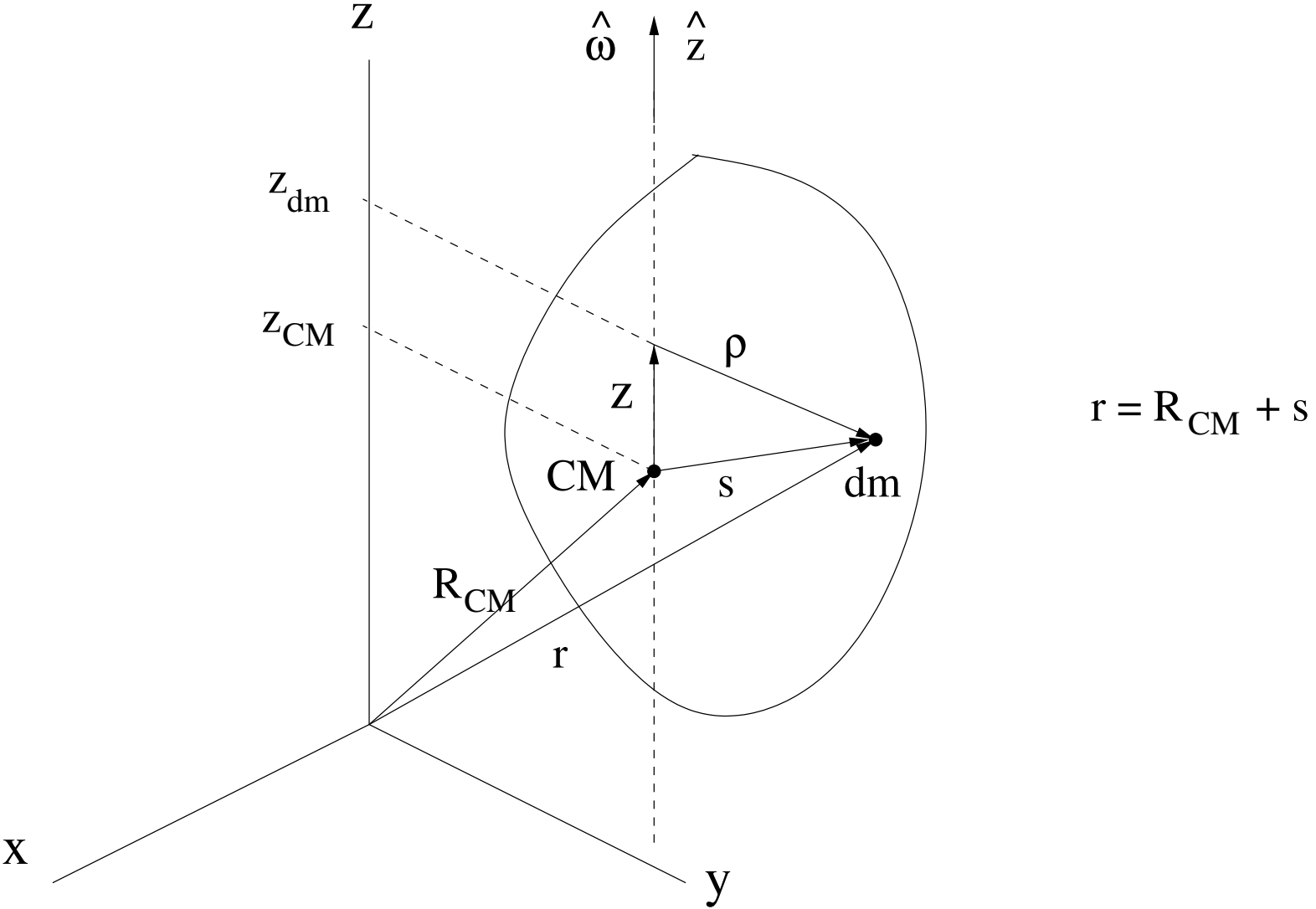
$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = (\vec{V} + \vec{u}) \cdot (\vec{V} + \vec{u}) = V^2 + u^2 + 2\vec{V} \cdot \vec{u}$$

$$\frac{1}{2} \int dm V^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} M V^2}}$$

$$\frac{1}{2} \int dm u^2 = \frac{1}{2} \int dm (g\omega)^2 = \frac{1}{2} (\int dm g^2) \omega^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} I_0 \omega^2}}$$

$$\int dm \vec{V} \cdot \vec{u} = \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \int dm \vec{g} = \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \int dm (\vec{r} - \vec{R}_{\text{CM}})$$

$$= \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \left\{ \underbrace{\int \vec{r} dm}_{= M \cdot \vec{R}_{\text{CM}}} - \vec{R}_{\text{CM}} \underbrace{\int dm}_{= M} \right\} = \underline{\underline{0}} \quad \text{qed!}$$



Rotasjonsdynamikk

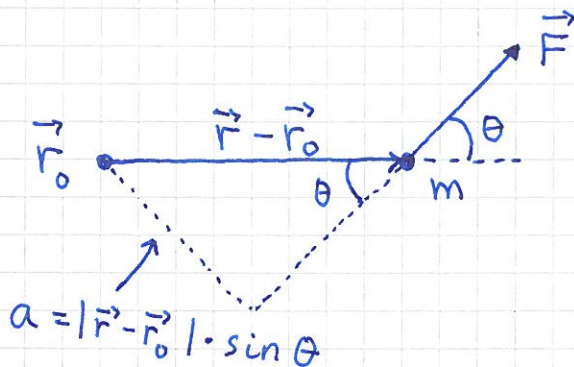
[YF 10; TM 10; LL 6 og 5; HS 5]

(47)

(nesten helt) generell beskrivelse

Dreiemoment

[YF 10.1; TM 10.2; LL 5.5, 6.4; HS 5.1]



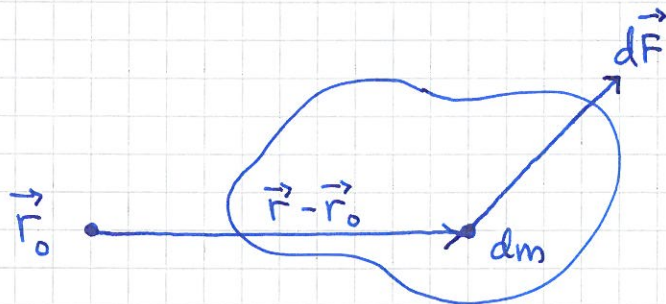
$$\vec{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$$

= \vec{F} 's dreiemoment på m i posisjon \vec{r} , relativt (det fritt valgte) referansepunktet \vec{r}_0 .

Retning: $\vec{\tau} \perp \vec{F}$ og $\vec{\tau} \perp \vec{r} - \vec{r}_0$
(h.h. regel $\Rightarrow \vec{\tau}$ ut av planet i fig. over)

Absoluttverdi: $|\vec{\tau}| = |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\theta = a \cdot F$
der $a =$ "armen til \vec{F} "

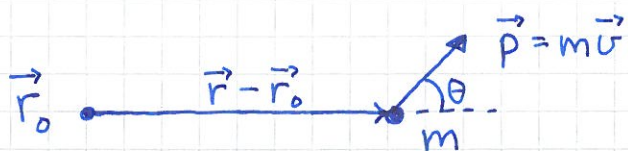
For partikkelsystem (f.eks. stivt legeme):



$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int_{\text{legemet}} (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{F}$$

Dreieimpuls

[YF 10.5; TM 10.2; LL 6.6; HS 5.3] (48)



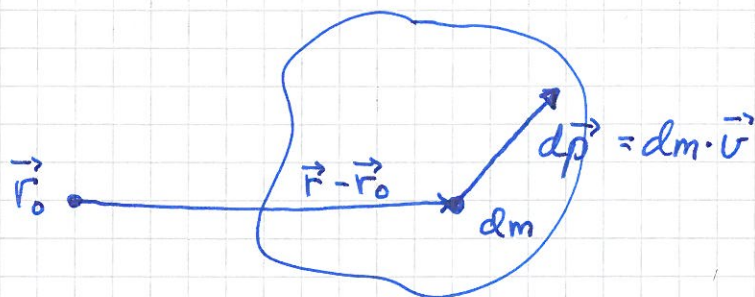
$$\vec{L} \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p} = m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{u}$$

= m 's dreieimpuls relativt \vec{r}_0

Retning: $\vec{L} \perp \vec{p}$ og $\vec{L} \perp \vec{r} - \vec{r}_0$

Abs.verdi: $|\vec{L}| = |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin \theta = a \cdot p$ (se s. 47)

For partikkelsystem:



$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int_{\text{legemet}} dm (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{u}$$

N2, rotasjon [YF 10.5; TM 10.3; LL 6.6; HS 5.2] (49)
(="spinnsetsen")

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} \{ m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} \} = m(\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_0) \times \vec{v} + m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \dot{\vec{v}}$$

Anta $\dot{\vec{r}}_0 = 0$ (fast \vec{r}_0) eller $\dot{\vec{r}}_0 \parallel \vec{v}$

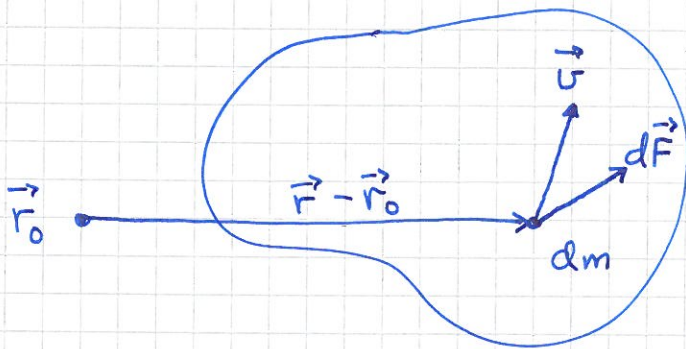
$$\text{slik at } \dot{\vec{r}}_0 \times \vec{v} = 0$$

Har (som s. 41): $\dot{\vec{r}} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{v} = 0$

$$m \dot{\vec{v}} = m \vec{a} = \vec{F}$$

Dermed: $\dot{\vec{L}} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$, ders $\boxed{\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}}$

For partikkelsystem:



$$\dot{\vec{L}} = \int d\dot{\vec{L}} = \int \frac{d}{dt} \{ dm(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} \}$$

= som ovenfor, med $\dot{\vec{r}}_0 \times \vec{v} = 0$ fortsatt....

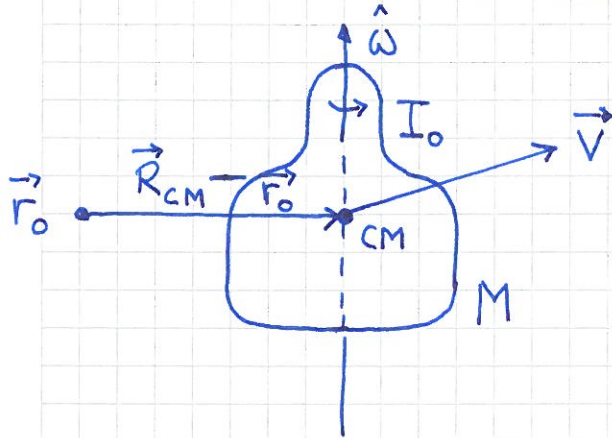
$$= \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{F} = \int d\vec{\tau} = \vec{\tau}$$

med $\vec{\tau} =$ totalt dreiemoment på systemet (relativt \vec{r}_0)

$\dot{\vec{L}} =$ total dreieimpuls for — " — (— " —)

Dreieimpuls for stvrt legeme [YF 10.5; TM 10.2; LL 6.6; HS 5.3] (50)

Anta at legemet har sylindersymmetri om (den instantane) rotasjonsaksen, "utpekt" med $\hat{\omega}$.



Fra s. 46: $K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$

Spm: Kan \vec{L} på samme måte skrives som en sum av to ledd, ett assosiert med massesenterets translasjonsbevegelse, og ett assosiert med legemets rotasjonsbevegelse om en akse gjennom CM?

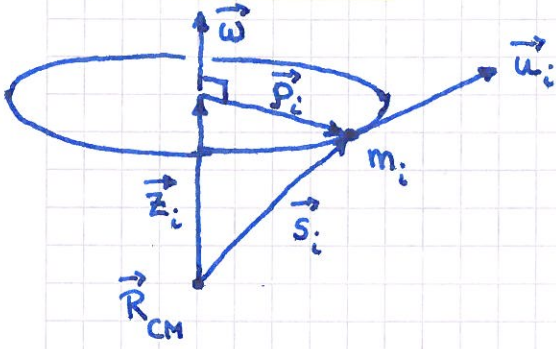
Svar: Ja! Med antagelsen om sylindersymmetri om $\hat{\omega}$ kan det vises at legemets totale dreieimpuls kan skrives slik:

$$\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}$$

Banedreieimpuls, relativt \vec{r}_0 : $\vec{L}_b = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V}$

Indre dreieimpuls ("spinn"; uavh. av \vec{r}_0): $\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega}$

[For bevis, som starter fra definisjonen $\vec{L} = \int dm (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}$, se s. 50 A og 50 B. Litt "kronglete", men ikke særlig vanskeligere enn bevisene s. 45 og 46.]



$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{s}_i \quad \leftarrow \text{relativkoordin.}$$

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{u}_i \quad \leftarrow \text{relativhastighet}$$

$$(\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}}_{CM} + \dot{\vec{s}}_i)$$

Fra figur: $\vec{s}_i = \vec{z}_i + \vec{\rho}_i$

Fra for: $\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i = \vec{\omega} \times \vec{s}_i$ (siden $\vec{\omega} \times \vec{z}_i = 0$)

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{v}_i \\ &= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0 + \vec{s}_i) \times (\vec{V} + \vec{u}_i) \\ &= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{V} \\ &\quad + \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{u}_i + \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i \end{aligned}$$

1. sum:

$$\sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} = M (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} = \vec{L}_{CM}$$

= banedreieimpulsen relativt \vec{r}_0 pga CM's bevægelse (jfr. \vec{L} for punktmasse)

2. sum:

$$\sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{V} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \times \vec{V} = (M\vec{R}_{CM} - M\vec{R}_{CM}) \times \vec{V} = 0$$

3. sum:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{u}_i &= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i) \\ &= (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times (\vec{\omega} \times \underbrace{\sum_i m_i \vec{s}_i}_{=0}) = 0 \end{aligned}$$

4. sum:

$$\sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i = \vec{L}_{rel.} = \text{dreieimpuls pga masselementenes bevægelse relativt CM}$$

Dermed:

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{rel} = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i$$

som gjelder for vilkårlig partikkelsystem (ikke nødvis stivt legeme);
alternativt $\int_M dm (\vec{s} \times \vec{u})$ for \vec{L}_{rel} hvis kontinuerlig massefordeling.

Hvis stivt legeme: $\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{s}_i$

$$\Rightarrow \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i = \sum_i m_i \vec{s}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i)$$

Identitet: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

(kjedelig, men ikke vanskelig å bevisе!)

Dermed:

$$\sum_i m_i \vec{s}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i) = \sum_i m_i \{ \vec{\omega} s_i^2 - \vec{s}_i (\vec{s}_i \cdot \vec{\omega}) \}$$

$$= \sum_i m_i \{ \vec{\omega} (z_i^2 + \rho_i^2) - (\vec{z}_i + \vec{\rho}_i) z_i \omega \}$$

$$= \sum_i m_i \{ \vec{\omega} (z_i^2 + \rho_i^2) - z_i^2 \vec{\omega} - z_i \omega \vec{\rho}_i \}$$

$$= \sum_i m_i \rho_i^2 \vec{\omega} - \omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i$$

$$= I_0 \vec{\omega} - \omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i$$

Hvis syndrersymmetri om $\hat{\omega}$, dvs om \hat{z} :

$$\sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i = \sum_i m_i z_i (x_i \hat{x} + y_i \hat{y}) = 0$$

fordi bidragene fra like store masselementer i (x_i, y_i, z_i)
og $(-x_i, -y_i, z_i)$ kansellerer.

Dette er ofte tilfelle, men ikke alltid.

Men hvis syndrersymmetri om $\hat{\omega}$: $\vec{L}_{rel} = I_0 \vec{\omega}$

$$\Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{rel} = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega} \quad \underline{\text{qed}}$$

Bevaringslover

For isolert system (dvs: system som ikke påvirkes av ytre krefter) er energi, impuls og dreieimpuls bevarte størrelser.

$$W = 0 \quad (\text{dvs } P = \frac{dW}{dt} = 0) \Rightarrow E = \text{konst.}$$

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konst.}$$

$$\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{konst.}$$

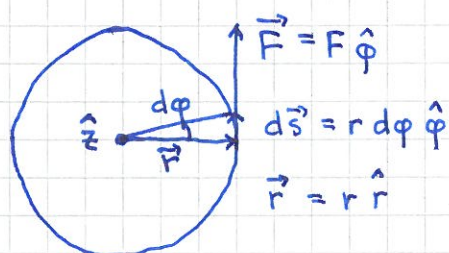
Mekanisk likevekt (Statikk) [YF 11.1-11.3; TM 12.1-12.3; LL 7.1; HS 4.6]

Et stivt legeme er i ro,

$$\vec{p} = 0 \quad \text{og} \quad \vec{L} = 0$$

$$\text{bare dersom} \quad \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \text{og} \quad \sum_i \vec{\tau}_i = 0$$

Arbeid utført ved rotasjon [YF 10.4; TM 9.5; LL 6.4; HS 4.4.1]

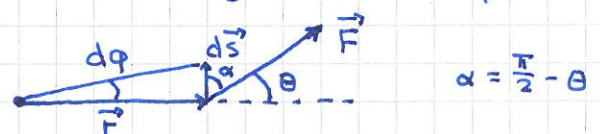


$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot r d\phi$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = r \cdot F \hat{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{dW = \tau d\phi} \Rightarrow P = \frac{dW}{dt} = \tau \cdot \omega$$

Enn om \vec{F} og $d\vec{s}$ ikke er parallelle?



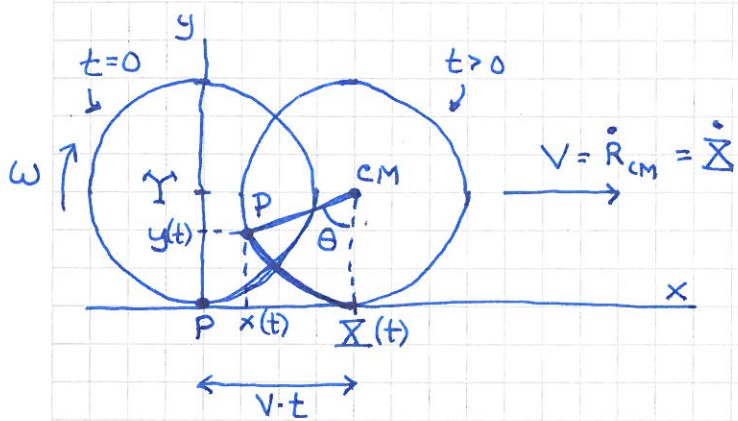
$$dW = F \cdot ds \cdot \cos \alpha = F \cdot r d\phi \cdot \sin \theta$$

$$\tau = |\vec{\tau}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = r \cdot F \cdot \sin \theta$$

$$\Rightarrow \boxed{dW = \tau d\phi}$$

Rulling [YF 10.3 ; TM 9.6 ; LL 6.7 ; HS 4.5.3 og 5.4.3]

Ren rulling:



Sammenhenger:

$\theta = \omega t$ (hvis $\omega = \text{konst.}$)

$\dot{X} = Vt = R\theta (= R\omega t)$

$V = \dot{X} = R\omega$ (hvis $\omega = \text{konst.}$)

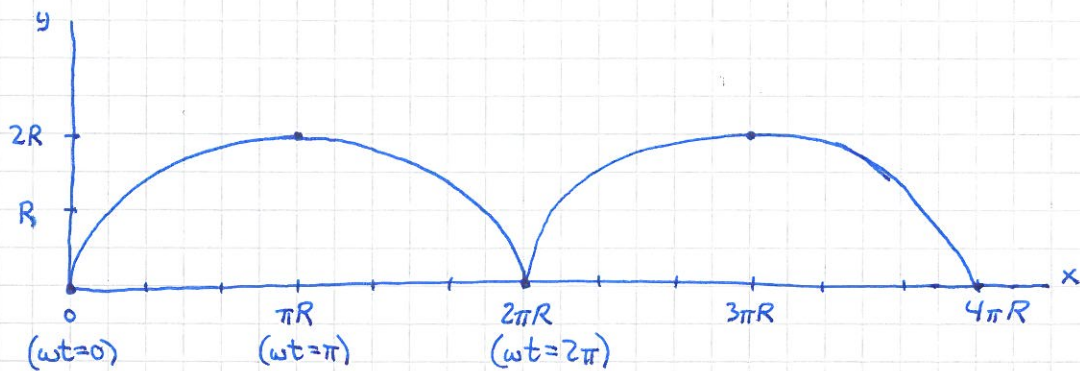
$A = \ddot{X} = R\ddot{\theta} = R\dot{\omega} = R\alpha$

rullebetingelser

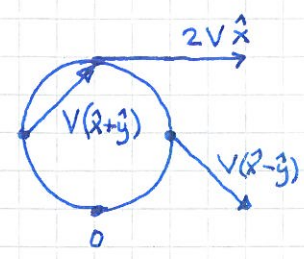
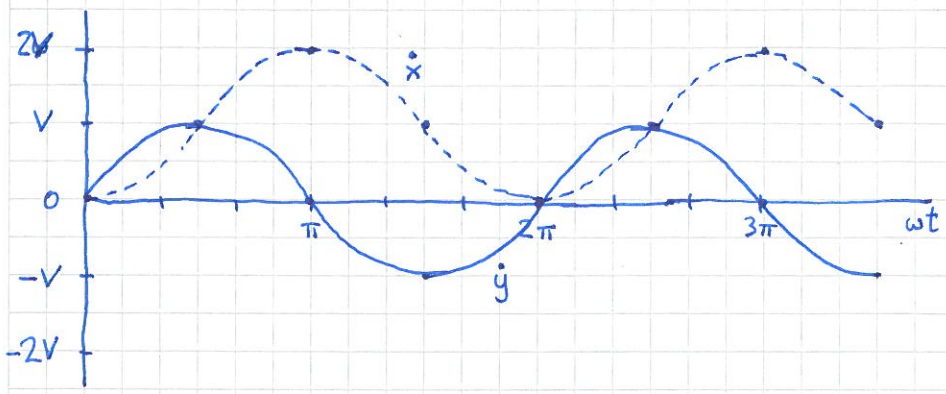
Ser fra fig. at banen til P (= punkt på periferien) blir en sykloide:

$x(t) = \dot{X}(t) - R \sin \theta = Vt - R \sin \omega t$; $y(t) = R - R \cos \theta = R - R \cos \omega t$

[der vi nå antar $\omega = \text{konst.}$]



P's hastighet: $\dot{x} = V - \omega R \cos \omega t = V(1 - \cos \omega t)$
 $\dot{y} = \omega R \sin \omega t = V \sin \omega t$ } $\Rightarrow \vec{v}(\theta) = \hat{x} V(1 - \cos \theta) + \hat{y} V \sin \theta$



\Rightarrow Ingen relativ bevegelse i kontaktpunktet ved ren rulling.

Kin. energi ved ren rulling:

$$K = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \quad (s. 46)$$

$$I_0 = c \cdot MR^2 \quad (\text{med } c=1 \text{ for ring, } \frac{2}{5} \text{ for massiv kule osv})$$

$$\omega = V/R \quad (\text{rullebetingelse})$$

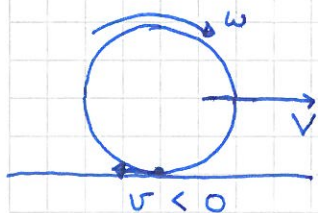
$$\Rightarrow K = (1+c) \cdot \frac{1}{2} MV^2$$

Sluring

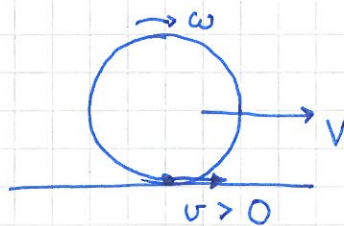
$\omega \neq V/R \Rightarrow$ kontaktpunktet får hastighet $v = V - \omega R \neq 0$
relativt underlaget

\Rightarrow legemet roterer og glir samtidig

Hvis $\omega > V/R$:



Hvis $\omega < V/R$:

Friksjonens rolle

Hvis sluring: Friksjonskraft $f = \mu_k N$ rettet mot \vec{v} .

$$\text{Effekttap: } P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$$

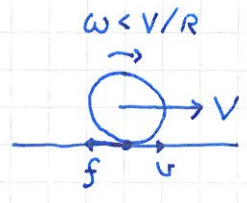
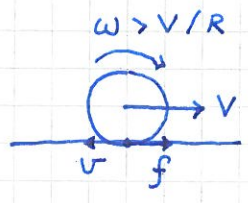
(\Rightarrow redusert mekanisk energi)

$$\text{Hvis ren rulling: } P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$$

Null effekttap

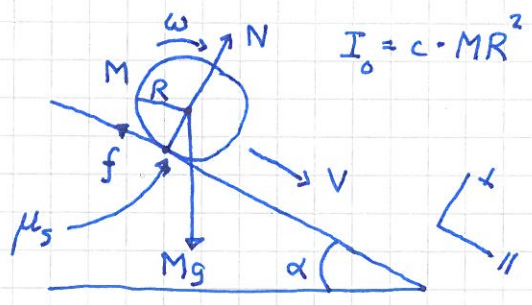
$$\text{Statisk friksjon: } f \leq \mu_s \cdot N$$

Sluring:



Ren rulling: Retningen på den statiske friksjonskraften bestemmes ved å besvare spørsmålet "Hva ville kontaktpunktets relativhastighet \vec{v} ha vært hvis det ikke var friksjon?"

Eks: Rulling på skrånplan



- $\dot{V} = ?$
 - $\mu_s^{min} = ?$
- } for ren rulling

- ren rulling $\Rightarrow \omega = v/R$, med klokka
- V og ω øker \Rightarrow dreiemoment τ om CM i fråd med dette \Rightarrow friksjonskraft f oppover

N2: $\sum F_{||} = M\dot{V}$, $\sum \tau = I_o \dot{\omega}$, $\sum F_{\perp} = 0$

\downarrow $Mg \sin \alpha - f = M\dot{V}$ \downarrow $f \cdot R = I_o \dot{\omega}$ \downarrow $N = Mg \cos \alpha$

\downarrow $f = (cMR^2 \cdot \frac{\dot{V}}{R}) / R = cM\dot{V}$

\downarrow $Mg \sin \alpha - cM\dot{V} = M\dot{V}$

\downarrow $\dot{V} = g \frac{\sin \alpha}{1+c}$

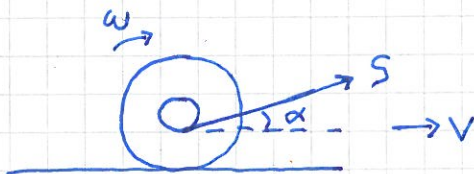
$$f \leq f_{\max} = \mu_s \cdot N$$

$$\Rightarrow c M g \frac{\sin \alpha}{1+c} \leq \mu_s M g \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mu_s^{\min} = \frac{c}{1+c} \tan \alpha}} \quad (\text{for } \dot{a} \text{ ha ren rulling})$$

	c	\dot{v}	μ_s^{\min}
Ring og hul sylinder	1	$\frac{1}{2} g \sin \alpha$	$\frac{1}{2} \tan \alpha$
Skive og kompakt sylinder	1/2	$\frac{2}{3} g \sin \alpha$	$\frac{1}{3} \tan \alpha$
Kompakt ball	2/5	$\frac{5}{7} g \sin \alpha$	$\frac{2}{7} \tan \alpha$

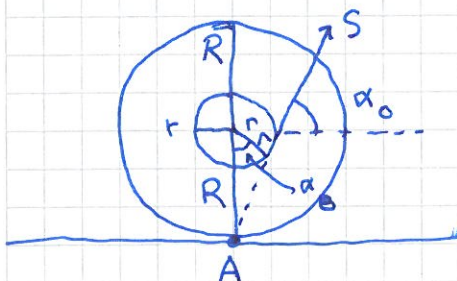
Eks: Snelle



liten $\alpha \Rightarrow$ ruller mot høyre



stor $\alpha \Rightarrow$ mot venstre



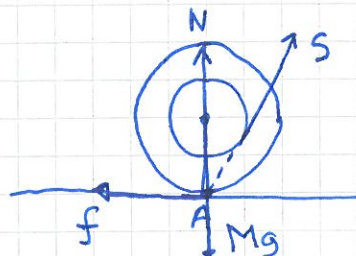
snelle i ro

når $\alpha = \alpha_0$ gitt ved

$$\underline{\underline{\cos \alpha_0 = r/R}} \quad (\text{ses fra figur!})$$

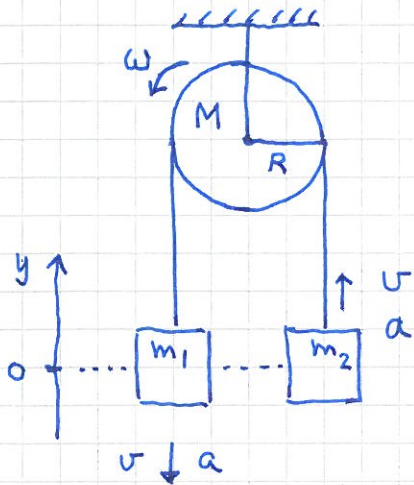
Da går alle krefter gjennom kontaktpunktet A (f, N, mg og S)

$$\Rightarrow \sum \tau_A = 0$$



Løses på øving med N2 trans. + rot. (evt kun N2 rot.)

Løses her med energibevarelse



- $m_1 > m_2$
- snora glir ikke på skiva $\Rightarrow \omega R = v$
- $I_0 = \frac{1}{2}MR^2 =$ skivas tregh.mom.
- Anta $U(y=0) = 0$; lodd i ro ved start
- Bestem loddenes akselerasjon a

Løsning:

Total energi, $E = U_i + K_i = 0$ ("initial")

E er bevart

$\Rightarrow U_f + K_f = 0$ ("final")

$$\Rightarrow m_2 gy - m_1 gy + \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = 0$$

(der $y > 0$ er posisjon til m_2)

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} MR^2 \cdot \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{4} Mv^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v^2 = y \cdot \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + M/2}$$

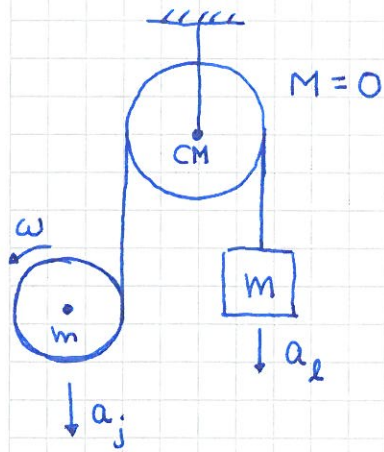
Tar $\frac{d}{dt}$ på begge sider:

$$\frac{1}{2} \cdot 2v \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + M/2}$$

$\underbrace{\quad}_{=a} \quad \underbrace{\quad}_{=v}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a = g \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}}}$$

Eks: Atwood med ideell tråse og lodd + jojo, $m_1 = m_2 = m$.



Er $a_j = a_e$?

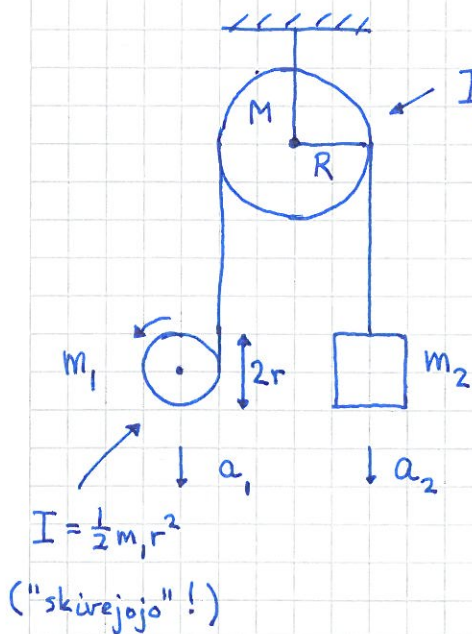
Ja:

Må ha likt snordrag på begge sider. Ellers ville trinsa ha vært utsatt for et netto dreiemoment mhp CM. Men med $M=0$ ville trinsa da ha fått uendelig vinkelakselerasjon, umulig!

Med likt snordrag og like tyngde på begge sider blir akselerasjonen den samme:

$$m \cdot a_j = mg - S ; \quad m \cdot a_e = mg - S \quad \Rightarrow \quad a_j = a_e = g - S/m$$

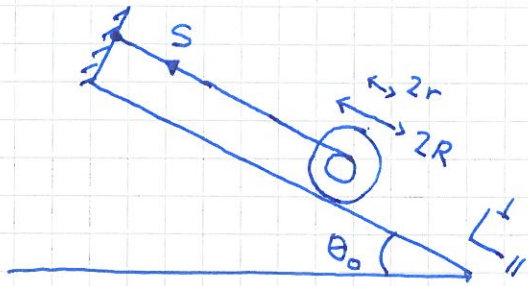
Utfordring: Atwood med lodd + jojo (generelt)



Bestem a_1 og a_2 !

("skurejojo" !)

Eks: Sluresnelle (demo + øving)



$\theta_0 = \text{max vinkel for snella glir (slurer) nedover skråplanet}$

Bestem θ_0 . Hvis er snordraget S da?

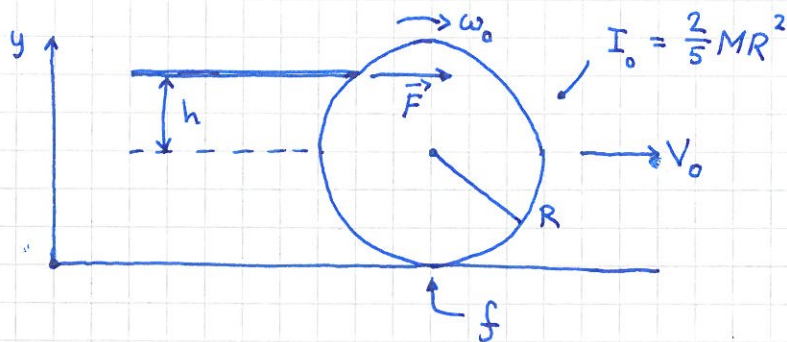
Tips: Bruk $\sum F_{\parallel} = 0$ samt $\sum \tau = 0$ (med snellas CM som ref.punkt)

Ved $\theta = \theta_0$ er $f = f_{\text{max}} = \mu_s \cdot N$

Ekstraoppg: Bestem snellas akselerasjon når $\theta > \theta_0$.

Tips: $\sum F_{\parallel} = M \cdot a$, $\sum \tau = I \dot{\omega}$, $v = \omega r$ (siden det vikles av snorlengde $2\pi r$ på tiden $T = 2\pi/\omega$, dvs $v = 2\pi r/T = \omega r$)

Eks: Snooker (øving)



Kortvarig stat, $\Delta t \approx 0$:

$$F \cdot \Delta t = \Delta p = M V_0$$

$$\tau \cdot \Delta t = \Delta L = I_0 \omega_0$$

$$\tau = F \cdot h$$

$$F \gg f$$

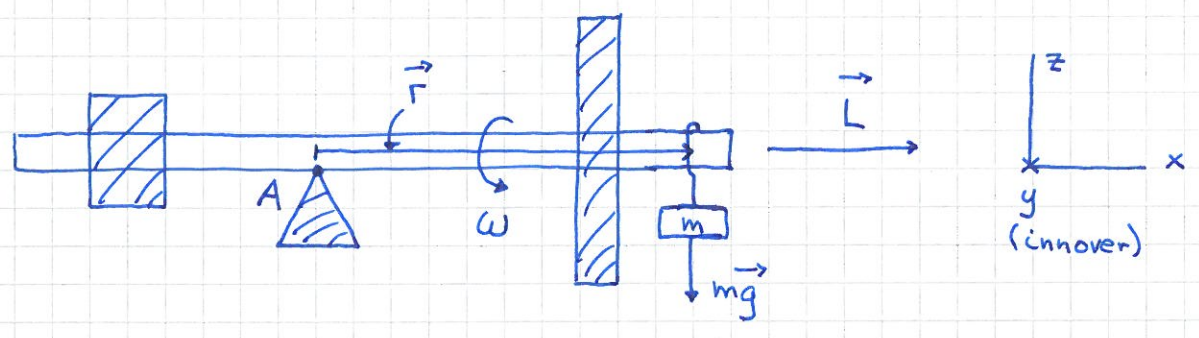
Hvis $h > h_0$: (sluring)

Hvis $h = h_0$: (ren rulling) ($h_0 = ?$)

Hvis $h < h_0$: (sluring)

Presesjon

Gyroskop (kvalitativt):



Uten lodd: Dynamisk likevekt med roterende skive
 $\vec{\omega} = \omega \hat{x}$, $\vec{L}_A = L_A \hat{x}$, $L_A = I_{skive} \cdot \omega$

Med lodd: Dreiemoment relativt A:

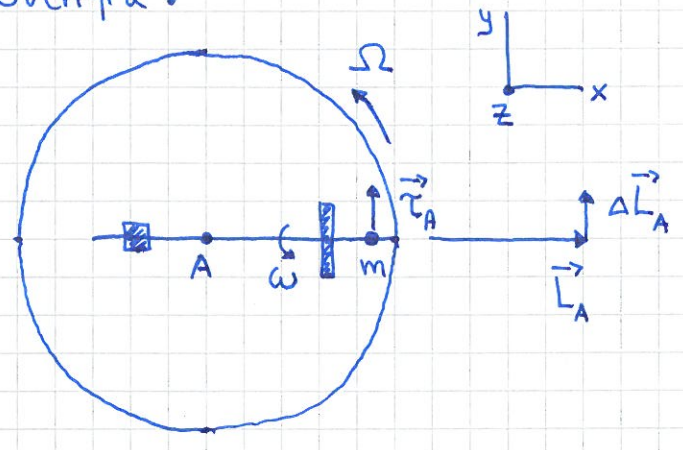
$$\vec{\tau}_A = \vec{r} \times m\vec{g} = r mg \hat{y}$$

$$N_{2,rot}: \vec{\tau}_A = \Delta \vec{L}_A / \Delta t$$

$\Rightarrow \Delta \vec{L}_A$ peker i retning \hat{y}

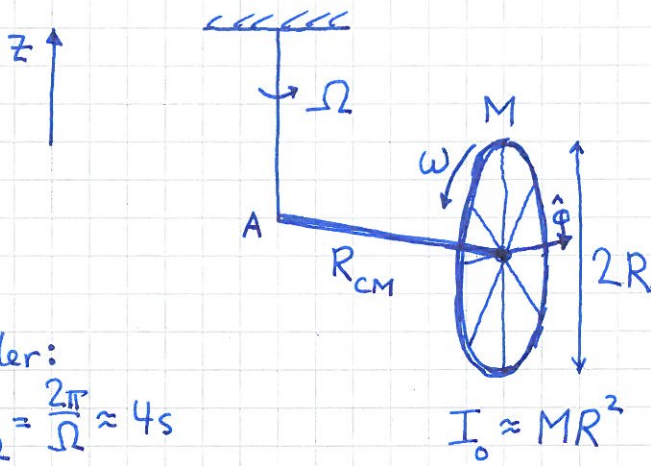
\Rightarrow rotasjon mot klokka om z-aksen,
presesjon, med vinkelhastighet $\Omega \ll \omega$

Ovenfra:



- større $m\vec{g} \Rightarrow$ raskere presesjon (større Ω)
- større \vec{r} (lenger arm) \Rightarrow større Ω
- vipping opp og ned, "nutasjon"

Sykkelhjul (halvkvantitativt):



Estimerer:

$$M \approx 5 \text{ kg}$$

$$R \approx \frac{3}{10} \text{ m}$$

$$R_{CM} \approx \frac{2}{10} \text{ m}$$

$$T_\omega = 2\pi/\omega \approx \frac{1}{3} \text{ s}$$

Måler:

$$T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 4 \text{ s}$$

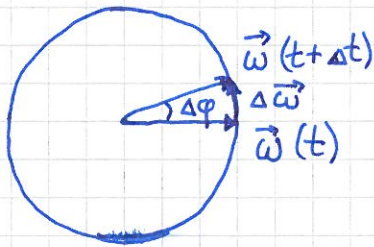
$$I_0 \approx MR^2$$

Finn estimat for T_Ω !

Løsning:
$$\vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} + I_0 \vec{\omega}$$

$$\vec{L}_b = R_{CM} \cdot MV \hat{z} \approx \text{konst.}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}}_A \approx I_0 \dot{\vec{\omega}} = \vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} = R_{CM} Mg \hat{\phi}$$



$$\Delta \vec{\omega} = \omega \cdot \Delta \phi \cdot \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \omega \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \hat{\phi} = \omega \Omega \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow R_{CM} Mg = I_0 \omega \Omega = MR^2 \omega \Omega$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Omega = \frac{R_{CM} g}{R^2 \omega}}}$$

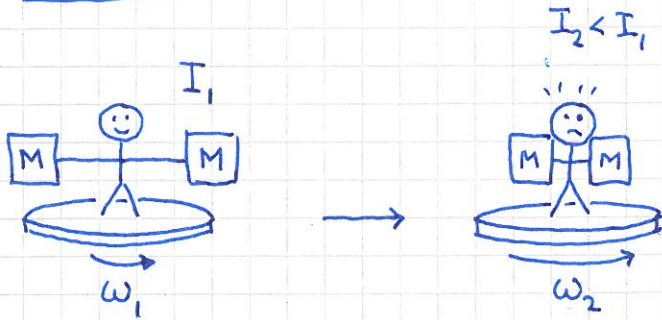
Dermed:

$$T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi R^2 \omega}{R_{CM} g} = \frac{(2\pi R)^2 / T_\omega}{R_{CM} g} \approx \frac{(6\pi/10)^2 \text{ m}^2 / (\frac{1}{3} \text{ s})}{\frac{2}{10} \text{ m} \cdot 10 \text{ m/s}^2}$$

$$= \frac{27\pi^2}{50} \text{ s} \approx \underline{5 \text{ s}}, \text{ ikke verst !!}$$

To raske demonstrasjoner av dreieimpulsbevarelse helt til slutt:

Piruettt



$$\tau_{\text{ytre}} = 0 \Rightarrow L = \text{konst.}$$

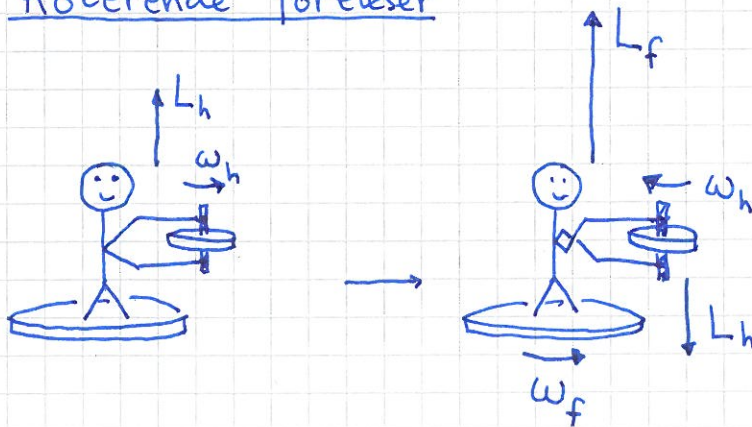
$$\Rightarrow I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \omega_1 > \omega_1$$

$$K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 \cdot \frac{I_1}{I_2} = K_1 \cdot \frac{I_1}{I_2} > K_1 !$$

Henter energi fra armmuskulene når bøkene trekkes inn, gir økt mekanisk energi.]

Roterende foreleser



h: hjul
f: foreleser

$$\Delta \vec{L} = 0 \Rightarrow L_f \approx 2 L_h$$

Slutten på del I av kurset.

TERMISK FYSIKK

62

Hovedtema:

	YF	LHL (LL)	HS
I. Termodynamikk	17, 19-20	13, 15-17	8, 10-12
II. Kinetisk gassteori	18	14	9
III. Varmetransport	17	18, 14	13
IV. Statistisk mekanikk			9.2

Først kort om I-IV:

I. Termodynamikk

- teori for makroskopiske systemer (dvs stort antall partikler), i termisk likevekt
- beskriver "termiske størrelser" som trykk p , temperatur T , tetthet ρ (ert. volum V og antall partikler N ; $\rho = N/V$), varme Q , entropi S osv.
- mange praktiske anvendelser, vi skal se på noen (motorer/varmekraftmaskiner, kjøleskap, varmepumper...)
- faselikevekter og faseoverganger
- gammel og god teori som "overlever alt", fordi den er generell og enkel

II. Kinetisk gasteori

(63)

- basert på molekylene (atomenes) bevegelse
- gir mikroskopisk forståelse av p og T
- ————— " ————— transportfenomener
- OK for fortynnede gasser (dvs lav tetthet)

III. Varmetransport

- varmeledning: energioverføring i medier (gasser, væsker, faste stoffer) pga temperaturforskjeller ($\nabla T \neq 0$)
- varmestråling: energioverføring via elektromagnetiske bølger
- konveksjon: energioverføring pga strømming

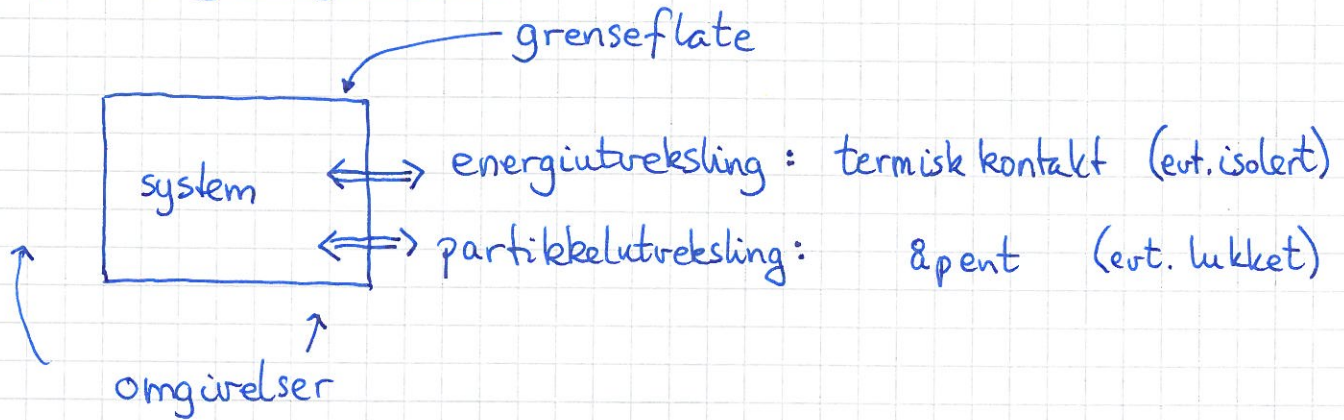
IV. Statistisk mekanikk

- tar utgangspunkt i sannsynlighetsfordelinger for molekylene "mekaniske tilstand" (dvs deres posisjoner og impulser)
- generell og slagkraftig teori som gir mikroskopisk grunnlag for forståelse av makroskopiske egenskaper til systemer i termisk likevekt (ikke bare gasser med lav tetthet, som i kinetisk gasteori)

I. Termodynamikk

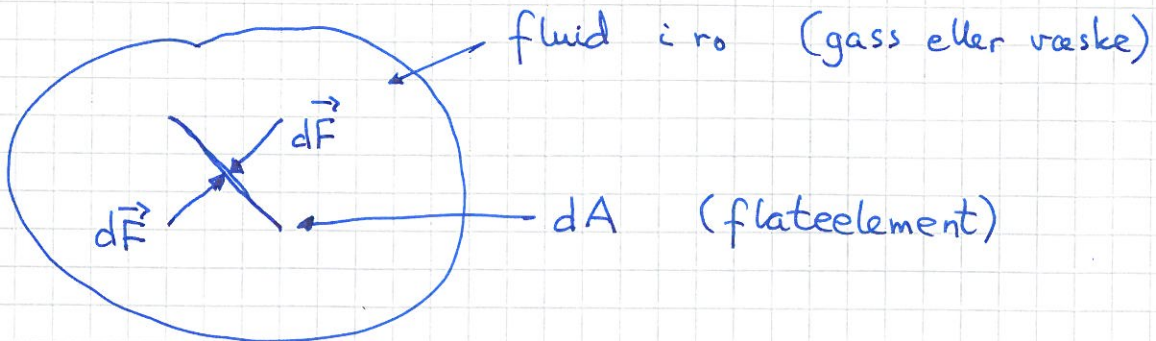
Grunnbegreper, Terminologi [YF 17,18; LHL 13; HS 8]

System og omgivelser



Eks: Lukket termos : termisk isolert ; lukket
Kaffekopp : —" — kontakt ; åpent

Trykk [YF 11.4, 12.2-12.3; LL 7.2, 8.1-8.4; HS 7.1.1]



$p \stackrel{\text{def}}{=} dF/dA = \text{kraft pr flateenhet} = \text{trykket i fluidet}$

p er en skalar størrelse

p er isotrop, dvs trykket er uavhengig av flatens orientering

$$\left[d\vec{F} = -p \cdot d\vec{A} = p \cdot dA \cdot (-\hat{n}) \quad \begin{array}{c} dA \\ \downarrow \\ \uparrow \hat{n} \end{array} = \text{enhetsvektor normalt på flaten} \right]$$

SI-enhet: $[p] = \text{N/m}^2 = \text{Pa}$ (pascal)

(65)

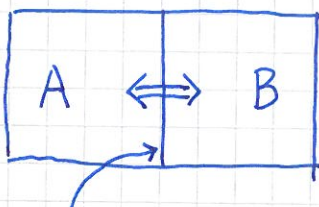
Andre mye brukte enheter:

$$1 \text{ atm} = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1.01325 \text{ bar}$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ psi} = 1 \text{ pound (vekten av } 0.454 \text{ kg) pr } \\ \text{square inch } ((25.4 \text{ mm})^2) \approx 6.9 \text{ kPa}$$

Temperatur og termisk likevekt [YF 17.1; LHL 13.1; HS 8.1]



termisk kontakt

- Hvis det ikke er en netto energistrøm mellom A og B, er A og B i termisk likevekt
- A og B har da lik temperatur,
 $T_A = T_B$

Termodynamikkens 0. hovedsetning:

Hvis $\{A \overset{\text{likevekt}}{\rightleftharpoons} B\}$ og $\{B \overset{\text{likevekt}}{\rightleftharpoons} C\}$, da er
også $\{A \overset{\text{likevekt}}{\rightleftharpoons} C\}$, og $T_A = T_B = T_C$

Opplagt for de fleste!

Vi måler T med termometre; via andre fysiske størrelser:

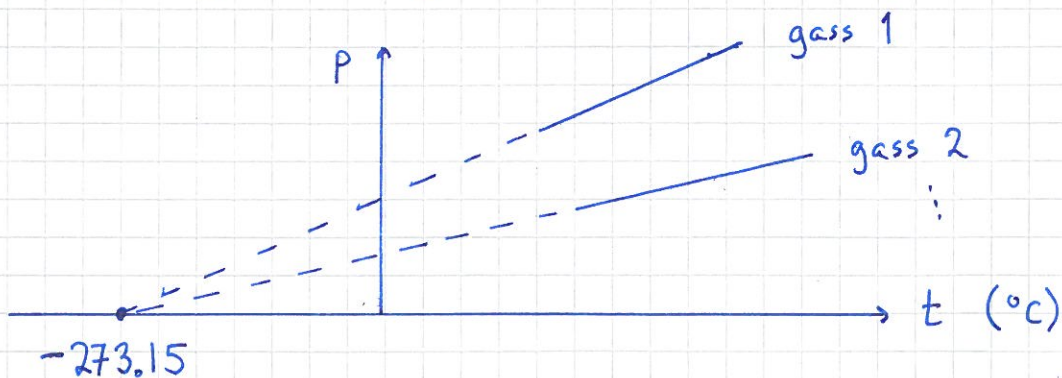
- væskerolum
- gasstrykk
- lengde av fast stoff
- elektrisk motstand osv.

Kalibrering av temperatur: [Celsius m. flere]

$$t_f = t(\text{H}_2\text{O fryser ved trykk 1 atm}) = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$t_k = t(\text{H}_2\text{O koker } \text{---} \text{---} \text{---}) = 100 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Hvis vi nå måler trykk og temperatur, dvs $p(t)$, for ulike fortynnede gasser:



Dvs: Vi finner at p er prop. med t for alle gassene, og at ekstrapolasjon til $p=0$ alltid gir samme verdi, $-273.15 \text{ } ^\circ\text{C}$.

$$\Rightarrow p(t) = A \cdot (t + 273.15) = A \cdot T$$

med absolutt temperatur $T = t + 273.15 \text{ K}$ (kelvin)

Vedtatt referansepunkt siden 1954:

(67)

Vannets trippelpunkt (p_t, T_t) , dvs det trykk og den temperatur der is, vann og vanndamp er i termisk likevekt med hverandre, er

$$p_t = 612 \text{ Pa} = 0.0063 \text{ atm}, \quad T_t = 273.16 \text{ K} \quad (t_t = 0.01^\circ\text{C})$$

Tilstandsvariable. Tilstandsligninger [YF 18.1; LHL 13.3; HS 8.3]

Makroskopisk system i termisk likevekt er i en tilstand beskrevet med tilstandsvariable:

$$p, T, V, \rho (= N/V), \dots$$

To hovedtyper:

Ekstensive variable er prop. med mengden stoff (materie).

Eks:

$$\boxed{V} + \boxed{V} = \boxed{2V}$$

Intensive variable er uavhengige av stoffmengden

Eks:

$$\boxed{p, T} + \boxed{p, T} = \boxed{p, T}$$

Tilstandsligning

= sammenheng mellom tilstandsvariable:

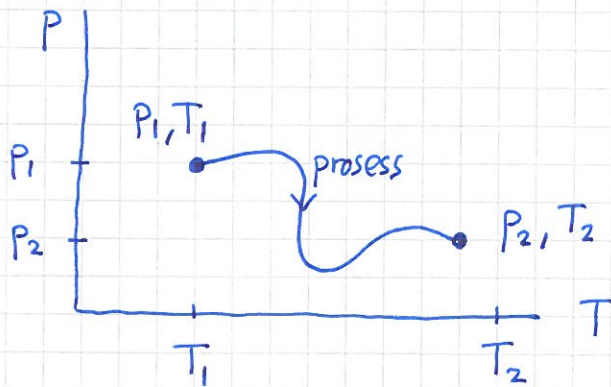
$$f(p, V, T) = 0$$

Dvs: $p = p(V, T)$, $V = V(T, p)$, $T = T(V, p)$

Prosess

= endring i tilstandsvariable

Eks:



Ideell gass [YF 18.1; LHL 13.3; HS 8.3]

God tilnærming for gasser ved lav tetthet:

$$pV = nRT$$

Tilstandsligning for ideell gass
(utledes senere, med kinetisk gassteori)

n = antall mol ; 1 mol = $6.022 \cdot 10^{23}$ partikler

$R = 8.314 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$ = gasskonstanten ("ette komma pi"!))

Alternativt:

(69)

$N = n \cdot N_A = \text{antall partikler}$; $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} = \text{Avogadros tall}$

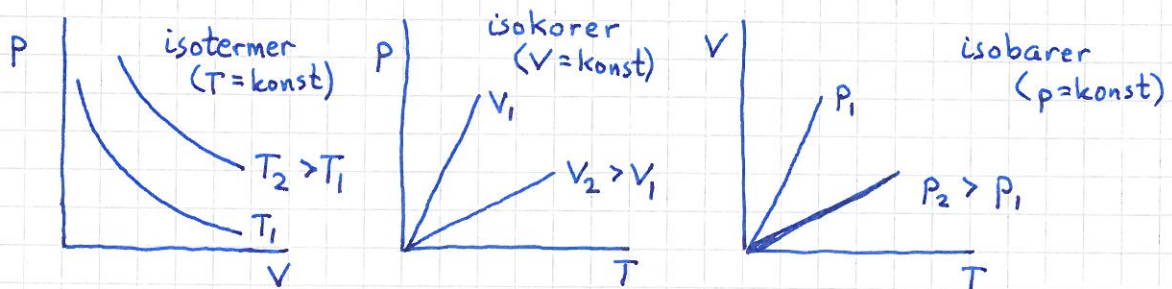
$k_B = R/N_A = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} = \text{Boltzmanns konstant}$

$$\Rightarrow n R = k_B N_A \cdot N/N_A = N k_B \Rightarrow \boxed{pV = N k_B T}$$

Dessuten:

$$g = N/V \Rightarrow \boxed{p = g k_B T}$$

Grafiske framstillinger, med $n = \text{konst}$:

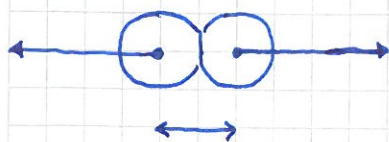


van der Waals tilstandsligning [YF 18.1; LHL 13.4]

[Johannes D. van der Waals, Nobelpreis i fysikk 1910]

Ideell gass = punktpartikler uten innbyrdes vekselvirkning

Reell gass = molekyler som okkuperer et volum, og som vekselvirker med hverandre:



liten $r \Rightarrow$ frastøtning



stor $r \Rightarrow$ svak tiltrekning

(van der Waals - krefter)

N molekyler tiltrekkes (svakt) av $N-1$ ($\approx N$) molekyler (70)

$$\Rightarrow p_{\text{reell}} < p_{\text{ideell}} = Nk_B T / V \Rightarrow p \rightarrow p + a' g^2$$

N molekyler okkuperer $\overset{\text{volum}}{N \cdot b'}$ ($b' \sim$ volum okkupert pr molekyl)

$\Rightarrow V - N \cdot b'$ er tilgjengelig volum for gitt molekyl

Dermed:

$$(p + a' N^2/V^2)(V - Nb') = Nk_B T$$

vdW tilst.lign. for gass med N molekyler

Hvis vi har 1 mol gass:

$N = N_A$, $Nk_B = N_A k_B = R$, og innfør $a = a' \cdot N_A^2$, $b = b' \cdot N_A$

$$\Rightarrow (p + a/V^2)(V - b) = RT \Rightarrow p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

vdW tilst.lign. for 1 mol gass

Målbare koeffisienter [YF 17.4; LHL 13.2; HS 8.2]

F.eks: " Ved konstant trykk p , hva blir relativ volumendring $\Delta V/V$ som følge av en temp.ending ΔT ? "

Volumutvidelseskoeffisient:

$$\beta = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta V/V}{\Delta T} \right\}_{p=\text{konst.}} = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

$$\text{Eks 1: } \beta_{\text{glass}} = 2.7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \ll \beta_{\text{etanol}} \approx 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

\Rightarrow spritsøylen stiger i termometeret når T øker!
[Dvs: termometeret virker!]

Eks 2: $\beta_{\text{H}_2\text{O}} < 0$ for $0^\circ\text{C} < t < 4^\circ\text{C}$

(71)

\Rightarrow for massetettheten μ : $\mu_{\text{H}_2\text{O}}(4^\circ\text{C}) > \mu_{\text{H}_2\text{O}}(0^\circ\text{C})$

\Rightarrow  is
0°C

Fryser ikke til bunns!
(Med mindre veldig
grunt.)

[Forklaring: "Åpen" krystallstruktur i is \Rightarrow Lav tetthet
 \Rightarrow Is lettere enn vann! Bindingsstruktur delvis utslutt opp
til ca 4°C \Rightarrow Vann tyngst ved 4°C]

Andre koeffisienter:

Linear utvidelseskoeff. (kun relevant for faste stoffer):

$$\alpha = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{3} \beta \quad (\text{siden } V = L^3, \text{ dvs } L = V^{1/3})$$

Trykk-koeff:

$$\gamma = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$$

Kompressibilitet χ_e og bulkmodul $(B = \chi_e^{-1})$:

$$\chi_e = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = B^{-1} \quad (\chi_e > 0, B > 0)$$

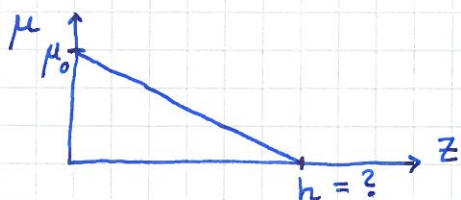
Eks: $\chi_{\text{H}_2\text{O}} \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ atm}^{-1}$

dvs: praktisk talt inkompressibel; gjelder generelt
for væsker og gasser.

Atmosfære og trykk; eksempler

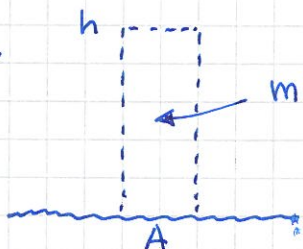
72

Eks 1: Anslå atmosfærens tykkelse ved å anta



$$\mu_0 = 1.3 \text{ kg/m}^3$$

Løsning:



$$m = \langle \mu \rangle \cdot V = \langle \mu \rangle \cdot Ah = \frac{1}{2} \mu_0 Ah$$

$$p = mg/A = \langle \mu \rangle gh = \frac{1}{2} \mu_0 gh$$

$$\Rightarrow h = 2p/\mu_0 g = 2 \cdot 10^5 / (1.3 \cdot 9.8) \text{ m} \approx \underline{16 \text{ km}}$$

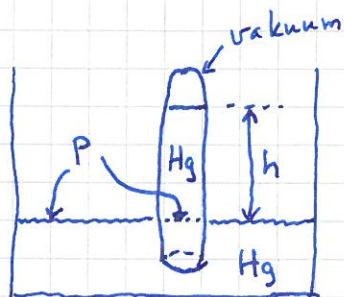
[Forbedret modell: $\mu = \langle m \rangle g = \langle m \rangle p / k_B T$ ($\langle m \rangle$ = midlere molekylvekt)

$$dp/dz = -\mu g = -\langle m \rangle g p / k_B T \Rightarrow dp/p = -(\langle m \rangle g / k_B T) dz$$

$$\Rightarrow p(z) = p(0) \exp\{-\langle m \rangle g z / k_B T\} \quad \text{når vi antar } g = \text{konst. og } T = \text{konst.}]$$

Eks 2: Hvor mange mm Hg er 1 atm?

Løsning:

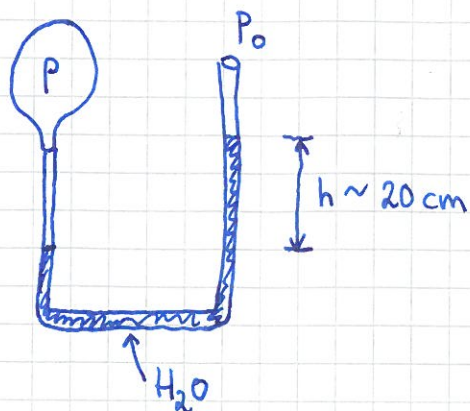


$$h = p/\mu g = 1.01 \cdot 10^5 / (13.6 \cdot 10^3 \cdot 9.81) \text{ m}$$

$$\approx 0.760 \text{ m} = \underline{760 \text{ mm}}$$

Eks 3: Anslå overtrykket i en vanlig ballong.

Løsning:



$$\text{Dvs: } \Delta p = p - p_0 \sim 1.0 \cdot 10^3 \cdot 9.8 \cdot 0.2 \text{ Pa}$$

$$\sim 2000 \text{ Pa}$$

$$\sim \underline{0.02 \text{ atm}}$$

Max Δp med nesten tom ballong.

Velikjent: Må blåse hardest i starten.

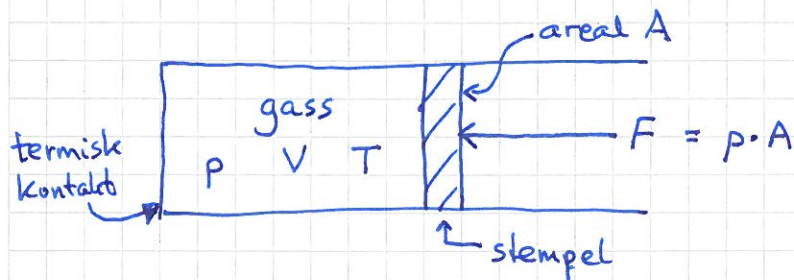
1. hovedsetning [YF 19,20; LHL 15,13; HS 11 (8)] (73)

Reversible vs irreversible prosesser [YF 20.1; LHL 13.3,13.7; HS 11.2]

En rev. pros. kan reverseres ("kjøres baklengs") slik at både system og omgivelser kommer tilbake til starttilstanden.

Prosesen må da gå tilstrekkelig langsomt ("kvasistatisk"), for å unngå dissipasjon (dvs energitap pga friksjon, turbulens etc).

Eks: Isoterm kompresjon



Gass i beholder med tettsluttende stempel, tverrsnitt med areal A .

omgivelser med temp. T

Start-tilstand: $V_i, p_i = F_i/A, T$

Slutt-tilstand: $V_f, p_f = F_f/A, T$

Underveis: $V_f < V < V_i, p_i < p < p_f, T$

Kompresjonen er reversibel dersom gassens termodyn. tilstand (gitt ved p, V, T) er veldefinert hele veien fra start-til slutt-tilstand.

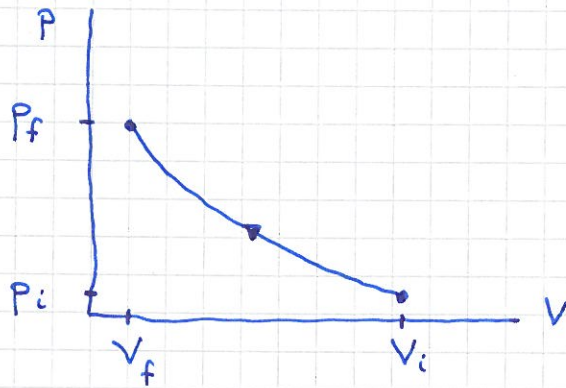
I praksis er alle reelle prosesser mer eller mindre irreversible, men det kan være en brukbar tilnærming å betrakte dem som reversible. Vi kan lære mye ved å analysere problemet med en slik idealisering.

Eks. på irrev. pros. :

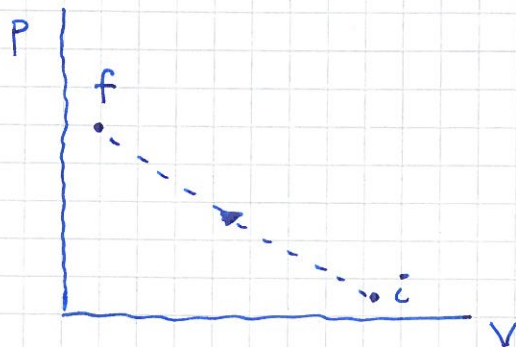
(74)

Rask kompresjon av gassen i beholderen. Vi får turbulens, trykk og temp. er ikke konstant i helegassen ($\nabla p \neq 0, \nabla T \neq 0$), og vi har (prdf) ikke termodynamisk likevekt underveis.

En kurve i et (likevelts-)diagram innebærer at prosessen er reversibel:



For å framstille irreversibile prosesser kan vi f.eks. bruke en stiplet kurve:



irrev. kompresjon;
 p, T ikke veldefinert
underveis

Arbeid

[YF 19.2; LHL 13.5; HS 11.3]

(75)

= alle former for energitveksling mellom system og omgivelser, unntatt slike som skyldes temperaturforskjeller

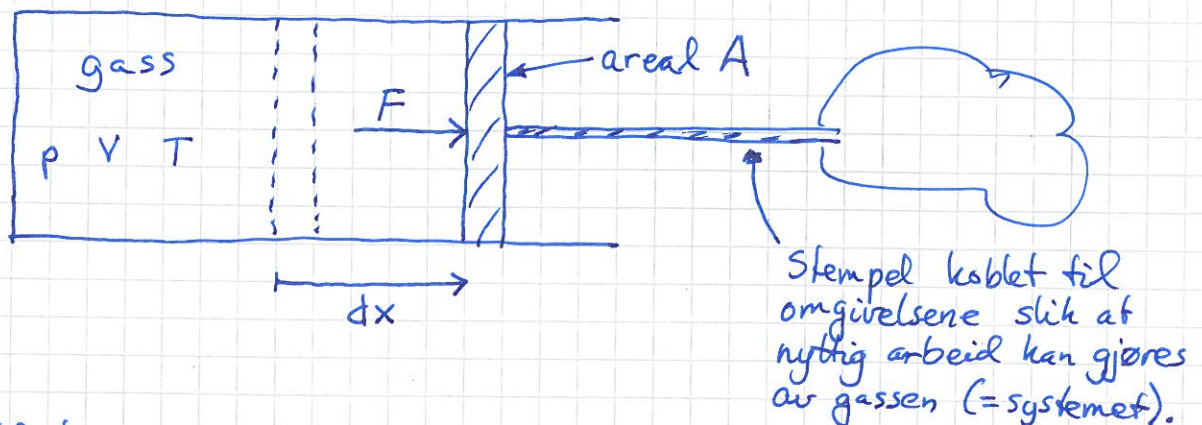
Fra mekanikken: $dW \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F} \cdot d\vec{s}$
arbeid \uparrow \vec{F} \uparrow kraft $d\vec{s}$ \uparrow forflytning

Eks (fra mekanikk):

$-kx \cdot dx =$ arbeid utført av ideell fjær ($k =$ fjærkonst.)

$\tau \cdot d\phi =$ ——— " ——— dreiemoment τ ved rotasjon $d\phi$

Standardeksemplet i termodynamikk er gjerne beholder med gass og stempel:



Arb. utført av gassen på omgivelsene ved utvidelse fra V til $V + dV$ ved trykk p :

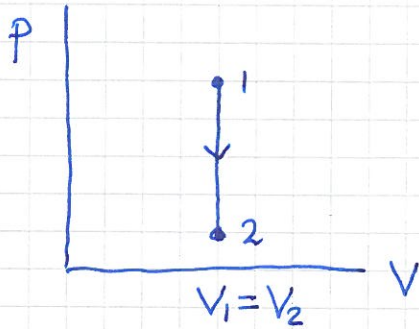
$$dW = F \cdot dx = pA \cdot \frac{dV}{A} = p \cdot dV$$

Fortegnsvalg for arbeid: $dW > 0$ når systemet gjør arbeid på omgivelsene ($dV > 0$)

Arbeid i ulike reversible prosesser:

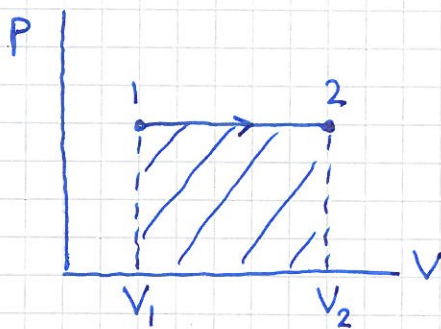
(76)

Isokor prosess:



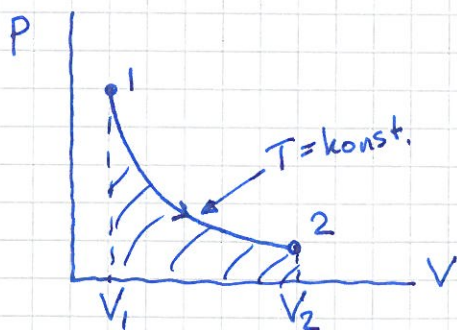
$$dV = 0$$
$$\Rightarrow W = \int_1^2 dW = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \underline{\underline{0}}$$

Isobar prosess:



$$W = \int_1^2 dW = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \underline{\underline{p(V_2 - V_1)}}$$

Isoterm prosess med ideell gass:



$$pV = Nk_B T$$
$$\Rightarrow p(V) = Nk_B T \cdot \frac{1}{V}$$
$$\Rightarrow W = Nk_B T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$
$$= \underline{\underline{Nk_B T \ln \frac{V_2}{V_1}}}$$

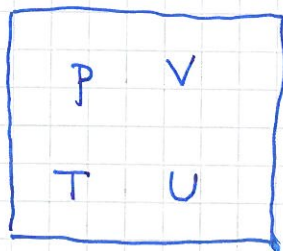
For alle prosessene ser vi at

$$W = \text{arealet under kurven } p(V)$$

Indre energi [YF 19.4, 19.6; LHL 13.6; HS 8.4]

(77)

Gass i beholder:



$$\begin{aligned} U &= \text{gassens energi} = \text{indre energi} \\ &= E_k + E_p \\ &= \text{partikkelenes kinetiske energi} + \\ &\quad \text{deres potensielle energi pga} \\ &\quad \text{innbyrdes vekselvirkning} \\ &= U(T, V) \end{aligned}$$

Indre energi for
ideell gass:

Med ideell gass er $E_p = 0$, dvs ingen vekselvirkning mellom molekylene. Da blir U uavhengig av volumet V :

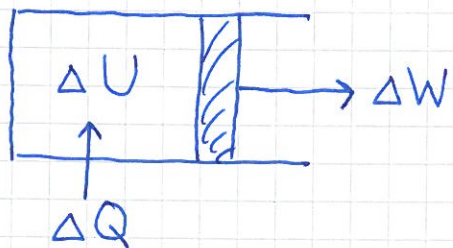
$$U = U(T) \text{ for ideell gass}$$

Varme og 1. hovedsetning [YF 19.4; LHL 15; HS 11.1, 8.4]

1. hovedsetning er essensielt en erkjennelse av hva vi mener med varme:

Varme er energioverføring pga temperaturforskjeller

Når andre energioverføringsformer er arbeid (s 75), kan 1. hovedsetning formuleres som energiøverbærelse for systemet:



$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W \quad \text{1. hovedsetning}$$

Dvs: Varme ΔQ som tilføres systemet går med til en endring ΔU i systemets indre energi, samt til det arbeidet ΔW systemet utfører på omgivelsene.

På "differensiell form" (dvs små endringer):

$$dQ = dU + dW$$

Merk: $U = U(T, V)$ er en tilstandsfunksjon, dvs vi kan betrakte U som en "vanlig funksjon" av T og V . Da kan vi derivere U mhp T og V , og U har et såkalt totalt differensial:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

Men Q og W er ikke tilstandsfunksjoner, men såkalte prosessvariable. Vi kan ikke skrive Q og W som "vanlige funksjoner" av tilstandsvariable. Vi kan ikke si at gassen "har en viss varme" eller "har et visst arbeid". Dermed har Q og W heller ikke noe tilhørende totalt differensial.

Noen bøker vil sette et "merke", dvs dQ og dW , for å understreke at Q og W ikke er tilstandsfunksjoner. (79)

Altså:

- U er entydig bestemt av systemets tilstand (T og V)
- U er prop. med N , dvs en ekstensiv størrelse
- Q og W avhenger av prosessen fra start- til slutt-tilstand

Energienheter:

I SI-enheter har vi selvsagt $[U] = [Q] = [W] = \underline{\text{J}}$.

Mye brukt er også (spesielt for varme):

1 cal (kalori) = påkrevd energi for å øke T fra 14.5°C til 15.5°C i 1 gram H_2O ved $p = 1 \text{ atm}$

$$\Rightarrow 1 \text{ cal} = 4.184 \text{ J}$$

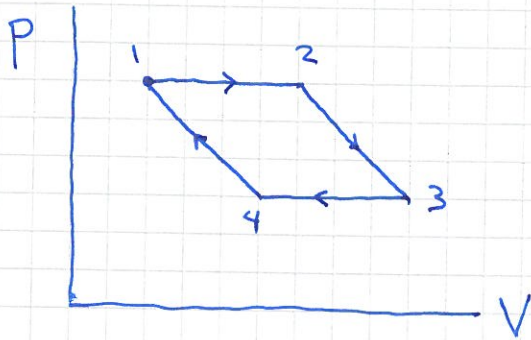
Kjemikere bruker gjerne:

$$\begin{aligned} 1 \text{ kcal/mol} &= 1000 \cdot 4.184 \text{ J} / 6.022 \cdot 10^{23} \text{ partikler} \\ &= 6.948 \cdot 10^{-21} \text{ J (pr partikkel)} \\ &= 43.4 \text{ meV} \quad (\rightarrow \text{''} \leftarrow) \end{aligned}$$

$$[1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}]$$

Kretsprosesser [YF 19.4; LHL 15.1; HS 11.4]

(80)



Prosesser som starter og slutter
i samme tilstand

$$\Rightarrow \Delta U = 0 \text{ for kretsprosess}$$

$$\Rightarrow \Delta Q = \Delta W \quad \text{---||---}$$



Dvs:

Arbeid utført pr syklus (omløp)

= Omskuttet areal i pV-planet

Følgelig:

Med klokka $\Rightarrow \Delta W > 0$ (Netto arbeid utført av syst.)

Mot klokka $\Rightarrow \Delta W < 0$ (---||--- på syst.)

Varmekapasitet [YF 17.5, 19.7; LHL 15.2; HS 8.4, 11.5] (81)

$$C = \frac{dQ}{dT} = \text{tilført varme dividert på temperaturendring}$$

Betydning av stor verdi på C :

$\Delta Q = C \cdot \Delta T$; dvs at det kreves mye varme ΔQ for å gi en viss temperaturendring ΔT dersom systemet har stor varmekapasitet C

Måling av C innebærer å måle ΔQ og tilhørende ΔT , ofte med en annen termodyn. størrelse holdt fast, enten $V = \text{konst.}$ eller $p = \text{konst.}$

Med $V = \text{konst.}$:

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V \stackrel{\substack{dV=0 \\ dW=0}}{=} \left(\frac{dU}{dT} \right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

Med $p = \text{konst.}$:

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p = \left(\frac{dU + dW}{dT} \right)_p = \left(\frac{dU + p dV}{dT} \right)_p > C_V$$

Enhet: $[C] = \text{J/K}$ (ert cal/K)

C er prop. med stoffmengden \Rightarrow ofte mer hensiktsmessig med spesifikke varmekapasitet:

$$c = C/M = \text{varmekap. pr masseenhet} \quad [c] = \text{J/kg} \cdot \text{K}$$

$$c_m = C/n = \text{---} \text{---} \text{ mol} = \text{molar varmekap.}$$

$$[c_m] = \text{J/mol} \cdot \text{K}$$

C_p vs C_v [YF 19.7; LHL 15.2; HS 11.5]

(82)

Væsker, faste stoffer: liten $\Delta V/\Delta T \Rightarrow C_p \approx C_v$

Gasser: betydelig $\Delta V/\Delta T \Rightarrow C_p$ betydelig større enn C_v

$$dQ = dU + p dV \stackrel{U=U(T,V)}{=} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + p dV$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{dQ}{dT}\right)_p}_{C_p} = \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V}_{C_v} + \left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

$$\Rightarrow C_p - C_v = \left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad (\text{gjelder generelt})$$

For ideell gass:

$$U = U(T) \Rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{Nk_B T}{p}\right) = \frac{Nk_B}{p} = \frac{V}{T} \Rightarrow p \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = nR (=Nk_B)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_p - C_v = nR ; C_{pm} - C_{vm} = R} \quad (\text{ideell gass})$$

Eksp. (ved romtemperatur):

$$\text{Ar: } C_{pm} = 2.52R, C_{vm} = 1.52R, C_{pm} - C_{vm} = 1.00R$$

$$\text{N}_2: C_{pm} = 3.49R, C_{vm} = 2.49R, C_{pm} - C_{vm} = 1.00R$$

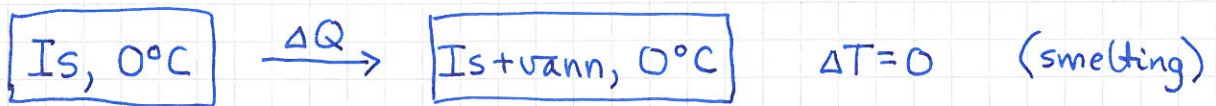
$$\text{Atomære gasser: } C_{pm} \approx 5R/2, C_{vm} \approx 3R/2, \gamma = C_p/C_v = 5/3$$

$$\text{2-atomige " " : } C_{pm} \approx 7R/2, C_{vm} \approx 5R/2, \gamma = 7/5$$

$$\text{Metaller: } c_m \approx 3R \quad (\text{Dulong-Petits lov})$$

Latent varme [YF 17.6; LHL 13.2; HS 10.1]

(83)



Dvs: Faseoverganger. "Latent varme", $L = \Delta Q$,
tilføres uten at T endres. (Formelt blir da: $C' \rightarrow \infty$)

Smeltevarme, is : $L_{sm} \approx 80 \text{ cal/g}$
Fordampingsvarme, vann : $L_f \approx 540 \text{ cal/g}$ } (ved 1 atm)

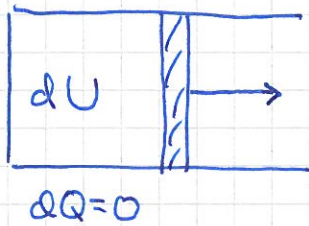
Sublimasjon, is \rightarrow vanndamp : $L_{sub} \approx L_{sm} + L_f \approx 620 \text{ cal/g}$

Latent varme går med til :

- å gjøre arbeid mot det ytre trykket (ved f og sub ;
som regel liten ΔV ved sm)
- å øke avstanden mellom molekylene, som gir økt
indre potensiell energi uten at indre kinetisk energi
endres $\Rightarrow T$ kan forbli uendret

Adiabatiska prosesser [YF 19.8; LHL 15.3, HS 11.6] (84)

= varmeisolerete prosesser, $\Delta Q = 0$, $\Delta U = -\Delta W$



$$0 = dU + p dV$$

Anta ideell gass:

$$p dV = \frac{nRT}{V} dV = \overbrace{(C_p - C_v)}^{= nR} T \frac{dV}{V} = C_v (\gamma - 1) T \frac{dV}{V}$$

Her er $\gamma = C_p / C_v$ den såkalte adiabatkonstanten.

Med $dU = C_v dT$ fås:

$$\frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \frac{dV}{V} \Rightarrow \ln T = -(\gamma - 1) \ln V + \text{konst.}$$

$$\Rightarrow \ln T + \ln V^{\gamma-1} = \text{konst.} \Rightarrow \ln (T \cdot V^{\gamma-1}) = \text{konst.}$$

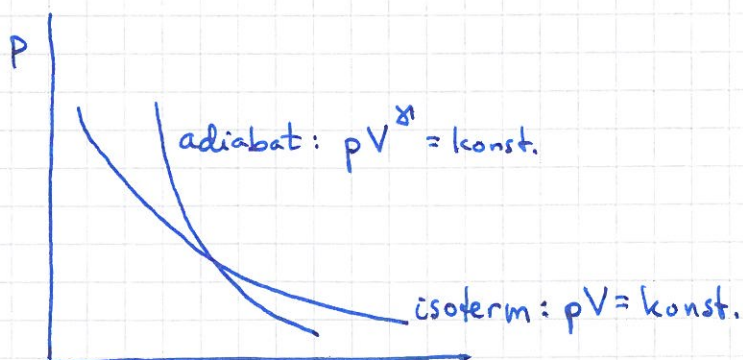
$$\Rightarrow \boxed{T \cdot V^{\gamma-1} = \text{konst.}}$$

$$\begin{aligned} T &\sim p \cdot V \\ \Rightarrow & \end{aligned}$$

$$\boxed{p \cdot V^{\gamma} = \text{konst.}}$$

$$\begin{aligned} V &\sim T/p \\ \Rightarrow & \end{aligned}$$

$$\boxed{p \cdot T^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \text{konst.}}$$



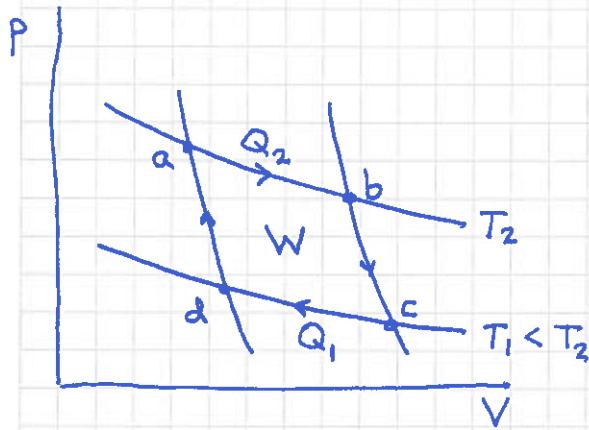
$\gamma > 1 \Rightarrow$ adiabat brattere enn isoterm for ideell gass

Carnotprosessen [YF 20.6; LHL 15.4; HS 11.7]

(85)

[Sadi Carnot, 1796-1832, fransk ingeniør under den industrielle revolusjon]

Reversibel kretsprosess med 2 adiabatener og 2 isotermer



$a \rightarrow b$: isoterm utvidelse ved T_2 , $Q_2 > 0$

$b \rightarrow c$: adiabatisk — fra T_2 til T_1 , $Q=0$

$c \rightarrow d$: isoterm kompresjon ved T_1 , $Q_1 < 0$

$d \rightarrow a$: adiabatisk — fra T_1 til T_2 , $Q=0$

Virkningsgrad: $\eta = \frac{\text{nytte}}{\text{kostnad}}$

Her: nytte = netto utført arbeid = W

kostnad = tilført varme = Q_2

$$\oint dU = 0 \Rightarrow W = Q_2 + Q_1$$

$$\Rightarrow \eta_c = \frac{Q_2 + Q_1}{Q_2} = 1 + \frac{Q_1}{Q_2} < 1$$

Anta ideell gass, $U = U(T) \Rightarrow \Delta U = 0$ langs isotermene

$$\Rightarrow Q_2 = W_{ab} = \int_{V_a}^{V_b} p dV = nRT_2 \int_{V_a}^{V_b} \frac{dV}{V} = nRT_2 \ln \frac{V_b}{V_a}$$

$$Q_1 = W_{cd} = \int_{V_c}^{V_d} p dV = \dots = nRT_1 \ln \frac{V_d}{V_c}$$

Langs adiabatene $b \rightarrow c$ og $d \rightarrow a$: $T \cdot V^{\gamma-1} = \text{konst.}$

$$\Rightarrow T_2 V_b^{\gamma-1} = T_1 V_c^{\gamma-1} \quad \text{og} \quad T_1 V_d^{\gamma-1} = T_2 V_a^{\gamma-1} \quad (86)$$

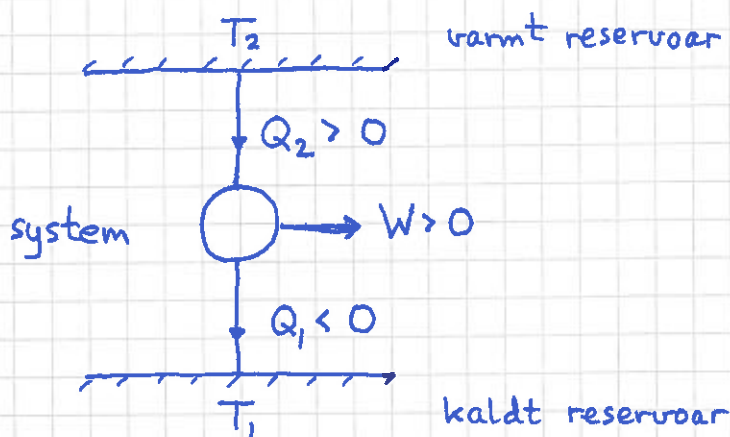
$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_c}{V_b}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_d}{V_a}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_c}{V_b} = \frac{V_d}{V_a} \Rightarrow \frac{V_a}{V_b} = \frac{V_d}{V_c}$$

$$\Rightarrow Q_1 = nRT_1 \ln \frac{V_a}{V_b} = \underbrace{\left(-nRT_2 \ln \frac{V_b}{V_a}\right)}_{-Q_2} \cdot \frac{T_1}{T_2} = -\frac{T_1}{T_2} Q_2$$

$$\Rightarrow W = Q_2 + Q_1 = Q_2 \left(1 - T_1/T_2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta_c = 1 - T_1/T_2} \quad \text{Virkningsgrad for Carnot-prosess, her med ideell gass.}$$

Varmekraftmaskin (som ovenfor):

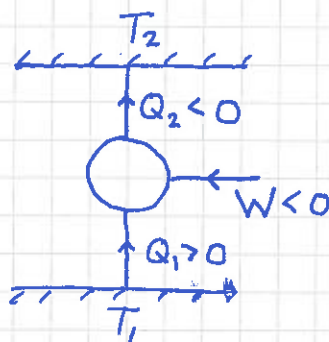
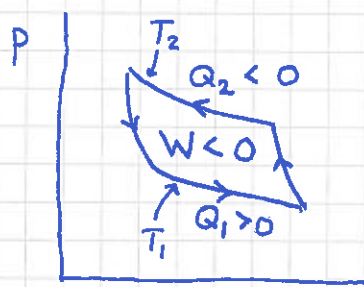


- Tilfører varme, Q_2 , for å få utført arbeid, W .
- Virkningsgrad for reell varmekraftmaskin: $\eta < \eta_c < 1$.
- Et varmereservoar har så stor varmekapasitet C at dets temperatur ikke endrer seg ved tilførsel/uttrekk av varme, $\Delta T = \Delta Q/C = 0$.

Kjøleskap og varmepumpe:

(87)

Varmekraftmasken kjørt baklengs.



- Gjør arbeid, W , på systemet for å trekke varme, Q_1 , ut av lavtemperaturreservoaret.
- Kjøleskap: T_1 inni ($\approx 4^\circ\text{C}$), T_2 utenfor ($\approx 22^\circ\text{C}$)

Virkn.grad (Effektfaktor):

$$E_K = \text{nytte} / \text{kostnad} = \text{varme ut av kjøleskapet} / \text{tilført arbeid (elektrisk)} = |Q_1 / W| = |Q_1 / (Q_1 + Q_2)|$$

Teoretisk grense bestemt av Carnot-prosessen:

$$E_K^c = \frac{1}{|1 + Q_2/Q_1|} = \frac{1}{|1 - T_2/T_1|} = \underline{\underline{\frac{T_1}{T_2 - T_1}}}$$

- Varmepumpe: T_1 ute (mellom -30°C og $+20^\circ\text{C}$)
 T_2 inne ($\approx 22^\circ\text{C}$)

Effektfaktor:

$$E_V = \text{varme inn i huset} / \text{tilført arbeid} = |Q_2 / W| = |Q_2 / (Q_1 + Q_2)|$$

Teoretisk grense (Carnot):

$$E_V^c = \frac{1}{|Q_1/Q_2 + 1|} = \frac{1}{|-\frac{T_1}{T_2} + 1|} = \underline{\underline{\frac{T_2}{T_2 - T_1}}}$$

Eksempler, kommentarer:

(88)

- Luft-til-luft varmepumpe, $T_2 = 295 \text{ K}$ (22°C inne):

$$\epsilon_V^c (T_1 = 0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}) = 295/22 =$$

$$\epsilon_V^c (T_1 = -20^\circ\text{C} = 253 \text{ K}) = 295/42 =$$

$$\text{Reelle varmepumper: } \epsilon_V \lesssim \epsilon_V^c / 4$$

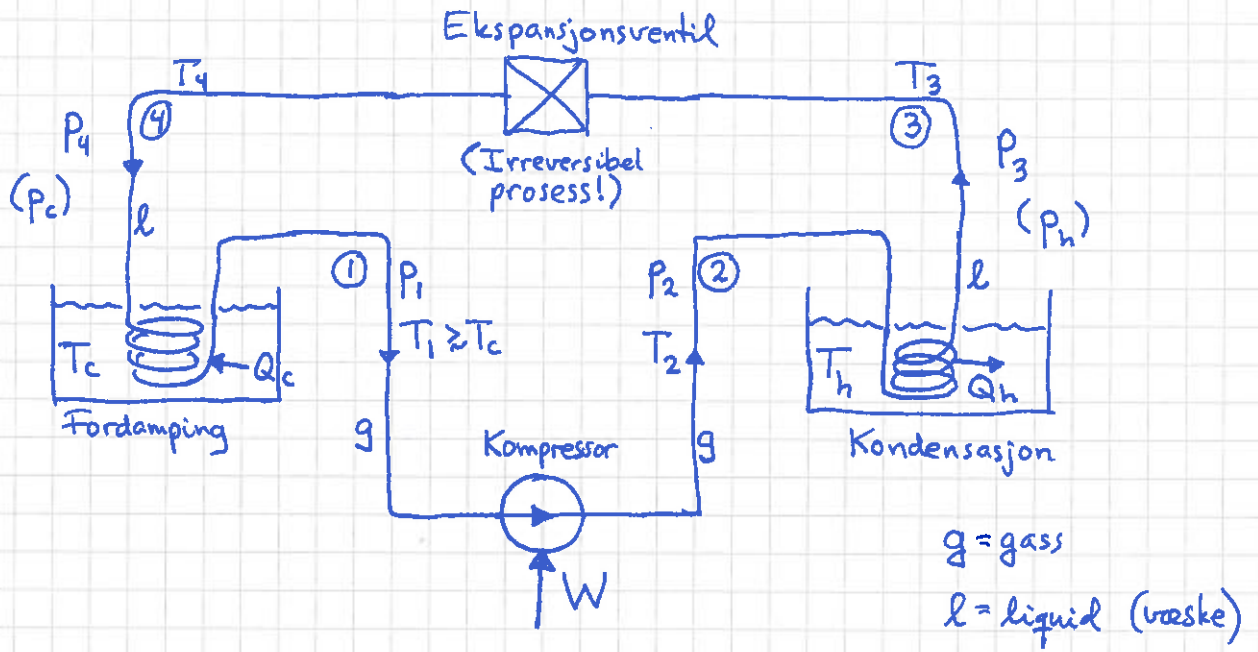
- Jordvarmepumpe: $T_1 \approx 5^\circ\text{C} = 278 \text{ K}$ (stabilt, 80-200 m under bakken) $\Rightarrow \epsilon_V^c \approx 295/17 =$

- Kjøleskap: $T_1 = 4^\circ\text{C} = 277 \text{ K}$

$$\Rightarrow \epsilon_K^c = \frac{T_1}{T_2 - T_1} = \frac{277}{18} \approx 15$$

$$\Rightarrow |W| > |Q_1| / 15$$

- \Rightarrow Hvis varmeledning inn i kjøleskapet er f.eks. 1.5 kW , må vi forbruke elektrisk effekt 100 W for å opprettholde konstant $T_1 = 4^\circ\text{C}$ i kjøleskapet.

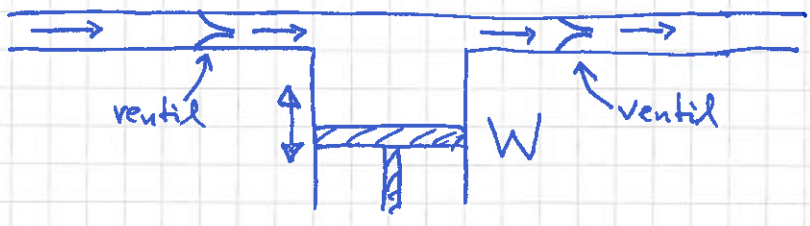


Tallverdier (f.eks.):

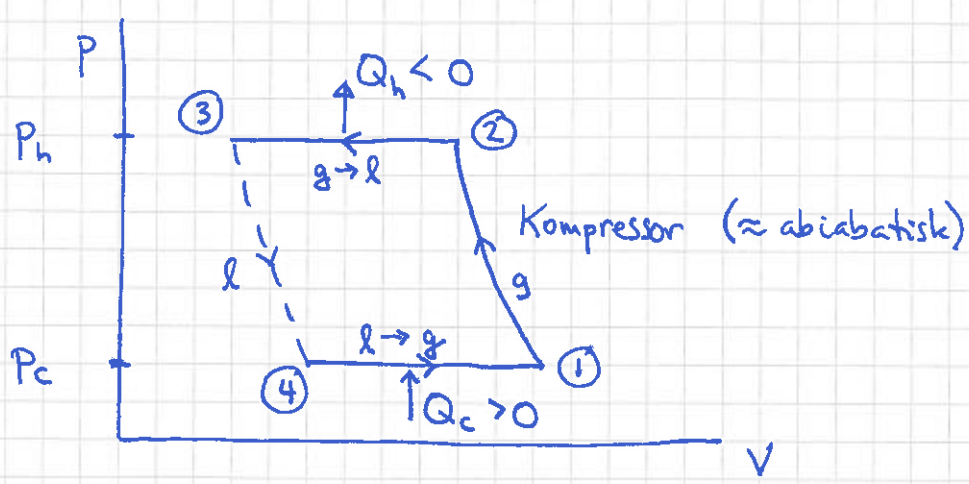
$T_1 = 3.6 \text{ } (^{\circ}\text{C})$, $T_2 = 39.6$, $T_3 = 26.3$, $T_4 = -0.2$

$T_c = 2.9$, $T_h = 23.6$, $P_1 = P_4 = P_c = 2 \text{ bar}$, $P_2 = P_3 = P_h = 9 \text{ bar}$

"Systemet" er kjølevæsken som sirkulerer gjennom rørsystemet, og pumpes av kompressoren:



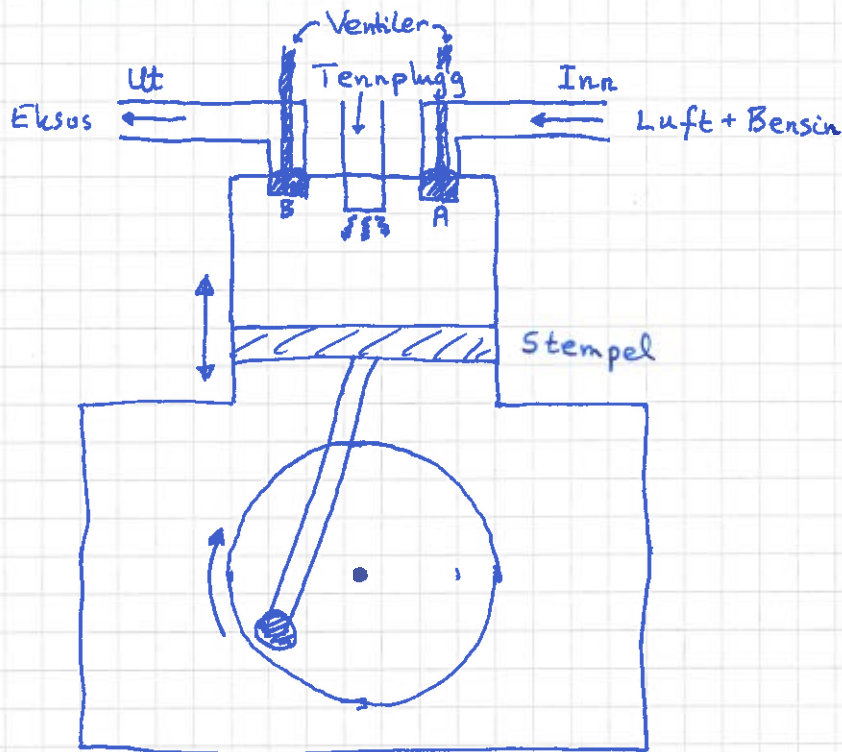
I et pV-diagram:



4-takts bensinmotor

[YF ~~20.3~~; LHL 16.4; HS 11.8]

90



1. A åpen, B lukket, luft+bensin inn

1→2. A og B lukket, stempel opp, adiabatisk kompresjon
 $\Delta V < 0$, $\Delta p > 0$, $\Delta T > 0$, $W_{12} < 0$, $Q_{12} = 0$

2→3. A og B lukket, antenning med gnist fra tennplugg
 $\Delta V = 0$, $\Delta p > 0$, $\Delta T > 0$, $W_{23} = 0$, $Q_{23} > 0$

3→4. A og B lukket, stempel ned, adiabatisk utvidelse
 $\Delta V > 0$, $\Delta p < 0$, $\Delta T < 0$, $W_{34} > 0$, $Q_{34} = 0$

4→1. A lukket, B åpen, stempel opp, eksos ut
 $\Delta V = 0$ (for "systemet" = forbrent ~~luft~~ luft/bensin-blending)
 $\Delta T < 0$, $\Delta p < 0$, $Q_{41} < 0$, $W_{41} = 0$

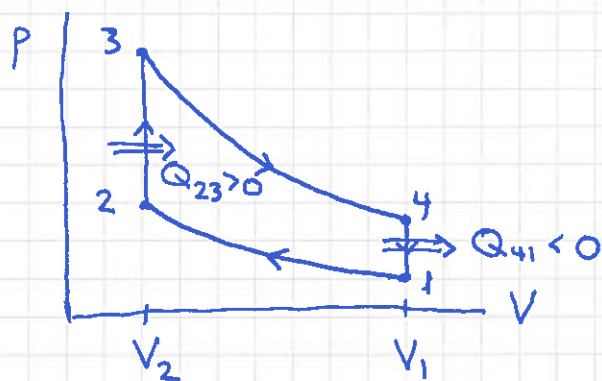
1. A åpen, B lukket, luft+bensin inn

osv.

Idealisering i pV-diagram:

(91)

Reversibel Otto-syklus.



$$\eta_o = \frac{W}{Q_{23}} = \frac{Q_{23} + Q_{41}}{Q_{23}} = \frac{Q_{23} - |Q_{41}|}{Q_{23}} = 1 - \frac{|Q_{41}|}{Q_{23}}$$

$$Q_{23} = C_V (T_3 - T_2), \quad |Q_{41}| = C_V (T_4 - T_1)$$

$$\Rightarrow \eta_o = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_4 (1 - T_1/T_4)}{T_3 (1 - T_2/T_3)}$$

Adiabater 1→2 og 3→4 $\Rightarrow T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \quad (T_1 < T_2)$

[$\gamma \approx 1.4$; mest luft] og $T_4 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_2^{\gamma-1} \quad (T_4 < T_3)$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_4} = \frac{T_2}{T_3} \quad \text{og} \quad \frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \eta_o = 1 - \frac{T_4 (1 - T_1/T_4)}{T_3 (1 - T_2/T_3)} = \underline{\underline{1 - \frac{T_4}{T_3}}} \quad \left[\eta_c = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} \Rightarrow \eta_o < \eta_c \right]$$

ert. $\eta_o = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = 1 - \frac{1}{(V_1/V_2)^{\gamma-1}}$

der $V_1/V_2 =$ kompresjonsforholdet

Diesel-syklus:



2 adiabater, 1 isobar, 1 isokor

Kinetisk gasteori; Statistisk mekanikk

[YF 18; LHL 14, 17.11; HS 9]

Antagelser (kinetisk gasteori) [YF 18.3; LHL 14.1; HS 9.1]

- Lav tetthet, $V_{\text{molekyl}} \ll V/N = \text{tilgjengelig vol. pr partikkel}$
- OK ved normale betingelser:

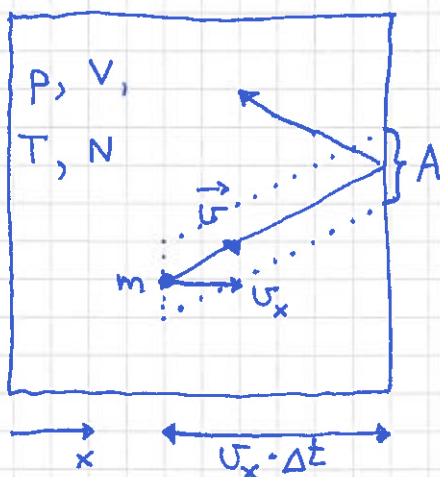
$$V_{\text{molekyl}} \sim (3 \text{ \AA})^3$$

$$V/N \sim k_B T / p \approx (1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 / 10^5) \text{ m}^3 \sim (35 \text{ \AA})^3$$

- Elastiske kollisjoner
- Isotrope forhold: Likt i alle retninger

Mikroskopisk tolkning av p og T [YF 18.3; LHL 14.1; HS 9.1]

Boks med ideell gass:



Trykk mot del av veggen med areal A : $p = F_x / A$

Newtons 2. lov: $F_x = \Delta P_x / \Delta t$

der $\Delta P_x = \text{impuls overført til } A \text{ i løpet av tida } \Delta t$.

Impuls overført til veggen pr molekyl som kolliderer med veggen:

$$2 \cdot m u_x \quad (m = \text{molekylmassen})$$

Antall molekyler som treffer A i løpet av Δt :

(93)

$$\underbrace{\frac{1}{2} N} \cdot \underbrace{\frac{A \cdot v_x \Delta t}{V}}$$

= de som har $v_x > 0$

= andel av molekylene som treffer A i løpet av Δt

($A \cdot v_x \Delta t$ = volum av stiptet parallellepiped)

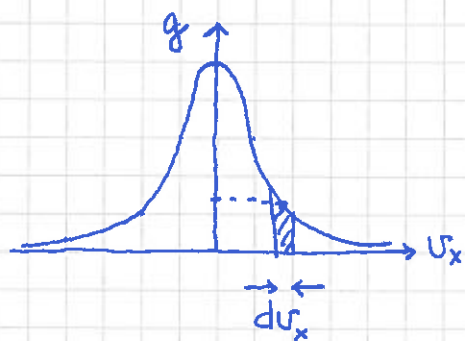
⇒ Total impuls overført til A (veggen) fra gassen i løpet av Δt :

$$\Delta P_x = 2m v_x \cdot \frac{1}{2} N \cdot A \cdot v_x \Delta t / V$$

⇒ Trykket mot A, og dermed trykket i gassen, blir:

$$p = N m v_x^2 / V$$

Har så langt antatt samme v_x for alle molekylene. Stemmer ikke; molekylene har en fordeling av hastigheter, som pga isotropi må være symmetrisk (for \vec{v} og komponentene v_x, v_y og v_z):



$g(v_x) dv_x$ = andel molekyler med x-komp. av \vec{v} i $(v_x, v_x + dv_x)$ (= skravert areal)

En gitt partikkel må ha en eller annen verdi av v_x

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(v_x) dv_x = 1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{dvs sannsynlighetsfordelingen} \\ g(v_x) \text{ må være normert} \end{array} \right)$$

Vi kan uten videre slå fast: [$\langle \dots \rangle$ = midde(verdi av ...)]

$$\langle v_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x g(v_x) dv_x = 0$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 g(v_x) dv_x > 0$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \quad (\text{pga isotropi})$$

Dermed:

(94)

$$\text{Trykket i gassen: } \underline{p} = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m \langle v^2 \rangle = \underline{\underline{\frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle K \rangle}}$$

der $\langle K \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle =$ midlere kinetisk energi pr molekyl

Samtidig har vi $p = Nk_B T / V$, ideell gass tilstandsligning.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{2}{3} \langle K \rangle = k_B T}; \quad \langle K \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

Dvs: T er et mål på molekylene's midlere kinetiske energi.

For enatomige gasser (f.eks. edelgasser som He, Ne etc.), som kan betraktes som punktpartikler uten gjensidig vekselvirkning, dvs ideell gass, er det ikke andre bidrag til indre energi enn ~~atomenes~~ kin. energi:

$$U = N \langle K \rangle = \frac{3}{2} N k_B T$$

$$\Rightarrow C_V = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{3}{2} N k_B = \frac{3}{2} n R$$

(se s. 81)

$$c_{vm} = C_V / n = \frac{3}{2} R$$

Som stemmer bra med eksperimenter.

For toatomige molekyler er det ikke fullt så enkelt; vi kommer straks tilbake til det.

Maxwells hastighetsfordeling

[YF 18.5; LHL 14.3; HS 9.2.1]

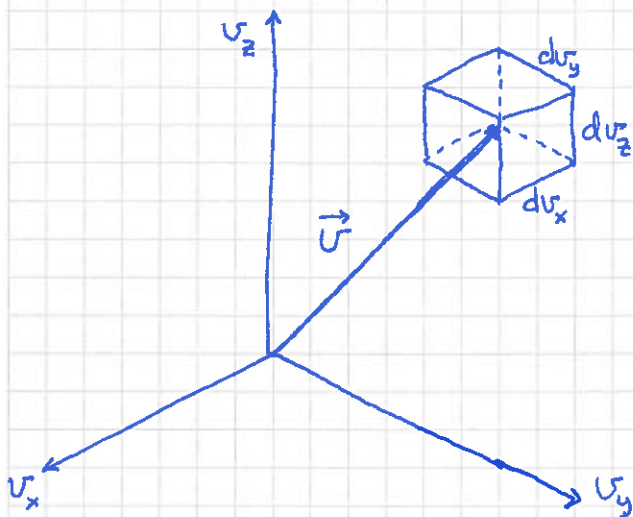
(95)



$g(v_x) dv_x =$ sanns. for x-komp. av \vec{v} i $(v_x, v_x + dv_x)$

$F(\vec{v}) d^3v =$ " " " hastighet i $(\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v})$

$f(v) dv =$ " " " "fart" ($|\vec{v}|$) i $(v, v + dv)$



$F(\vec{v}) d^3v = F(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z$
 $=$ sanns. for hastighet
i boksen med volum
 $d^3v = dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z$

Antagelser:

- ① Isotropi. Da er $g(v_x) = g(-v_x)$ (uavh. av fortegn, som allerede fastslått s. 93) og $F(\vec{v}) = F(v)$ (uavh. av retningen på \vec{v} , kun avh. av $v = |\vec{v}|$).
- ② Uavhengige komponenter v_x, v_y, v_z . Drs: Hvis du måler v_x for en partikkel, kan du ikke bruke resultatet til å si noe om v_y og v_z .

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow F(v) d^3v = [g(v_x)dv_x] \cdot [g(v_y)dv_y] \cdot [g(v_z)dv_z] \quad \textcircled{96}$$

dvs:

$$F(v) = g(v_x) \cdot g(v_y) \cdot g(v_z)$$

[Analogt eksempel: Sanns. for å slå 3 6-ere med 3 terninger = $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$]

Ta ln på begge sider:

$$\ln F(v) = \ln g(v_x) + \ln g(v_y) + \ln g(v_z)$$

Siden $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, er det her ikke mange mulige funksjoner g som kan oppfylle denne ligningen. Det er faktisk bare en eneste mulighet:

$$\ln g(v_x) = a - bv_x^2$$

[Høyre side blir da: $3a - b(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = 3a - bv^2$, dvs en funksjon av v , som vi skulle ha, siden venstre side er en funksjon av v .]

Dermed:

$$g(v_x) = e^a \cdot e^{-bv_x^2}$$

Eliminerer / Fastlegger konstanten e^a med normeringskravet:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} g(v_x) dv_x = e^a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bv_x^2} dv_x$$

Triks for å bestemme dette integralet:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-by^2} dy$$

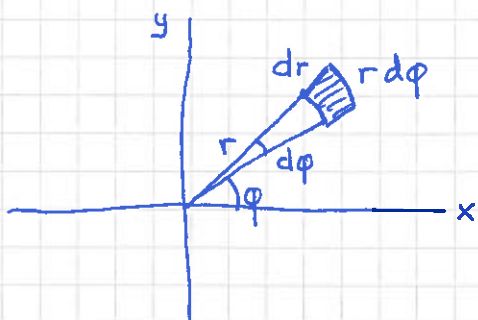
$$\Rightarrow I_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b(x^2+y^2)} dx dy$$

Geometrisk kan dette dobbeltintegralet oppfattes som volumet

mellom xy -planet og flaten $z = \exp(-b(x^2+y^2))$.

Vi kan like gjerne bruke polarkoordinater r, φ .

Da er $x^2+y^2 = r^2$, og flatelementet blir $dr \cdot r d\varphi$ istedetfor $dx \cdot dy$:



For å dekke hele xy -planet, må vi la r gå fra 0 til ∞ og φ fra 0 til 2π .

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_0^2 &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-br^2} \cdot dr \cdot r d\varphi \\ &= \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \underbrace{\int_0^\infty r e^{-br^2} dr}_{= \int_0^\infty -\frac{1}{2b} e^{-br^2} = \frac{1}{2b}} = 2\pi \cdot \frac{1}{2b} = \frac{\pi}{b} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_0 = \sqrt{\pi/b}$$

$$\Rightarrow 1 = e^a \int_{-\infty}^\infty e^{-bv_x^2} dv_x = e^a \cdot \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

$$\Rightarrow \underline{e^a = \sqrt{\frac{b}{\pi}}}$$

Fra s93,94 : $\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \langle K \rangle}{m} = \frac{k_B T}{m}$,

som vi kan bruke til å fastlegge b :

$$\frac{k_B T}{m} = \langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^\infty v_x^2 g(v_x) dv_x = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \int_{-\infty}^\infty v_x^2 e^{-bv_x^2} dv_x$$

Triks for å bestemme dette integralet:

(98)

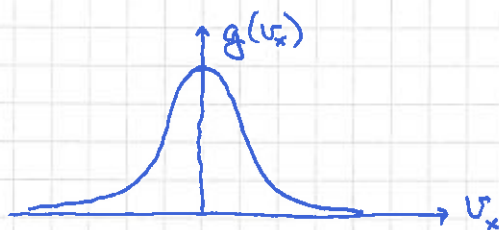
$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-bx^2} dx = -\frac{d}{db} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2} dx \right\}$$

$$= -\frac{d}{db} I_0 = -\frac{d}{db} \sqrt{\frac{\pi}{b}} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} b^{-3/2}$$

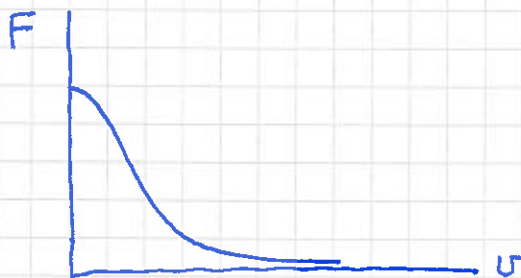
$$\Rightarrow \frac{k_B T}{m} = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot b^{-3/2} \quad \Rightarrow \quad \underline{b = \frac{m}{2k_B T}}$$

Dermed har vi Maxwells hastighetsfordeling, for komponentene v_x, v_y, v_z , for hastigheten \vec{v} , og for $v = |\vec{v}|$:

$$g(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-mv_x^2/2k_B T}$$



$$F(v) = g(v_x) g(v_y) g(v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$$



Fartfordelingen $f(v)$ bestemmes fra hastighetsfordelingen

$F(\vec{v}) \stackrel{\text{isotropi!}}{=} F(v)$ ved å summere (integrere!) over alle mulige retninger:

$$f(v)dv = \text{andel molekylar med } |\vec{v}| \text{ i } (v, v+dv)$$



kuleskall med radius r og tykkelse dr , ders volum $4\pi r^2 \cdot dr$

$$F(v)d^3v = \text{andel molekylar med } \vec{v} \text{ i } (\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v})$$

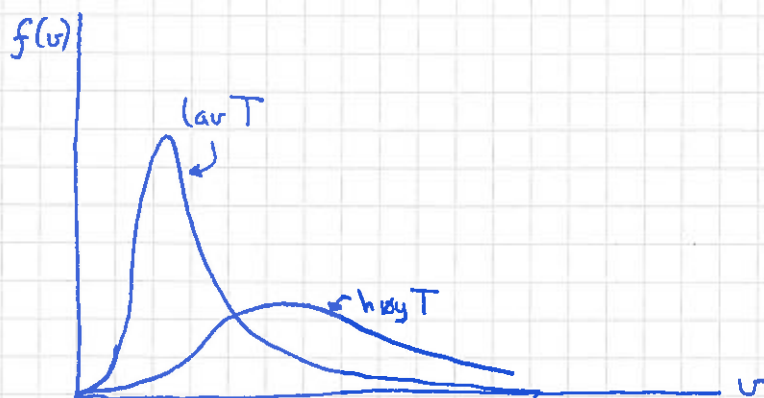


$d^3v =$ liten del av kuleskallet ovenfor

Vi ser at hvis vi summerer (integrerer) $F(v)d^3v$ over alle mulige retninger, så må vi få $F(v) \cdot \text{kuleskallvolumet} = F(v) \cdot 4\pi v^2 dv$, og dette må være andelen molekylar med $|\vec{v}|$ mellom v og $v+dv$:

$$\Rightarrow F(v) \cdot 4\pi v^2 dv = f(v) \cdot dv$$

$$\Rightarrow f(v) = 4\pi v^2 F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_B T}$$



Eksempler:

(100)

- $\langle v_x \rangle = 0$ (pga symmetri)
- $\langle v^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle = 3k_B T / m$
 $\Rightarrow v_{\text{rms}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3k_B T / m}$ ("root mean square")

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-mv^2/2k_B T} dv$$

$$\int_0^{\infty} v^3 e^{-mv^2/2k_B T} dv = -\frac{d}{db} \int_0^{\infty} v e^{-bv^2} dv \quad (b = m/2k_B T)$$

$$= -\frac{d}{db} \left\{ \int_0^{\infty} -\frac{1}{2b} e^{-bv^2} \right\} = -\frac{d}{db} \left(\frac{1}{2b} \right) = \frac{1}{2b^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2k_B T}{m} \right)^2$$

$$\Rightarrow \langle v \rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{2k_B T}{m} \right)^2 = \dots = \sqrt{8k_B T / \pi m}$$

Dvs: $v_{\text{rms}} > \langle v \rangle$

- Lydbølger i en gass forplanter seg med hastighet

$$v_{\text{lyd}} = \sqrt{\gamma k_B T / m} \quad (\gamma = C_p / C_v = \text{adiabatkonst.})$$

dvs

$$\underbrace{v_{\text{rms}} \sim \langle v \rangle}_{\text{partikkelhastighet}} \sim \underbrace{v_{\text{lyd}}}_{\text{bølgehastighet}}$$

$$[\text{Luft ved } 300 \text{ K: } v_{\text{lyd}} \approx \sqrt{1.4 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 / 0.029 \cdot 6 \cdot 10^{-23}} \approx \underline{346 \text{ m/s}}]$$

$$\text{med } \gamma = 7/5 = 1.4 \quad \text{og} \quad m = 29 \text{ g/mol} = 0.029 \cdot 6 \cdot 10^{-23} \text{ kg pr molekyl}]$$

Statistisk mekanikk

[LHL 17.11; HS 9.2]

(101)

Kinetisk teori for ideell gass har vist oss at sannsynligheten for at en partikkel har energi E i et system ved temperatur T er

$$F(v) d^3v \sim e^{-E(v)/k_B T} d^3v$$

med $E(v) = K = \frac{1}{2} m v^2$

Dette er et spesialtilfelle av et generelt resultat:

Sannsynligheten for at en gitt partikkel, i et system ved temperatur T , har energi E , er proporsjonal med Boltzmann-faktoren

$$\exp\{-E/k_B T\}$$

Herav følger umiddelbart det såkalte

Klassiske ekvipartisjonsprinsippet:

[ekvi = lik ; partisjon = fordeling]

Hver frihetsgrad (dvs: uavhengig variabel) som bidrar kvadratisk i energifunksjonen E , bidrar med $\frac{1}{2} k_B T$ til midlere energi.

Bewis for "E.P.P." :

Se på generelt kvadratisk bidrag $E(s) = A s^2$

Da er, ifølge Boltzmann,

$$g(s)ds = C \cdot e^{-As^2/k_B T} ds$$

sanns. for at s skal ligge i $(s, s+ds)$.

Normering av sanns. gir

$$1 = C \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-As^2/k_B T} ds}_{= \sqrt{\pi/(A/k_B T)}} \Rightarrow C = \sqrt{\frac{A/k_B T}{\pi}}$$

$$\Rightarrow \langle E \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} E(s)g(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} A s^2 \sqrt{\frac{A}{\pi k_B T}} e^{-As^2/k_B T} ds$$

$$= \dots = \underline{\underline{\frac{1}{2} k_B T}} \quad [se s. 98] \quad \underline{ged.}$$

Eks: Hva blir U og C_V for ideell gass med N punktpartikler?
[Jf. eks. s. 94]

Løsning: $E = K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2$
dvs 3 kvadr. ledd (uavhengige!) pr partikkel
i energifunksjonen E (dvs: "3 kvadr. frihetsgrader")

Dermed, ifølge EPP: $\langle E \rangle = \frac{3}{2} k_B T$ pr partikkel

$$\Rightarrow U = N \langle E \rangle = \underline{\underline{\frac{3}{2} N k_B T}}$$

$$C_V = \partial U / \partial T = \underline{\underline{\frac{3}{2} N k_B}} = \underline{\underline{\frac{3}{2} n R}}$$

Kvantemekanikk ("QM") og partisjonsfunksjonen (Z)

103

Ifølge klassisk mekanikk (Newtonmekanikk) kan målbare fysiske størrelser (f.eks. impuls \vec{p} , dreieimpuls \vec{L} , energi E) for et gitt system ha alle mulige verdier, dvs de er kontinuerlige størrelser.

Ifølge kvantemekanikk (QM) kan målbare fysiske størrelser for et gitt system bare ha bestemte verdier, dvs de er kvantiserte størrelser.

Eks: Elektronet i et hydrogenatom har energi

$$E_j = -E_0 / j^2 \quad \text{med } E_0 \approx 13.6 \text{ eV og } j = 1, 2, 3, \dots$$

Generelt for et "kvantemekanisk system":

Tillatte energinivåer er E_1, E_2, E_3, \dots

Systemet kan beskrives med klassisk mekanikk hvis temp. T er "tilstrekkelig høy", dvs hvis termisk energi $k_B T$ er stor i forhold til avstanden mellom energinivåene:

$$k_B T \gg \Delta E ; \quad \Delta E = E_j - E_{j-1}$$

Vi er da i "den klassiske grensen", og energien kan betraktes som en kontinuerlig funksjon (av hastigheter etc.). Vi er ikke lenger i stand til å måle at energien er kvantisert.

Hvis vi nå har et QM system, vil sanns. for at en gitt partikkel har energien E_j (ifølge Boltzmann!) være:

$$\pi_j = C \cdot e^{-E_j/k_B T} \quad j=1,2,3,\dots$$

[Merk at med kvantiserte verdier E_j blir sannsynligheten "endelig" (dvs: ikke lik null) for en bestemt energi. Med kontinuerlig E blir sanns. strengt tatt lik null for en bestemt energiverdi; vi må betrakte et lite intervall for å kunne snakke om en endelig sannsynlighet.]

Normering: $1 = \sum_j \pi_j = C \cdot \sum_j e^{-E_j/k_B T}$

$$\Rightarrow C = \left\{ \sum_j e^{-E_j/k_B T} \right\}^{-1}$$

Partisjonsfunksjonen (Tilstandssum; "Zustandsum") :

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j e^{-E_j/k_B T}$$

Dermed:

$$\pi_j = \frac{1}{Z} e^{-E_j/k_B T} = \frac{e^{-E_j/k_B T}}{\sum_j e^{-E_j/k_B T}}$$

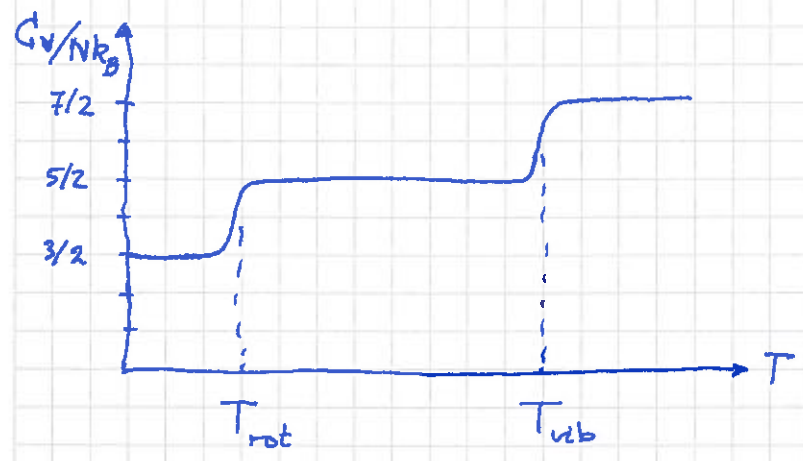
= sanns. for å måle ("finne") gitt partikkel, i system med temp. T , med energi E_j

Toatomige molekyler



Eks: O_2, H_2, HCl

C_{V} eksperimentelt:

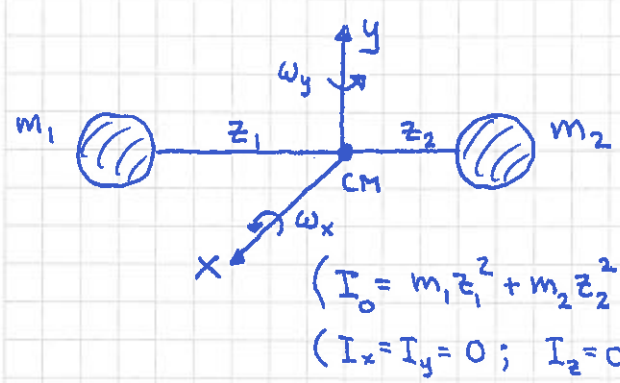


	T_{rot}	T_{vib} (K)
O_2	2.1	2230
N_2	2.9	3340
H_2	85.4	6210

Hvordan kan vi forklare den målte $C_V(T)$?

Trenger et par QM-resultater og litt stat. mek.

Rotasjon av toatomig molekyl:



$$K_{rot} = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} I_0 (\omega_x^2 + \omega_y^2)$$

$$\vec{L} = I_0 \vec{\omega} \Rightarrow \omega^2 = L^2 / I_0$$

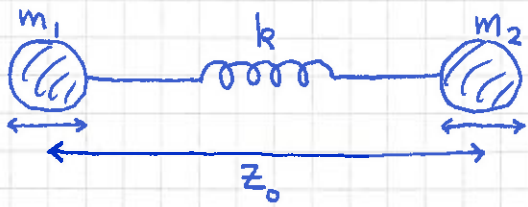
$$\Rightarrow K_{rot} = \frac{L^2}{2I_0}$$

Klassisk: kontinuerlig dreieimpuls L (alle verdier er mulig)

QM: $L^2 = l(l+1) \hbar^2$; $l = 0, 1, 2, \dots$; $\hbar = h/2\pi = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ (Plancks konstant)

$$\Rightarrow K_{rot}^{(l)} = l(l+1) \frac{\hbar^2}{2I_0}; \quad \dots$$

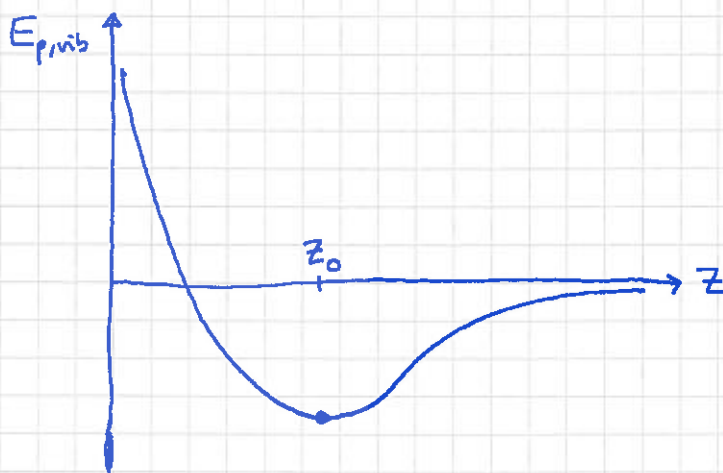
Vibrasjon i toatomig molekyl:



I molekylets CM-system (dvs der CM er i ro) er det ingen translasjon av molekylet, men derimot kin.energi knyttet til rotasjon om CM (K_{rot} , se s. 105), og vibrasjon, K_{vib} , som skyldes at m_1 og m_2 svinger fram og tilbake omkring sine likevektsposisjoner.

Bindingen mellom m_1 og m_2 skyldes vekselvirkningen mellom dem. Denne kan beskrives med en potensiell energi

$E_{p,vib}$, som inneholder en sterk frastøtende kraft hvis avstanden z mellom m_1 og m_2 blir mindre enn likevektsavstanden z_0 , og en svakere tiltrekkende kraft hvis z blir større enn z_0 :



[Kvalitativt samme som for atomer og molekyler som ikke danner kjemisk binding, jf. van der Waals tilstandsligning, s. 69 og 70.]

For vibrasjon med liten amplitude er z hele tiden nær z_0 , og vi kan tilnærme $E_{p,vib}$ med harmonisk oscillator:

$$E_{p,vib} \approx \frac{1}{2} k (z - z_0)^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 (z - z_0)^2 \quad [\omega^2 = k/m]$$

Her er $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ molekylets "reduuerte masse". (107)

I tillegg kommer kinetisk vibrasjonsenergi,

$$K_{\text{vib}} = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2,$$

der z_1 og z_2 er avstanden fra CM til hhv m_1 og m_2 , se figur s. 105. Dette kan ved første øyeblikk se ut som to kvadratiske bidrag til K_{vib} , men her er \dot{z}_1 og \dot{z}_2 ikke uavhengige variable: Siden CM er i ro i $z=0$ i CM-systemet, er $m_1 z_1 + m_2 z_2 = 0$, dvs $\dot{z}_2 = -(m_1/m_2) \dot{z}_1$, altså ikke uavhengige variable. Dermed representerer K_{vib} bare ett kvadratisk bidrag til total energi:

$$K_{\text{vib}} = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(-\frac{m_1}{m_2} \dot{z}_1\right)^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_2} \dot{z}_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 \cdot \frac{m_1}{m}$$

$$\text{(evt. } K_{\text{vib}} = \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2 \cdot \frac{m_2}{m} \text{)}$$

Hvis $m_1 = m_2$, er $m = m_1/2$, og $K_{\text{vib}} = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 \cdot 2$, OK.

Hvis $m_2 \gg m_1$, er $m \approx m_1$, og $K_{\text{vib}} \approx \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2$, OK. [$m_2 \approx$ uregg!]

Klassisk: ingen restriksjoner på total energi $E = K_{\text{vib}} + E_{p,\text{vib}}$,
dvs kontinuerlig energifunksjon E

$$\text{QM: } E_{\text{vib}}^{(j)} = (j + 1/2) \hbar \omega \quad ; \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$\omega^2 = \left\{ \frac{d^2 E_{p,\text{vib}}}{dz^2} \right\}_{z=z_0} / m$$

Med klassisk mekanikk forventer vi nå følgende for våre toatomige molekyler: Vi har 7 uavhengige kvadratiske ledd i energifunksjonen pr molekyl:

$$\text{Translasjon: } K_{\text{trans}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{2} k_B T \text{ pr molekyl}$$

$$\text{Rotasjon: } K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 = \frac{1}{2} I_0 (\omega_x^2 + \omega_y^2)$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} k_B T \text{ pr molekyl}$$

[Merk: Ikke noe bidrag til K_{rot} pga rotasjon om z-aksen, ω_z , fordi treghetsmomentet I_z mhp z-aksen er lik null for to punktpartikler som ligger på z-aksen.]

$$\text{Vibrasjon: } E_{\text{vib}} = K_{\text{vib}} + E_{p,\text{vib}}, \text{ med}$$

$$K_{\text{vib}} = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 \cdot \frac{m_1}{m}, \quad E_{p,\text{vib}} = \frac{1}{2} m \omega^2 (z - z_0)^2$$

$(z = z_2 - z_1)$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} k_B T \text{ pr molekyl}$$

$$\Rightarrow U_{\text{klassisk}} = N \cdot \frac{7}{2} k_B T$$

$$\Rightarrow C_V^{\text{klassisk}} = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{7}{2} N k_B = \frac{7}{2} n R$$

Fra $C_V(T)$ s. 105 ser vi at dette kun stemmer for riktig høye temperaturer, $T > T_{\text{vib}}$.

Oppklaring med kvantemekanikk:

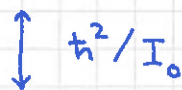
$$K_{\text{rot}}^{(l)} = l(l+1) \hbar^2 / 2I_0 = 0, 2\hbar^2/2I_0, 6\hbar^2/2I_0, 12\hbar^2/2I_0, \dots$$

$l=3$ _____

$l=2$ _____

$l=1$ _____

$l=0$ _____



Hvis $k_B T \ll \hbar^2 / I_0$, er det ikke nok termisk energi tilgjengelig til å eksitere molekylenes rotasjonsbevegelse.

Da vil $\pi_0^{\text{rot}} = Z_{\text{rot}}^{-1} \cdot \exp(-K_{\text{rot}}^{(0)} / k_B T) \approx 1$

(og $\pi_l^{\text{rot}} \approx 0$ for $l=1, 2, \dots$), dvs alle molekylene

har rotasjonsenergi $K_{\text{rot}}^{(0)} = 0$. Alle molekylene er i

grunntilstanden ($l=0$) med hensyn på rotasjon, og

vi sier at rotasjonsfrihetsgradene er frosset ut.

Men da blir K_{rot} uavhengig av T , dvs $\Delta K_{\text{rot}} / \Delta T = 0$,

dvs selv om vi øker temperaturen med ΔT , blir det ingen

endring i K_{rot} ! Da bidrar K_{rot} ikke til C_V !

Det klassiske ekuipartisjonspriippet bryter sammen!

Tilsvarende: $E_{\text{vib}}^{(j)} = (j + 1/2)\hbar\omega = \frac{1}{2}\hbar\omega, \frac{3}{2}\hbar\omega, \frac{5}{2}\hbar\omega, \dots$

$j=2$ _____

$j=1$ _____

$j=0$ _____



Hvis $k_B T \ll \hbar\omega$, er $\pi_0^{\text{vib}} \approx 1$, og alle

molekyler i grunntilstanden ($j=0$) mhp

vibrasjon. Og E_{vib} bidrar ikke til C_V .

Hvis derimot $T \gtrsim T_{\text{rot}}$, vil K_{rot} gi bidrag $2 \cdot \frac{1}{2} k_B T$ til $\frac{U}{N}$, og hvis $T \gtrsim T_{\text{vib}}$, vil E_{vib} gi bidrag $2 \cdot \frac{1}{2} k_B T$ til $\frac{U}{N}$. (110)

Translasjon fryses ikke ut for $T \approx 0$. Dermed blir $G_V = \frac{3}{2} N k_B$ fra $T \approx 0$ til $T \sim T_{\text{rot}}$, $\frac{5}{2} N k_B$ mellom T_{rot} og T_{vib} , og $\frac{7}{2} N k_B$ for $T \gtrsim T_{\text{vib}}$.

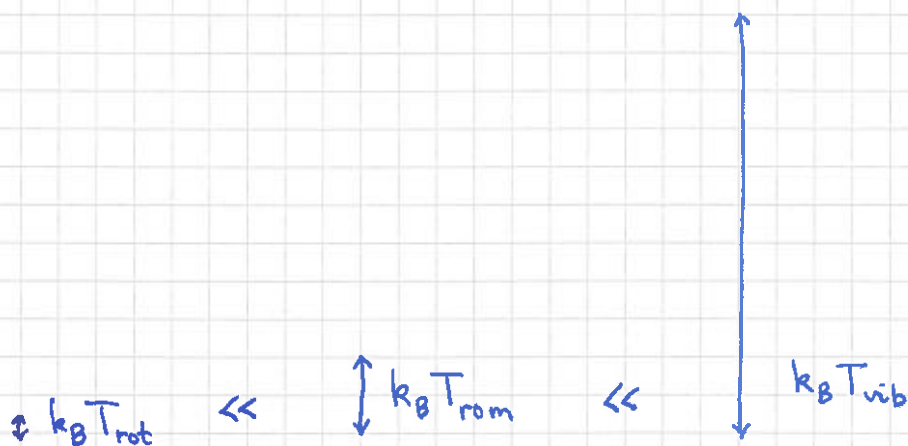
Dvs, $G_V(T)$ for toatomige molekyler er forklart!

Tallmessig er det enkelt å estimere I_0 for ulike molekyler, ved å slå opp/google bindingslengder og atommasser. Dette gir estimater for $T_{\text{rot}} \sim [K_{\text{rot}}^{(1)} - K_{\text{rot}}^{(0)}] / k_B$, som stemmer noenlunde med tall gitt på s. 105.

Vibrasjonsfrekvensen ω er bestemt av krumningen til E_{vib} samt atomenes masse.

Typisk er $\hbar\omega$ for vibrasjonsbevegelsen mye større enn \hbar^2/I_0 for rotasjonsbevegelsen.

Ved romtemperatur vil som regel rotasjonsbevegelsen være eksitert ($T_{\text{rot}} \ll T_{\text{rom}} \sim 300 \text{ K}$), mens vibrasjonsbevegelsen typisk er frosset ut ($T_{\text{vib}} \gg T_{\text{rom}}$):



2. hovedsetning [YF 20; LHL 16-17; HS 12] (III)

Da er vi tilbake i "termodynamikkens verden", og vi skal se nærmere på hva slags prosesser som er mulige og umulige i vår "makroskopiske hverdag".

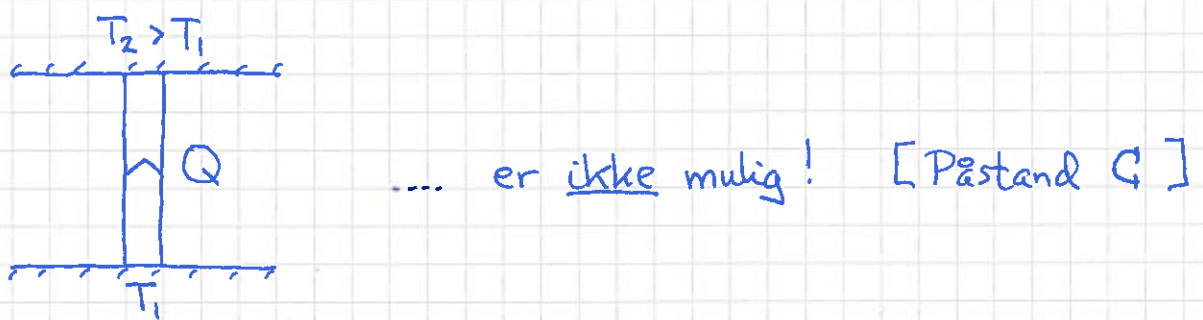
2. hovedsetning er en empirisk lov (dvs en "erfaringssak") som kan formuleres på ulike måter.

Kelvins formulering av 2. lov:



Dvs: Prosesser der eneste resultat er at varme Q avgis fra et varmereservoar og omsettes i sin helhet i arbeid W , er ikke mulig.

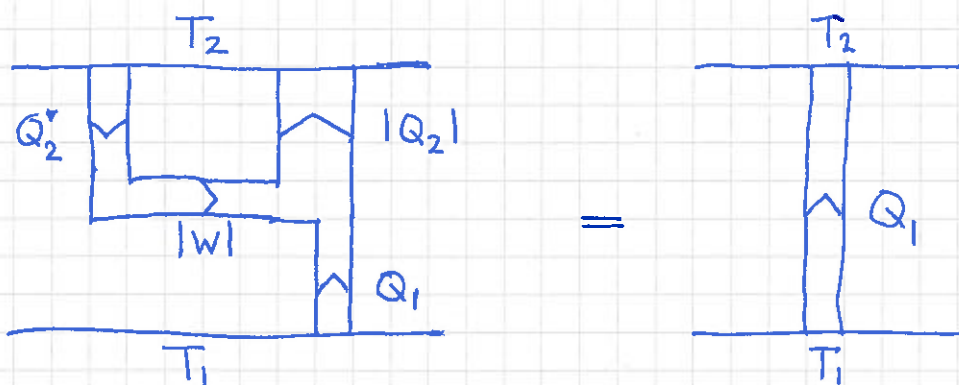
Clausius' formulering av 2. lov:



Dvs: Prosesser der eneste resultat er at varme Q overføres fra et varmereservoar med temp. T_1 til et varmeres. med temp. $T_2 > T_1$, er ikke mulig.

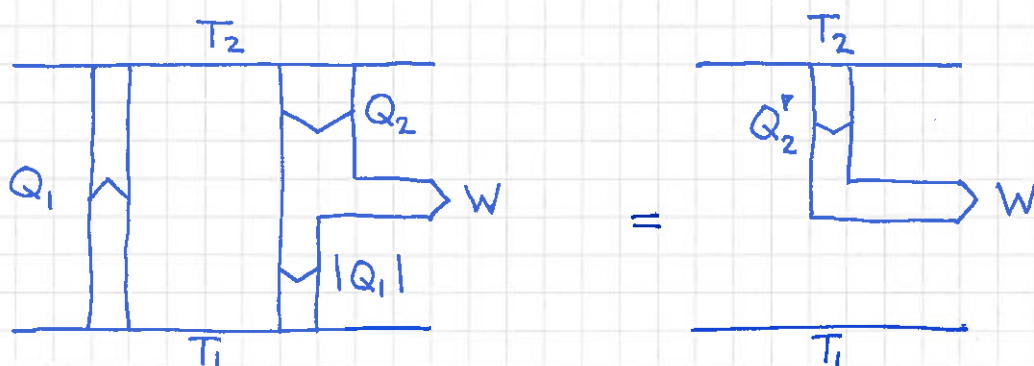
Det er lett å vise at $K \Leftrightarrow C$:

(1/2)



\bar{K} + Kjøleskap (mulig!) = \bar{C} (Clausius tar feil)
 (Kelvin tar feil)

Dvs: $\bar{K} \Rightarrow \bar{C}$; hvis Kelvin tar feil, tar også Clausius feil



\bar{C} + varmekraftmaskin (mulig!) = \bar{K}

Dvs: $\bar{C} \Rightarrow \bar{K}$; hvis Clausius tar feil, tar også Kelvin feil

Alt i alt : $\bar{K} \Leftrightarrow \bar{C}$

Men hvis "ikke K" er ekvivalent med "ikke C",
 må også K være ekvivalent med C :

$K \Leftrightarrow C$

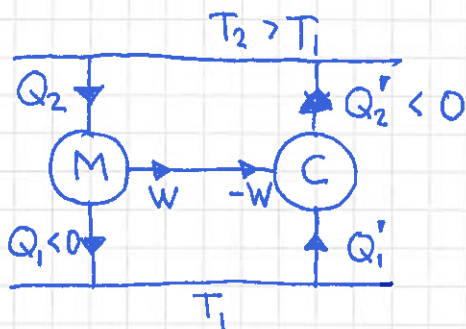
Carnots teorem [YF 20.6; LHL 16.2; HS 12.2]

113

Carnotprosessen virkningsgrad, $\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_2}$, er optimal

(som vi tidligere bare har slått fast)

Bewis:



Her er:

- C = en reversibel Carnot-maskin med ideell gass som "arbeidssubstans"; da er $\eta_c = |W|/|Q_2'| = |Q_2' + Q_1'|/|Q_2'| = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ = virkningsgrad når maskinen brukes som varmekraftmaskin (*)
- M = en vilkårlig Carnot-maskin, dvs ikke nødv.is reversibel, og ikke nødv.is med ideell gass som arbeidssubstans

(*) I figuren brukes C som kjøleskap/varmepumpe, men siden den er reversibel, kan vi snu pilene, og da har vi en varmekraftmaskin med virkningsgrad $\eta_c = |W|/|Q_2'| = \dots = 1 - \frac{T_1}{T_2}$.

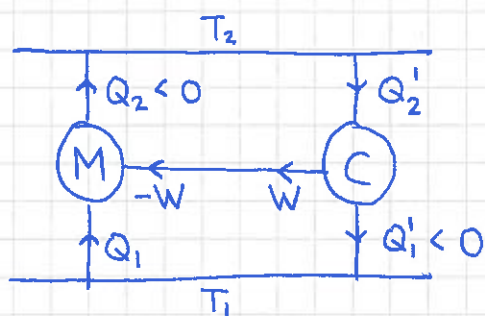
Totalt gjør M+C ikke arbeid på omgivelsene ($W - W = 0$), dvs vi har kun overføring av varme mellom de to varmereservoarene.

2. hovedsetning sier da at netto varme må overføres fra høytemp.- til lavtemp.reservoaret, dvs $\Delta Q = Q_2 + Q_2' = |Q_2| - |Q_2'| \geq 0$.

$$\Rightarrow |Q_2| \geq |Q_2'| \Rightarrow |W|/|Q_2| \leq |W|/|Q_2'| \Rightarrow \eta_M \leq \eta_c,$$

som vi skulle vise.

Anta nå at M også er reversibel, men fremdeles med en vilkårlig arbeidssubstans. Da kan både C og M reverseres:



2. hovedsetning krever nå at $|Q_2'| \gg |Q_2|$, dvs $|W|/|Q_2'| \leq |W|/|Q_2|$, dvs $\eta_c \leq \eta_M$.

Konklusjon: $\eta_M = \eta_c$ hvis M er reversibel!

⇒

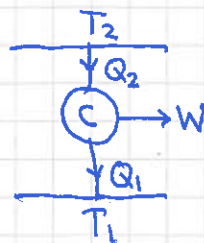
Alle reversible Carnotmaskiner, uansett hva slags arbeidssubstans de benytter, har den maksimalt virkningsgraden $\eta = \eta_c = 1 - T_1/T_2$.

[I parentes bemerket:

Dette gir en alternativ definisjon av størrelsen temperatur, den såkalte "termodynamiske def. av temp.":

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 - \eta_c = \left| \frac{Q_1}{Q_2} \right| \text{ for en vilkårlig reversibel}$$

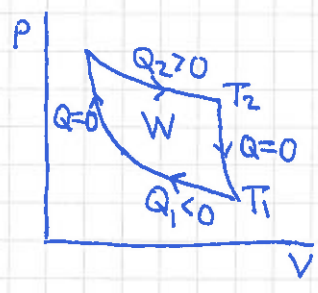
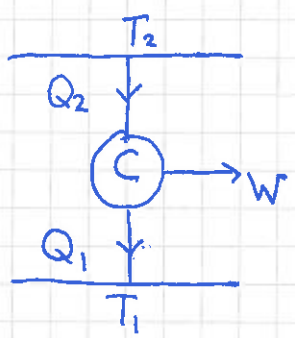
Carnot - varmekraftmaskin



]

Clausius' ulikhet [LHL 17.1 ; HS 12.5]

Vi ser igjen på en reversibel Carnotprosess:



$$\eta_c = W/Q_2 = (Q_2 + Q_1)/Q_2 = 1 + \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Omskriving gir at

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad \text{for en reversibel Carnotprosess}$$

For reelle maskiner som opererer syklisk mellom to varmereservoarer ved T_1 og $T_2 > T_1$:

$$\eta < \eta_c \Rightarrow 1 + \frac{Q_1}{Q_2} < 1 - \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0$$

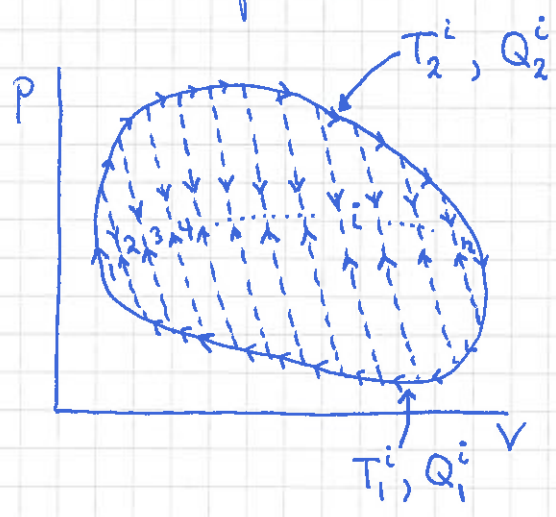
Så uansett, dvs for alle slike prosesser:

$$\boxed{\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0}$$

Clausius' ulikhet

Vi ser med andre ord at størrelsen "tilført, evt. avgitt, varme dividert med temperaturen som varmen tilføres eller avgis ved" dukker opp som en "interessant størrelse". En størrelse med samme enhet som en varmekapasitet, men dog ikke helt det samme som en varmekapasitet, som jo er "tilført varme dividert med endringen i systemets temperatur".

Vi kan generalisere Clausius' ulikhet til å gjelde for en wilkårlig kretsprosess ved å oppfatte den wilkårlige kretsprosessen som en sum av mange "små" Carnotprosesser:



Her er vår "wilkårlige" kretsprosess den ytre heltrukne kurven. Når vi nå har tegnet den som heltrukken, har vi strengt tatt allerede sagt at den er reversibel, men la oss også inkludere irreversible kretsprosesser i diskusjonen!

Alle stiplede prosesser i figuren representerer nå adiabatiske prosesser ($Q=0$). Da er prosess nr i en Carnotprosess (med tilnærmede isotermer øverst og nederst, med temp. hhv T_2^i og T_1^i , der systemet ^{hver} mottar varme Q_2^i og avgir varme Q_1^i), og det er også alle de andre små prosessene (1, 2, ..., n).

For hver av disse kan vi nå bruke Clausius' ulikhet,

$$\frac{Q_1^i}{T_1^i} + \frac{Q_2^i}{T_2^i} \leq 0, \quad \text{som betyr at også}$$

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{Q_1^i}{T_1^i} + \frac{Q_2^i}{T_2^i} \right\} \leq 0$$

Etttersom alle indre (stiplede) adiabatler "kjøres" både opp og ned, blir nettoprosessen av alle n små-prosesser

Nettopp den ytre heltrukne prosessen som vi ønsker å si noe om. Lar vi $n \rightarrow \infty$, må vi erstatte $\sum_{i=1}^n$ med \oint , dvs et integral, og der ringen på integraltegnet angir at vi integrerer rundt en lukket kurve (= den ytre heltrukne prosessen):

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

Clausius' ulikhet for vilkårlige kretsprosesser

Hvis kretsprosessen er reversibel, vil likhetstegnet gjelde for alle små-prosessene,

$$\frac{Q_1^i}{T_1^i} + \frac{Q_2^i}{T_2^i} = 0,$$

som gir resultatet

$$\oint \frac{dQ_{rev}}{T} = 0$$

For vilkårlig reversibel kretsprosess

Tilstandsfunksjonen entropi [YF 20.7; LHL 17.1; HS 12.3]

Fra før (s.78, 85) vet vi at dersom

$$\oint dS = 0 \quad \text{for størrelsen } S,$$

så er S en tilstandsfunksjon, dvs bestemt ved systemets termodyn. tilstand, og dS er et såkalt totalt differensial.

Her har vi nå vist at

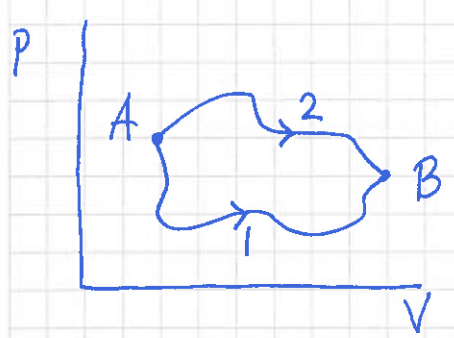
$$\oint \frac{dQ_{rev}}{T} = 0,$$

slik at størrelsen $dQ_{rev}/T \equiv dS$ er et totalt differensial av tilstandsfunksjonen

$$S = \text{systemets entropi}$$

Enhet: $[S] = J/K$

Det at S er en tilstandsfunksjon, betyr at endringen i entropi, $\Delta S = S_B - S_A$, blir den samme for alle mulige reversible prosesser mellom tilstand A og tilstand B:

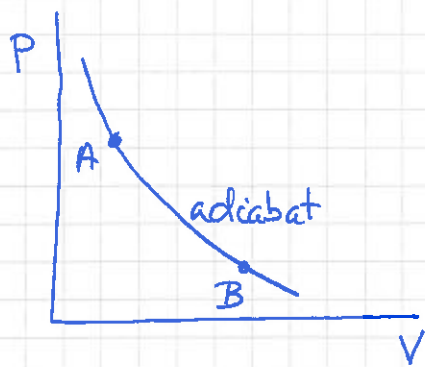


$$0 = \oint dS = \left(\int_A^B dS\right)_1 + \left(\int_B^A dS\right)_2 = \left(\int_A^B dS\right)_1 - \left(\int_A^B dS\right)_2$$

$$\Rightarrow \left(\int_A^B dS\right)_1 = \left(\int_A^B dS\right)_2 = S_B - S_A \text{ (ged)}$$

For en reversibel og adiabatisk prosess:

(119)



$$dQ = T dS = 0 \quad \text{langs hele veien}$$

$$\Rightarrow dS = 0 \quad \text{---||---}$$

$$\Rightarrow S_B = S_A$$

Kaller derfor adiabatiske prosesser for isentropiske prosesser.

[Dvs: termisk isolert \equiv varmeisoleret \equiv adiabatisk \equiv isentropisk]

Nå kan 1. hovedsetning (dvs energibevarelse) uttrykkes utelukkende med tilstandsvariable og -funksjoner:

$$dQ = T dS; \quad dW = p dV$$

[reversibel varmeutveksling]

[reversibelt " $p dV$ -arbeid"]

\Rightarrow

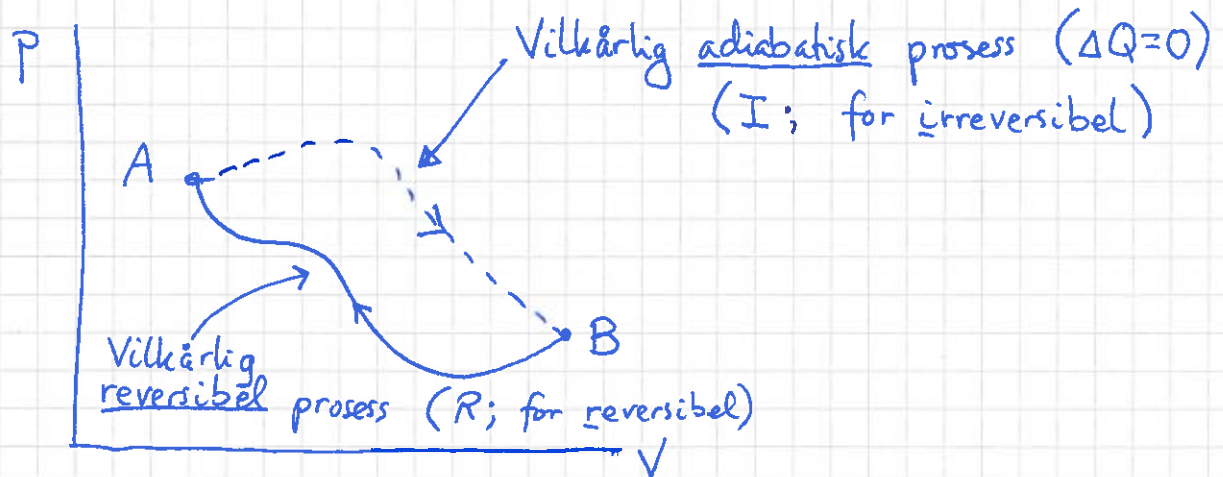
$$\boxed{T dS = dU + p dV}$$

Den termodynamiske identitet

Prinsippet om entropiens økning [YF 20.7; LHL 17.3; HS 12.5] (120)

$\Delta S \geq 0$ for alle prosesser i et termisk isolert system

Bewis:



$$\left\{ \int_A^B \frac{dQ}{T} \right\}_I = 0, \text{ ganske enkelt fordi prosessen er } \underline{\text{adiabatisk}} \text{ (men forøvrig vilkårlig)}$$

$$\left\{ \int_B^A \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} \right\}_R = S_A - S_B, \text{ pr. def. for } \underline{\text{reversible}} \text{ prosesser}$$

$$\text{Clausius' ulikhet: } \oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

Dermed: $S_B = S_A$ hvis I er reversibel og adiabatisk

$S_B > S_A$ — " — irreversibel — " —

$\Rightarrow \Delta S \geq 0$ for alle ("adiabatisk") varmeisolerende systemer (ged)

Eksempler på beregning av entropi

(121)

① Faseovergang

Da er $T = \text{konstant}$ og $Q = L = \text{latent varme}$

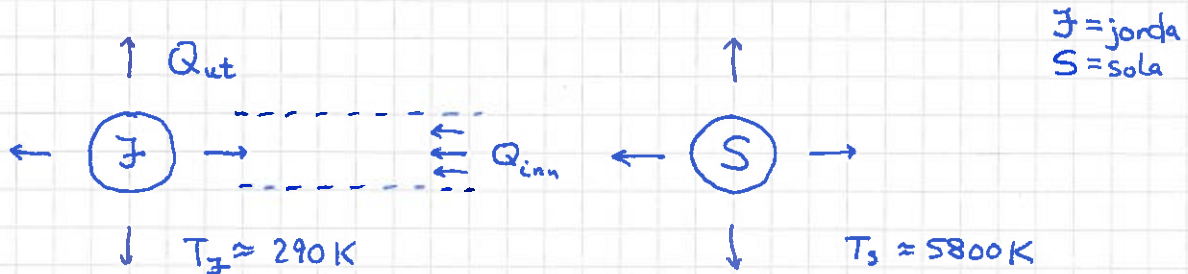
$\Rightarrow \Delta S = L/T > 0$ for $f \rightarrow v$ (smelting) og $v \rightarrow g$ (fordamping)

$\Delta S = -L/T < 0$ for $v \rightarrow f$ (størkning) og $g \rightarrow v$ (kondensasjon)

Dvs: $S_g > S_v > S_f$ i tråd med at " $\Delta S > 0$ betyr mer uorden"

② Jorda

Dette er ikke et termisk lukket system, så alt er mulig!



Siden $T_J \approx \text{konst.}$ må vi ha $Q_{\text{ut}} \approx Q_{\text{inn}}$ (energibalanse)

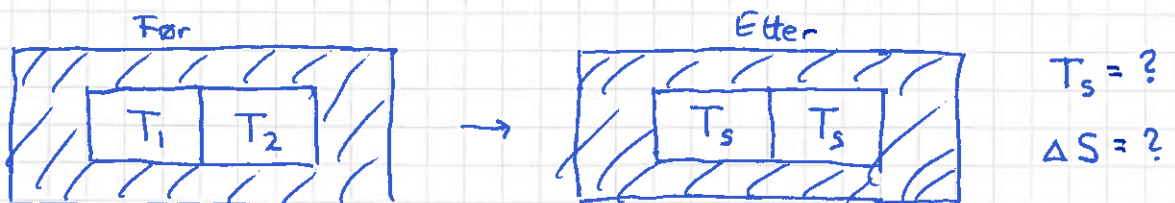
Men $S_{\text{ut}} / S_{\text{inn}} = [Q_{\text{ut}} / T_J] / [Q_{\text{inn}} / T_S] \approx T_S / T_J \approx 20,$

så jorda eksporterer mye mer entropi enn den importerer.

Dvs, det er rom for at vi "roter" en del uten at jordas entropi stadig øker!

③ Temperaturutjevning

Ser på to like metallklosser i termisk kontakt med hverandre, men termisk isolert fra omgivelsene:



Løsning:

$$TdS = dU + p dV \Rightarrow dS = dU/T + p dV/T$$

Her er $dV = 0$, slik at $dU = (\partial U/\partial T)_V dT = C_V dT$

$$\Rightarrow dS = C_V dT/T \Rightarrow S = C_V \ln T + B \quad (B = \text{konst.})$$

Det er vel klart at $T_s = (T_1 + T_2)/2$: Klossene er like, så $C_V = |\Delta Q/\Delta T|$ er den samme for de to klossene. Avgitt varme fra den ene klossen må tilsvare absorbert varme i den andre, dvs $|\Delta T|$ er også den samme for de to klossene.

Anta f.eks. $T_1 > T_2$; da er $T_s = T_1 - \Delta T$ og $T_s = T_2 + \Delta T$, dvs $T_s = (T_1 + T_2)/2$.

Da kan vi bestemme entropiendringen:

$$\text{Før: } S_1 = C_V \ln T_1 + B, \quad S_2 = C_V \ln T_2 + B$$

$$S_{\text{før}} = S_1 + S_2 = C_V \ln T_1 T_2 + 2B$$

$$\text{Etter: } S_{\text{etter}} = 2 \{ C_V \ln T_s + B \} = C_V \ln T_s^2 + 2B$$

$$\Rightarrow \Delta S = S_{\text{etter}} - S_{\text{før}} = C_V \ln [T_s^2 / T_1 T_2]$$

$$= \underline{\underline{C_V \ln [(T_1 + T_2)^2 / 4 T_1 T_2]}}$$

$$= C_V \ln [1 + (T_1 - T_2)^2 / 4 T_1 T_2]$$

der siste linje viser at $\Delta S > 0$: Dvs at en slik "uforskyrmet" temperaturutjevningsprosess er irreversibel.

Merk at vi har benyttet oss av at hele systemet er termisk isolert, slik at $\Delta Q_1 = -\Delta Q_2$, og vi kunne fastlegge T_s .

Videre er beregningen basert på reversibel termodynamikk (dvs $TdS = dU + p dV$ osv.), som til slutt gir oss et resultat som vi kan bruke til å si noe om en irreversibel prosess!

④ Generell dS

123

Dvs: Med bidrag både fra temperaturendring dT og volumendring dV .

Vi skal utlede at

$$dS = C_V dT/T + (\partial p/\partial T)_V dV$$

for en vilkårlig reversibel prosess, der $S = S(T, V)$.

[Husk: Vi kan alltid bruke tilstandsligningen til å uttrykke p som en funksjon av V og T , og dermed eliminere p i $S(T, V, p)$.]

Med $U = U(T, V)$ og $S = S(T, V)$ har vi, helt generelt,

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV$$

Dessuten, fra 1. lov:

$$dS = \frac{1}{T} (dU + p dV) = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + \frac{1}{T} p dV$$

Sammenligning av disse to uttrykkene for dS gir nå

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \quad \text{og} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p \right]$$

"Trikset" består nå i å benytte seg av at

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V},$$

dvs uavhengig av derivasjonsrekkefølgen. Vi tar $\frac{\partial}{\partial V}$ av

$\frac{\partial S}{\partial T}$ og $\frac{\partial}{\partial T}$ av $\frac{\partial S}{\partial V}$ og setter lik hverandre:

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} = -\frac{1}{T^2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p \right] + \frac{1}{T} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \right]$$

Her kan den 2. derivate av U strykes på begge sider, og vi har

(124)

$$0 = -\frac{1}{T^2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V,$$

ders

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V,$$

som betyr at

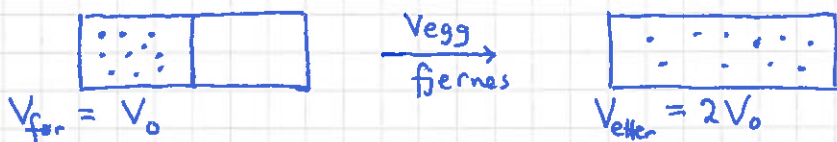
$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

Fra forrige eksempel (og fra før!) er $\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = C_V$, så
alt i alt:

$$dS = C_V \frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV$$

som vi skulle vise. For isoterm prosess ($dT=0$) blir dette $dS = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV$, og for isokor prosess ($dV=0$, som i eks. ③) $dS = C_V dT/T$.

⑤ Isoterm utvidelse av ideell gass



Anta at systemet er termisk isolert fra omgivelsene. Da er $\Delta Q=0$ og $\Delta W=0$ (intet arbeid gjøres her!), og 1. lov gir $\Delta U=0$, ders $T = \text{konstant}$ for ideell gass ($U = U(T)$).

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} (Nk_B T/V) = Nk_B/V \Rightarrow dS = Nk_B dV/V$$

$$\Rightarrow \Delta S = Nk_B \int_{V_{\text{før}}}^{V_{\text{etter}}} dV/V = \underline{\underline{Nk_B \ln \left(\frac{V_{\text{etter}}}{V_{\text{før}}} \right)}} \stackrel{\text{her}}{=} Nk_B \ln 2$$

Mikroskopisk tolkning av entropi

(125)

[YF 20.8; LHL 17.11; HS 12.6]

Vi har sett hvordan statistisk mekanikk gir oss oppskriften på beregning av indre energi for et system med N partikler (s. 101-104).

Med andre ord, statistisk mekanikk representerer koblingen mellom den makroskopiske termodynamikken og den mikroskopiske partikkeldynamikken.

Her skal vi ikke utlede sammenhengen mellom mikro- og makrofysikk for andre termodynamiske størrelser, men basert på det vi har gjort (s. 101-104), er det vel allerede sannsynliggjort at man kan finne slike sammenhenger, også for størrelser som entropi osv.

Boltzmann viste hvordan entropien skulle uttrykkes med utgangspunkt i statistisk mekanikk:

$$S = k_B \ln W$$

Her er

W = antall ulike mikroskopiske tilstander ("konfigurasjoner") som er forenlige ("konsistente") med en gitt makroskopisk tilstand, karakterisert ved f.eks. systemets indre energi.

[NB NB: Her er W ikke et arbeid !! Historien dikterer nærmest å bruke symbolet W , til tross for potensiell forvirring!]

Eks: Isoterm utvidelse av ideell gass

(126)



(dvs: som eks. ⑤ på s. 124)

Her er volumet strengt tatt en kontinuerlig størrelse, men vi kan tenke oss at vi deler inn V_0 i et stort antall delvolum Δ , $V_0 = M \cdot \Delta$, slik at M representerer antall mulige posisjoner for hver partikkel.

Med N partikler, og ideell gass, dvs uavhengige partikler, gir dette i alt M^N ulike "mikro-konfigurasjoner", dvs $W_{\text{før}} = M^N$. Med Boltzmanns resultat har vi nå:

$$S_{\text{før}} = k_B \ln W_{\text{før}} = k_B \ln M^N = N k_B \ln M = N k_B \ln \frac{V_0}{\Delta}$$

$$S_{\text{etter}} = k_B \ln W_{\text{etter}} = k_B \ln (2M)^N = N k_B \ln 2M = N k_B \ln \frac{2V_0}{\Delta}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta S &= S_{\text{etter}} - S_{\text{før}} = N k_B \ln \frac{2V_0}{\Delta} - N k_B \ln \frac{V_0}{\Delta} \\ &= N k_B \ln \frac{2V_0 \cdot \Delta}{V_0 \cdot \Delta} = \underline{\underline{N k_B \ln 2}} \end{aligned}$$

Dvs: Presis det samme som vi fant med termodynamikk i eks. ⑤ s.124 !!

Med Boltzmanns $S = k_B \ln W$ er utsagnet "økt entropi betyr økt uorden" mer presist formulert.

Vi forstår nå at "naturlige prosesser" i naturen går i en bestemt retning, ut fra et rent statistisk argument, en retning som tilsvarer at entropien S øker.

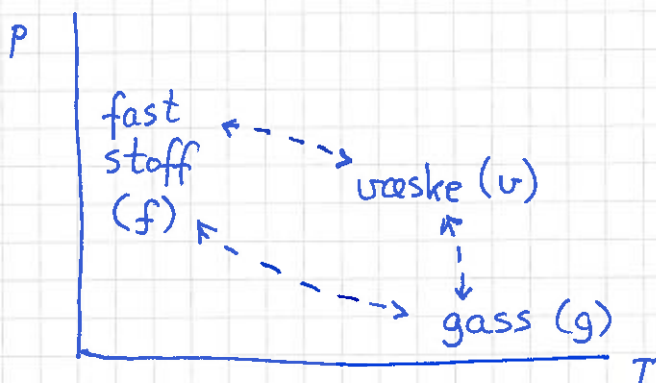
\Rightarrow 1. og 2. lov kort oppsummert: Energien er bevart. Entropien øker.

Faseoverganger

[YF 17.6, 18.6; LHL 17.10; HS 10+12]

127

Basert på "almenkunnskap":



Men: Hvordan fastlegge koeksistenslinjene, dvs der to ulike faser er i likevekt, dvs der faseoverganger finner sted?

Clapeyrons ligning for koeksistenslinjene:

$$\boxed{\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T \cdot \Delta V}}$$

L = latent varme, T = temp., ΔV = volumendring

[Generelt er $L = L(T)$ og $\Delta V = \Delta V(T)$]

Beris:

$$G \stackrel{\text{def}}{=} U + pV - TS = \text{Gibbs' fri energi}$$

$$\Rightarrow dG = dU + p dV + V dp - T dS - S dT$$

$$= V dp - S dT \quad (\text{siden } T dS = dU + p dV)$$

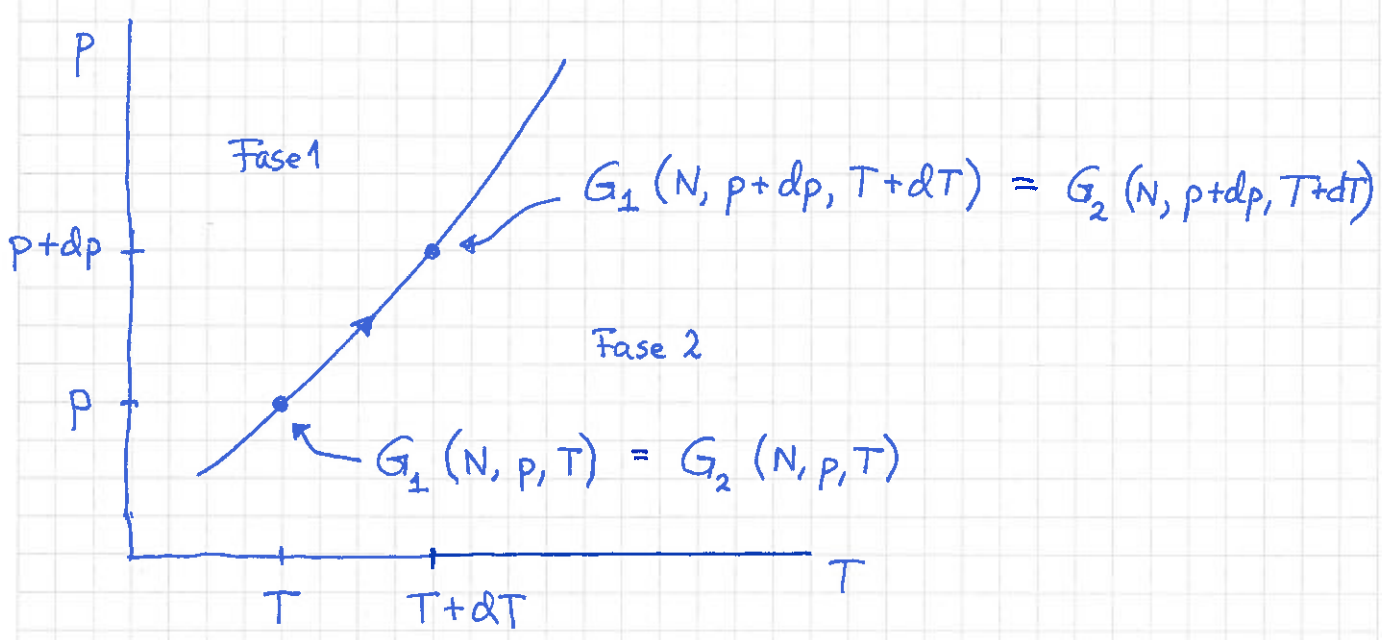
Koeksistens $\hat{=}$ fase 1 og 2 i likevekt ved gitt p og T.

$\Rightarrow dp=0$ og $dT=0$ når $N_1 \rightarrow N_1 + dN_1$ og $N_2 \rightarrow N_2 + dN_2 = N_2 - dN_1$

$\Rightarrow \boxed{dG = 0}$ _____ || _____

↑ Koeksistenskriterium for 2 faser ved gitt p og T

Dette må gjelde for hele koeksistenslinjen:



Dvs: Endringen i G er like stor for N molekyler i fase 1 som i fase 2, for gitt dp og dT langs koeksistenslinjen

$\Rightarrow dG_1 = dG_2$

$\Rightarrow V_1 dp - S_1 dT = V_2 dp - S_2 dT$

$\Rightarrow \frac{dp}{dT} = \frac{S_2 - S_1}{V_2 - V_1} = \frac{\Delta Q_{1 \rightarrow 2} / T}{\Delta V} = \frac{L/T}{\Delta V}$

} langs koeksistenslinjen

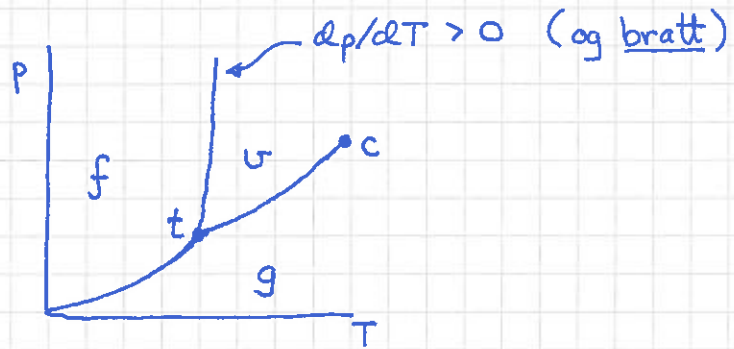
ged

$v \rightarrow g : L_f > 0, \Delta V > 0 \Rightarrow dp/dT > 0$

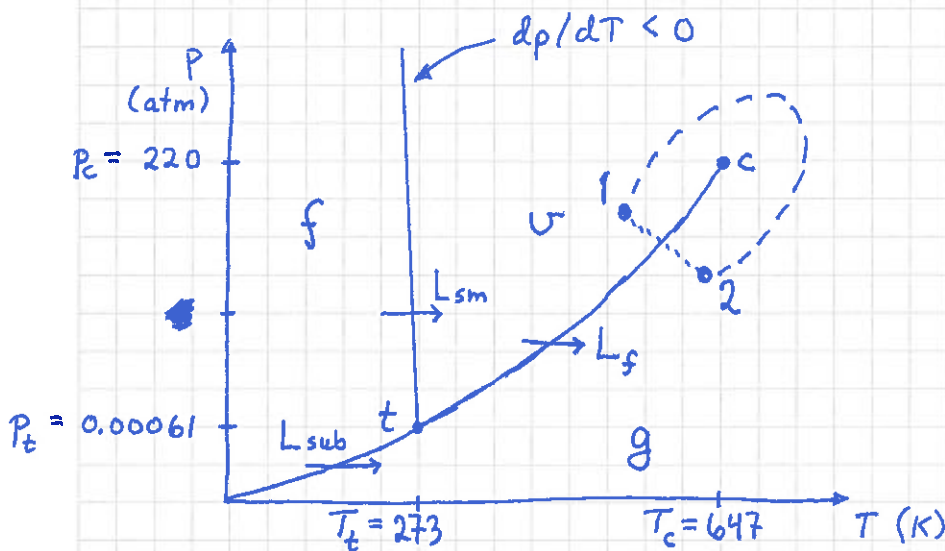
$f \rightarrow g : L_{sub} > 0, \Delta V > 0 \Rightarrow dp/dT > 0$

$f \rightarrow v : L_{sm} > 0, \Delta V$ liten, som regel $\Delta V > 0$, men $\Delta V < 0$ for smelting av is

Som regel:



H₂O:



t = trippelpunktet: koeksistens mellom f, v og g

Nær t: $L_{sm} \approx 80 \text{ cal/g}, L_f \approx 598 \text{ cal/g}, L_{sub} = L_{sm} + L_f \approx 678 \text{ cal/g}$

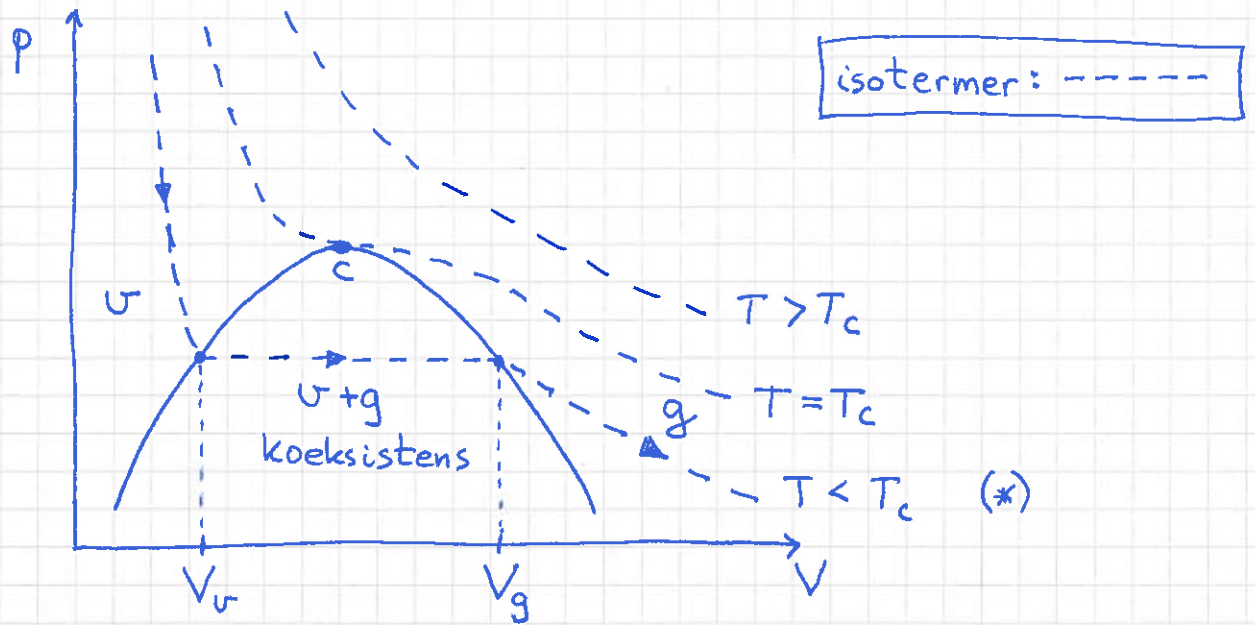
c = kritisk punkt: ingen faseovergang $v \leftrightarrow g$ for $p > p_c$ og $T > T_c$, ~~men~~ ingen ende på $f \leftrightarrow v$ koeks.linjen.

Forklaring: g og v er isotrope faser, dvs kan endre v til g (og omvendt) "kontinuerlig" (1----2) eller via faseovergang (1.....2).

Fast stoff har krystallstruktur/symmetri \Rightarrow alltid faseovergang $f \leftrightarrow v$ og $f \leftrightarrow g$

Faselikevekt $l \leftrightarrow g$ i pV -planet

Anta $p > p_t$, $T > T_t$ (slik at væske er mulig!)



Langs isotherm (*) med $T < T_c$:

$V \leq V_l$: kun væske, inntil fordamping starter

$V_l < V < V_g$: delvis væske, delvis gass, $p = \text{konst.}$

$V \geq V_g$: kun gass; videre volumøkning og trykkreduksjon

Kritisk isotherm, $T = T_c$, går gjennom kritisk punkt, som er et vendepunkt:

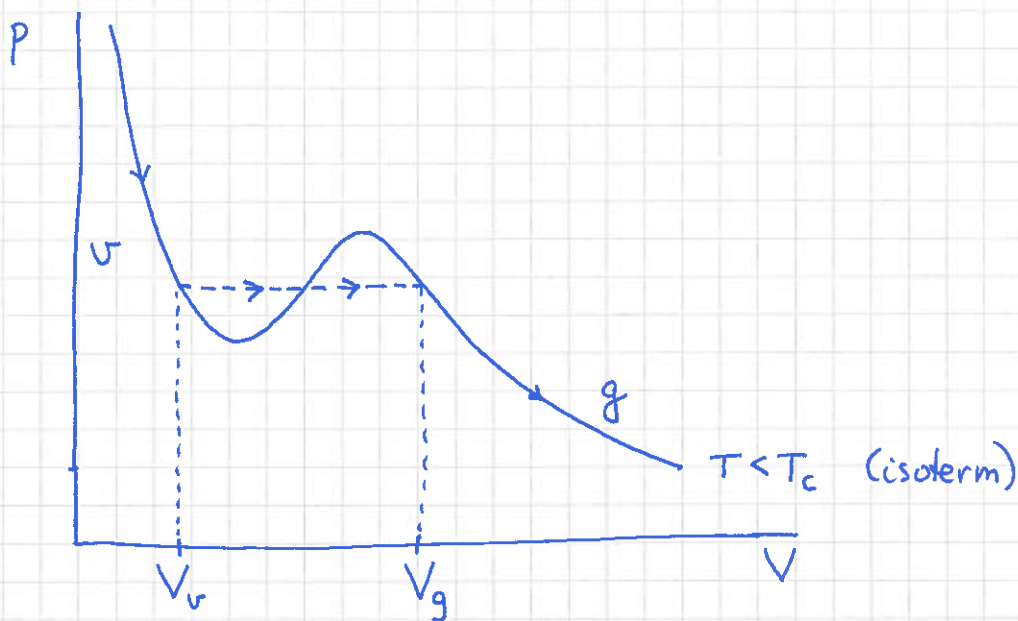
$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_c = 0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_c = 0$$

[Spm: Hvordan ser de tre isothermene ovenfor ut i (p, T) -diagrammet på s. 129?]

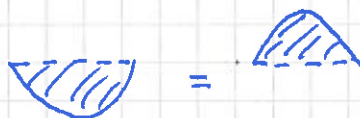
Faselikevekt $u \leftrightarrow g$ kan (tilnærmet/kvalitativt) (131)
beskrives med van der Waals tilstandsligning (s.69,70):

$$\text{For 1 mol: } \left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT$$

der a, b er stoffspesifikke empiriske konstanter



- $\partial p / \partial V > 0$ er ufysikalsk, så vi må gå (f.eks.) horisontalt forbi dette området

- Maxwell: "Like arealer!" 

- Kritisk punkt: $\partial p / \partial V = 0$ og $\partial^2 p / \partial V^2 = 0$

$$\Rightarrow V_c = 3b, T_c = 8a/27Rb, p_c = a/27b^2$$

[som du kan sjekke selv; 3 ligninger og 3 uljente!]

Eks: Luftfuktighet

(132)

Fuktig luft: $p = p_{N_2} + p_{O_2} + p_{CO_2} + \dots + \underline{p_{H_2O}}$

Luft mettet med vanndamp:

$$p_{H_2O} = p_d = \underline{\text{damptrykket}} \text{ p\aa } v \leftrightarrow g \text{ koeks.linjen}$$
$$= \underline{\text{max}} \text{ partialstrykk av } H_2O \text{ i luft ved gitt } T$$

Hvis $p_{H_2O} > p_d(T)$: Ikke likevekt \Rightarrow Kondensasjon

Hvis $p_{H_2O} < p_d(T)$: Relativ luftfuktighet

$$\phi = \frac{p_{H_2O}}{p_d(T)} \cdot 100\% \quad (< 100\%)$$

Clapeyrons ligning gir $p_d(T)$:

$$\frac{dp_d}{dT} = \frac{L}{T \Delta V} \quad ; \quad L = L_f \text{ evt } L_{sub} \quad (\text{fordamping evt. sublimasjon})$$
$$\Delta V = \Delta V_f \text{ evt } \Delta V_{sub} \quad (\text{---"---})$$

Antar: $\ell = L/n =$ molar latent varme uavh. av T

$$\Delta V = V_g - V \approx V_g \approx nRT/p_d \quad (\text{ideell gass; } V = V_f \text{ eller } V_v)$$

Dermed:

$$\frac{dp_d}{dT} = \frac{L \cdot p_d}{nRT^2} = \frac{\ell p_d}{RT^2}$$

$$\Rightarrow \int_{p_d(T_0)}^{p_d(T)} \frac{dp_d}{p_d} = \frac{\ell}{R} \int_{T_0}^T \frac{dT}{T^2} \quad ; \quad \text{med } T_0, p_d(T_0) \text{ et valgt referansepunkt p\aa koeks.linjen}$$

$$\Rightarrow \ln \left[\frac{P_d(T)}{P_d(T_0)} \right] = -\frac{l}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)$$

(133)

$$\Rightarrow \boxed{P_d(T) = P_d(T_0) \exp \left[\frac{l}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right]}$$
 Damptrykkkurven

Vi kan f.eks. bruke trippelpunktet som referanse:

$$T_0 = T_t = 273.16 \text{ K}, \quad P_d(T_0) = 612 \text{ Pa}$$

H_2O har molar masse 18 g/mol , slik at

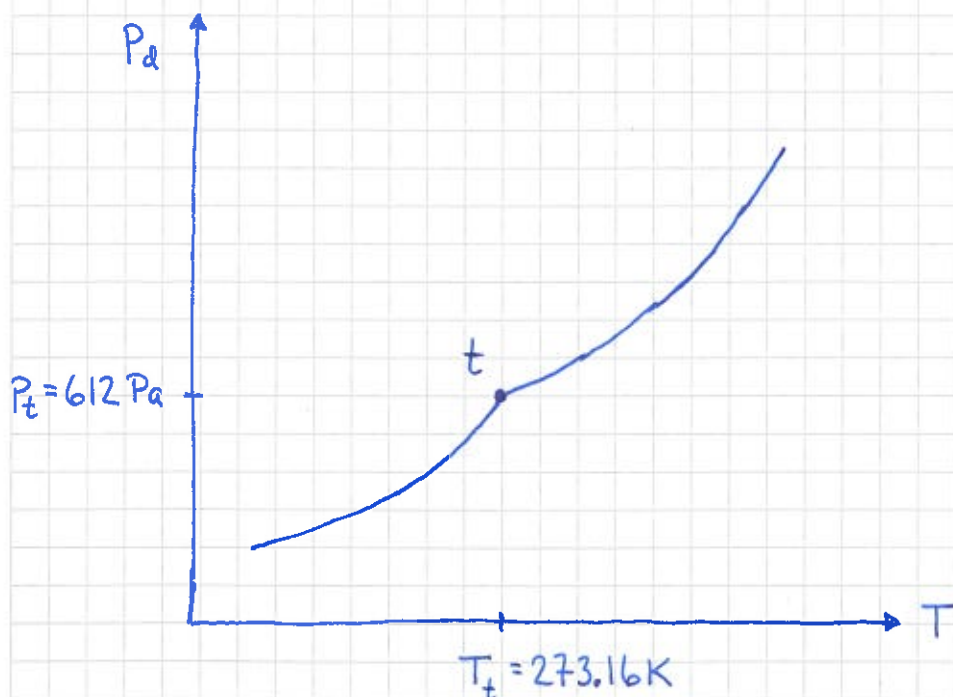
$$l_f = 598 \frac{\text{cal}}{\text{g}} = \frac{598}{1000} \frac{\text{kcal}}{\text{g}} \cdot 4.184 \frac{\text{kJ}}{\text{kcal}} \cdot 18 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \approx 45 \text{ kJ/mol}$$

$$l_{\text{sub}} = 678 \frac{\text{cal}}{\text{g}} = \frac{678}{1000} \frac{\text{kcal}}{\text{g}} \cdot \text{---} \text{---} \text{---} \approx 51 \text{ kJ/mol}$$

Dermed, med T målt i kelvin:

$$P_d(T > T_t) = 612 \text{ Pa} \cdot \exp \left\{ 19.8 - \frac{5413}{T} \right\}$$

$$P_d(T < T_t) = 612 \text{ Pa} \cdot \exp \left\{ 22.5 - \frac{6134}{T} \right\}$$



Eks: Kaldtvannsrør

134

$T_K \approx 10^\circ\text{C}$, i rom med $T_{\text{luft}} \approx 20^\circ\text{C}$

og høy luftfuktighet, $\phi \approx 100\%$:

Da er $P_{\text{H}_2\text{O}}$ i rommet større enn P_d ved rørets overflate \Rightarrow Kondens på kaldtvannsrøret.

(Men ikke på varmtvannsrøret, med overflate-temp. ca 50°C , slik at $P_{\text{H}_2\text{O}}$ i rommet er mindre enn P_d ved det varme rørets overflate.)

Eks: Vinterluft

Hvis $T_{\text{ute}} \approx -10^\circ\text{C}$ og $\phi_{\text{ute}} \approx 100\%$, hva blir

ϕ_{inne} hvis utelufta kommer inn og varmes opp til $T_{\text{inne}} \approx 20^\circ\text{C}$?

Løsning:

$$\begin{aligned}\phi_{\text{inne}} &= \frac{P_{\text{H}_2\text{O}}}{P_d(293\text{K})} \cdot 100\% = \frac{P_d(263\text{K})}{P_d(293\text{K})} \cdot 100\% \\ &= \frac{\exp\left\{22.5 - \frac{6134}{263}\right\}}{\exp\left\{19.8 - \frac{5413}{293}\right\}} \cdot 100\% \approx 12\%\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi_{\text{inne}} \ll \phi_{\text{komfort}} \approx 50\%$$

\Rightarrow Kok egg, pust, trim for å holde ϕ_{inne} høy nok gjennom vinteren!

Varmetransport [YF 17; LHL 18; HS 13]

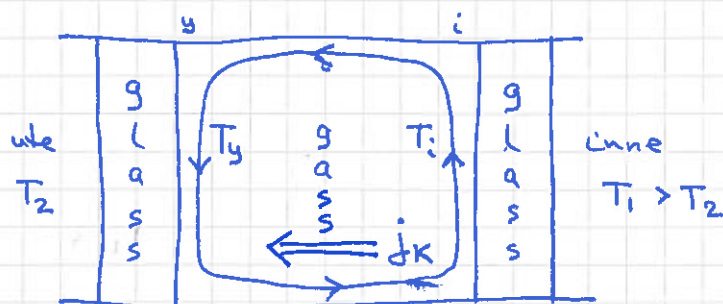
135

Ser på 3 ulike mekanismer:

- Konveksjon
- Varmeledning
- Stråling

Konveksjon [YF 17.7; LHL 18.2; HS 13.2]

Veldig kortfattet og kvalitativt, med dobbelvindu som eksempel:



$T_i > T_y \Rightarrow$ gassen varmes opp ved i , utvider seg og stiger; avkjøles ved y , trekker seg sammen og faller ned

\Rightarrow • Nettoeffekt: Strømning (se fig) og dermed varmeoverføring fra i til y

- Vanskelig å regne på

- Grovt sett: $j_k \sim \Delta T$; $\Delta T = T_i - T_y$

med j_k = overført varme pr flåteenhet og pr tidsenhet
(K for konveksjon)

- j_k vil avhenge av tykkelsen på laget mellom glassene

Fenomenologisk / Eksperimentelt finner man at overført varme typisk er proporsjonal med temperatordifferansen pr lengdeenhet, dvs. prop. med gradienten til T :

$$\vec{j} = -\kappa \nabla T \quad \text{Fouriers lov}$$

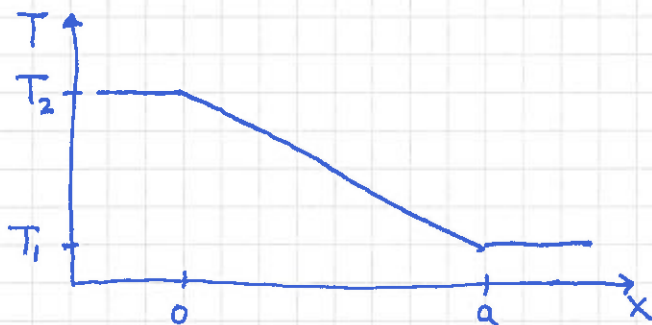
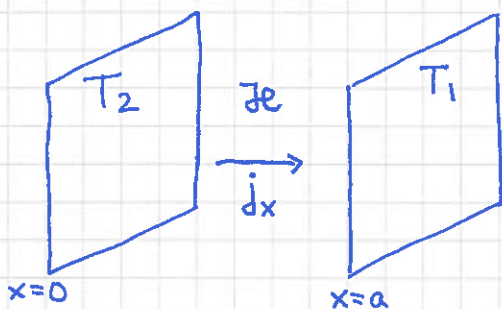
der \vec{j} = overført varme pr flate- og tidsenhet
(= varmestrømteitet); $[j] = \frac{J}{m^2 \cdot s} = W/m^2$

κ = varmeledningsevnen (evt. varmekonduktiviteten)
til stoffet som varmen transporteres gjennom
 $[\kappa] = W/m \cdot K$

Vi ser her kun på varmeledning i en bestemt retning, dvs endimensjonal varmeledning.

Først tidsuavhengig (evt. stasjonær) varmeledning:

■ To store parallelle plan i innbyrdes avstand a , med fast temp. hvor T_2 og $T_1 < T_2$:



Fouriers lov, med $T = T(x)$:

$$j_x = -\kappa \frac{dT}{dx}$$

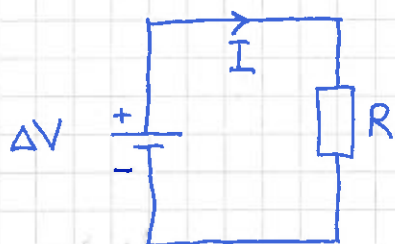
Stasjonær tilstand \Rightarrow j_x uavhengig av x (og av t , selvsagt!)

Hvis j_x varierte med x , ville strøm inn og strøm ut ved en gitt x være forskjellig, og dermed ville tilstanden ikke være stasjonær.

$$dT = - \frac{j_x}{\kappa} dx \Rightarrow \int_{T_2}^{T_1} dT = - \frac{j_x}{\kappa} \int_0^a dx \Rightarrow T_1 - T_2 = - \frac{j_x a}{\kappa}$$

$$\Rightarrow j_x = \frac{\kappa}{a} (T_2 - T_1) = \frac{\kappa}{a} \cdot \Delta T$$

Drs presis som Ohms lov!



ΔV = spenning (f.eks. med et batteri)

I = elektrisk strøm

R = resistans (motstand)

$$\text{Ohms lov: } \Delta V = R \cdot I \Rightarrow I = \frac{1}{R} \cdot \Delta V$$

Så analogien mellom varmeledningen og Ohms lov blir:

$$j_x \leftrightarrow I ; \quad \Delta T \leftrightarrow \Delta V ; \quad \frac{\kappa}{a} \leftrightarrow R$$

Det er nemlig at κ og R er "inverst analoge størrelser", siden κ er varmeledningsevne mens R representerer motstand mot transport (av elektrisk ~~lading~~ ladning). Skriver vi Ohms lov på formen

$I = G \cdot \Delta V$ med $G = \frac{1}{R} = \text{konduktansen}$, så blir analogien enda tydeligere, $\kappa/a \leftrightarrow G$.

[Her leses \leftrightarrow som "tilsvare" eller "er analog med".]

Det er verdt å merke seg at siden $\Delta T_i \sim 1/\lambda_i$, får vi størst temperaturgradient ($\Delta T_i/a_i$) i det laget som har minst varmeledningsevne λ_i , dvs det som "isolerer best"!

Tallempele: Vegg med 3 cm ytter- og innerpanel i gran, med 20 cm "glava" (glassvatt) mellom; $\lambda_{gran} = 0.12 \text{ W/m}\cdot\text{K}$, $\lambda_{glava} = 0.035 \text{ W/m}\cdot\text{K}$.

a) Med $T_4 = 20^\circ\text{C}$ og $T_1 = -10^\circ\text{C}$, hva blir j_x ?

b) Hva blir $T(x)$?

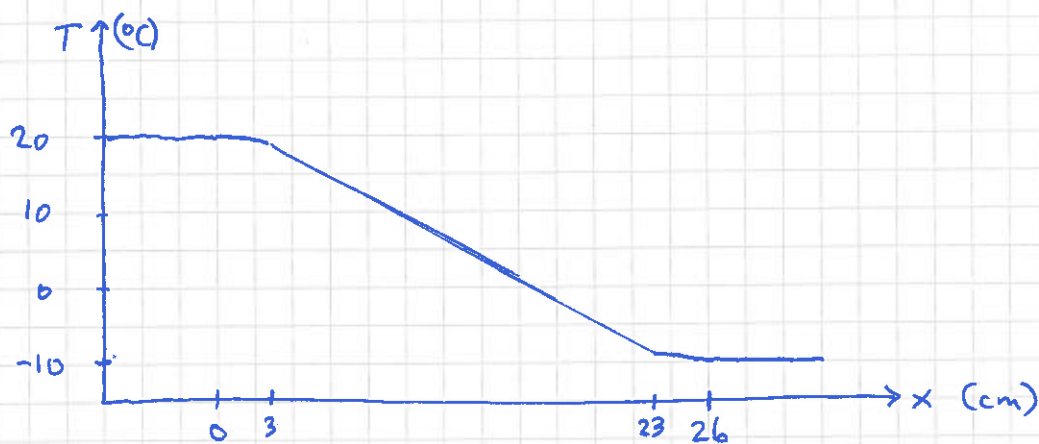
$$\begin{aligned} \text{a) } j_x &= 30 \text{ K} \cdot \left\{ 2 \cdot 0.03 \text{ m} / 0.12 \text{ W/m}\cdot\text{K} + 0.20 \text{ m} / 0.035 \text{ W/m}\cdot\text{K} \right\}^{-1} \\ &= 30 \text{ K} \cdot \left\{ 0.5 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W} + 5.71 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W} \right\}^{-1} \\ &= 30 \cdot 0.16 \text{ W/m}^2 = \underline{\underline{4.8 \text{ W/m}^2}} \end{aligned}$$

$$\text{b) } T_4 - T_3 = j_x \cdot a_{gran} / \lambda_{gran} = 4.8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot \frac{0.03 \text{ m}}{0.12 \text{ W/m}\cdot\text{K}} = 1.2 \text{ K}$$

$$\Rightarrow T_2 - T_1 = T_4 - T_3 = 1.2 \text{ K}$$

$$\Rightarrow T_3 - T_2 = 30 \text{ K} - 2.4 \text{ K} = 27.6 \text{ K}$$

$$\text{Dvs } T_3 = 18.8^\circ\text{C}, T_2 = -8.8^\circ\text{C}$$



Dvs praktisk tatt hele ΔT over glavalaget!

Men: Panel + papp nødvendig for å hindre at det blåser rett gjennom, selvsagt.

Varmeledning ligningen [LHL 18.5 ; HS 13.1]

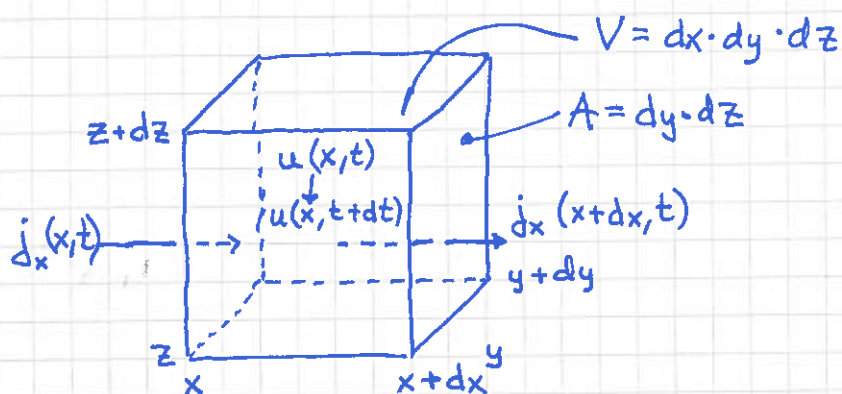
140

Vi skal vise at med energibevarelse samt Fouriers lov ($j \sim \nabla T$)
får vi følgende generelle diff.-ligning for $T(\vec{r}, t)$:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \nabla^2 T} \quad \text{som er } \underline{\text{varmeledning ligningen}}$$

(med $D_T = \kappa / \rho c$; $\rho =$ masse pr volumenet,
 $c =$ varmekapasitet pr masseenhet)

Vi tar for oss et lite men fast volum av et stoff:



Her er:

$u =$ (indre) energi pr volumenet

($\Rightarrow U = u \cdot V =$ energi i volumet $V = A \cdot dx$)

$j_x =$ varmestrøm tetthetens x -komponent ($\vec{j} = j_x \hat{x} + j_y \hat{y} + j_z \hat{z}$)

Det må nå forholde seg slik at dersom det er en netto tilstrømning
av energi (varme), dvs dersom $j_x(x, t) \neq j_x(x + dx, t)$, så må
det resultere i at energien U , og dermed $u = U/V$
(fast volum V !), endrer seg, dvs $u(x, t) \neq u(x, t + dt)$.

[Her ser vi først på bidraget til endringen i u som skyldes j_x ;
deretter er det en smal sak å gjenta argumentasjonen
for j_y og j_z !]

Netto tilført energi utenfra mellom t og $t+dt$:

$$j_x = \frac{dU}{A \cdot dt} \Rightarrow dU = j_x \cdot A \cdot dt$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow dU &= dU_{inn} - dU_{ut} \\ &= j_x(x,t) \cdot A \cdot dt - j_x(x+dx,t) \cdot A \cdot dt \\ &= - \frac{\partial j_x}{\partial x} \cdot \underbrace{dx}_{=V} \cdot A \cdot dt \quad \left(\text{sidan } \frac{\partial j_x}{\partial x} = \frac{j_x(x+dx) - j_x(x)}{dx} \right) \end{aligned}$$

Energiendring i V i løpet av dt :

$$\begin{aligned} dU &= U(x,t+dt) - U(x,t) \\ &= u(x,t+dt) \cdot V - u(x,t) \cdot V \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dt \cdot V \quad \left(\text{sidan } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(t+dt) - u(t)}{dt} \right) \end{aligned}$$

Likhet mellom dU og dU (!) gir nå:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial j_x}{\partial x}$$

På samme vis blir netto tilførsel av energi $-\frac{\partial j_y}{\partial y} \cdot V \cdot dt$
 og $-\frac{\partial j_z}{\partial z} \cdot V \cdot dt$ dersom hhv j_y og j_z ikke er konstante.

Netto energitilførsel mellom t og $t+dt$ blir dermed

$$- \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right) \cdot V \cdot dt \equiv -(\nabla \cdot \vec{j}) \cdot V \cdot dt$$

$$\text{Her er: } \nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{j} = \hat{x} j_x + \hat{y} j_y + \hat{z} j_z$$

$$\nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \text{divergensen til } \vec{j} \quad (= \text{div } \vec{j})$$

Dermed: $\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$

Energibevarelse for $V = dx \cdot dy \cdot dz$,
 der "lokalt", på stedet (x, y, z) .
 ["Kontinuitetsligning"; her for energi]

Knytter \vec{j} og u til T :

$$\vec{j} = -\kappa \nabla T \Rightarrow \nabla \cdot \vec{j} = -\kappa \nabla^2 T \quad (\text{der vi antar } \kappa = \text{konstant,} \\ \text{dvs. uniformt medium})$$

Her er $\nabla^2 T = \nabla \cdot (\nabla T) = \partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2 + \partial^2 T / \partial z^2$

$\nabla^2 =$ "div grad" = Laplaceoperatoren

$$G = \frac{dQ}{dT} \stackrel{\text{fast } V}{=} \frac{dU}{dT} = V \cdot \frac{du}{dT} \Rightarrow \frac{du}{dT} = \frac{G}{V}$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial T} dT \quad \text{siden } dV=0 \quad (\text{fast volum!}) \Rightarrow \frac{du}{dT} = \frac{\partial u}{\partial T}$$

Videre, med kjernerregelen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \stackrel{\text{se over!}}{=} \frac{du}{dT} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{G}{V} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

Innfører:

$c = G/M =$ varmekap. pr. masseenhet ; $[c] = \text{J/kg}\cdot\text{K}$

$\mu = M/V =$ masse pr. volumenhet ; $[\mu] = \text{kg/m}^3$

$$\Rightarrow \frac{G}{V} = \frac{M \cdot c}{M/\mu} = c \cdot \mu$$

Dermed:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j} \Rightarrow c \cdot \mu \frac{\partial T}{\partial t} = +\kappa \nabla^2 T \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{c \mu} \nabla^2 T$$

Innfører $D_T \equiv \kappa / c \mu =$ stoffets termiske diffusivitet,

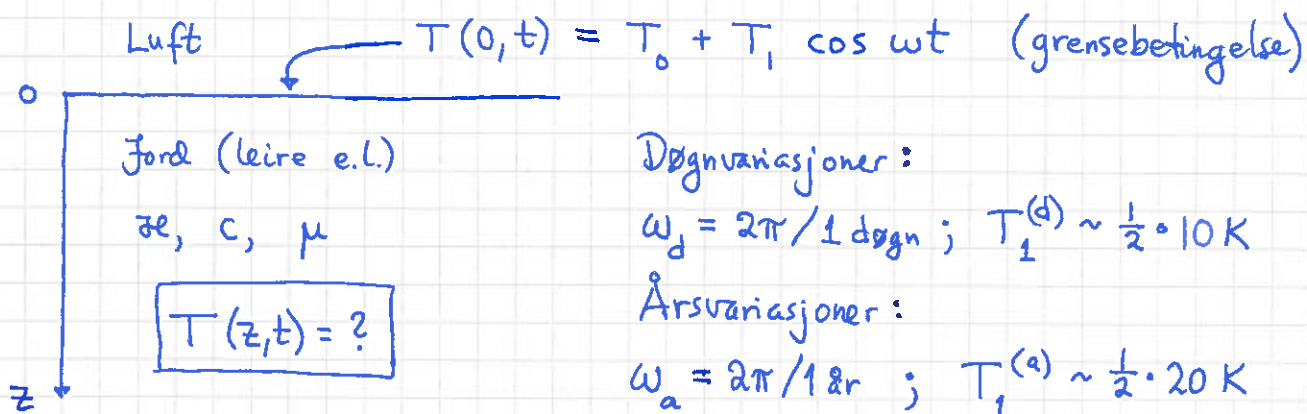
med enheten $[D_T] = \text{m}^2/\text{s}$, og får

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \nabla^2 T}$$

$$D_T = \kappa / c \mu$$

som lovet!

Eks: $T(z,t)$ nedover i bakken



Løsning: Vi gjetter $T(z,t) = T_0 + T_1 \cdot f(z) \cdot \cos(\omega t - \alpha z)$!!

Innsetning av gjetningen i ligningen $\partial T / \partial t = D_T \partial^2 T / \partial z^2$ gir $f(z) = \exp(-\alpha z)$ og $\alpha = \sqrt{\omega / 2D_T}$, slik at

$$\underline{T(z,t) = T_0 + T_1 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \alpha z)}$$

Tallverdier for leire:

	κ (W/m·K)	c (kJ/kg·K)	μ (kg/m ³)	D_T (m ² /s)	$\frac{1}{\alpha_d}$ (cm)	$\frac{1}{\alpha_a}$ (cm)
Tørr	0.15	1.4	$1.1 \cdot 10^3$	$1.0 \cdot 10^{-7}$	5	100
Våt	1.8	2.5	$1.8 \cdot 10^3$	$4.0 \cdot 10^{-7}$	10	200

Dvs: Ved dybden $z = \pi / \alpha_a \approx 3 \text{ m}$ (6m) ned i tørr (våt) leire er $T(z,t) = T_0 + T_1^{(a)} e^{-\pi} \cos(\omega_a t - \pi)$ som er maksimal ca 1/2 år senere enn når $T(0,t)$ er maksimal, dvs midt på vinteren!

Men amplituden er liten:

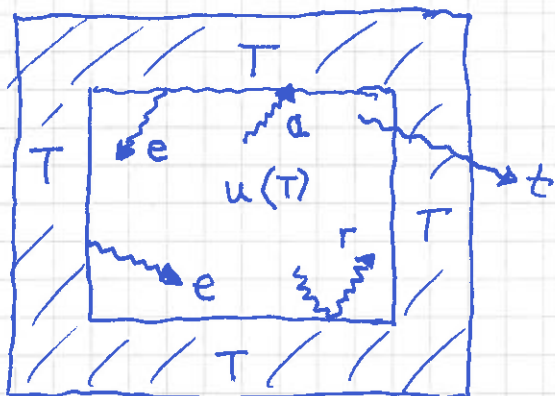
$$T_1^{(a)} \cdot e^{-\pi} \approx \frac{1}{2} \cdot 20 \text{ K} \cdot 0.04 \approx \underline{0.4 \text{ K}}$$

Stråling [YF 17.7; LHL 18.4; HS 13.3]

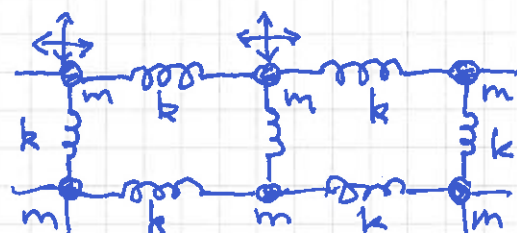
(144)

Innledning

Ser på hulrom, volum V , i termisk likevekt med boksens vegg:



- boks med temperatur T
- vibrerende atomer i veggene:



- dvs, vi har akselererte ladninger i veggene, og akselererte ladninger sender ut (emitterer) elektromagnetiske bølger, dvs stråling

- emitterte bølger kan

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\text{a}}\text{bsorberes} \quad (\text{andel } a) \\ \underline{\text{r}}\text{eflekteres} \quad (-\text{''}- r) \\ \text{eller } \underline{\text{t}}\text{ransmitteres} \quad (-\text{''}- t) \end{array} \right\} \Rightarrow a + r + t = 1$$

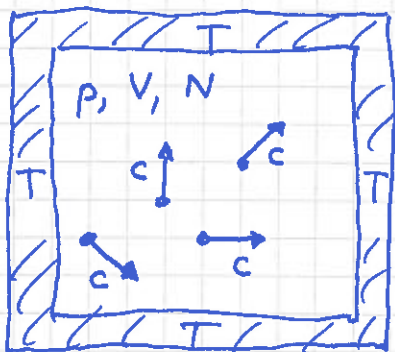
- et svart legeme defineres ved at $\boxed{a=1}$ (dvs $r=t=0$)

- hulrommet fylles med e.m. stråling, dvs fotoner, og energimengden pr volumenheter, $u = U/V$, blir bestemt av temperaturen, $u = u(T)$

Stefan - Boltzmanns lov

145

Hvordan avhenger u av temperaturen; $u(T) = ?$



- har N fotoner i hulrommet
- fotonenes hastighet: $v = c$ ($\approx 3 \cdot 10^8$ m/s)
- generelt, for partikler med svært høy hastighet ("relativistiske partikler"):

$$E^2 = (mc^2)^2 + (Pc)^2$$

↑ ↑ ↑
energi masse impuls

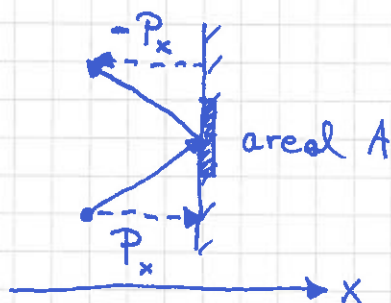
• fotoner: $m = 0 \Rightarrow E = Pc$

Planck: $E = hf$; $h =$ Plancks konstant; $f =$ fotonets frekvens

$\Rightarrow Pc = hf \Rightarrow P = h \cdot f/c = h/\lambda$; $\lambda =$ " " - bølgelengde

- kinetisk gass teori (se s. 92-94) gir trykket i fotongassen:

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \langle F_x \rangle / A = \langle \Delta P_x / \Delta t \rangle / A$$



$\Delta \tilde{P}_x = 2P_x$ [Termisk likevekt innebarer at vegg \perp x-aksen. for hvert absorberte foton med impuls $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$ vil emittere et foton med impuls $(-P_x, P_y, P_z)$]

$\Delta \tilde{P}_x = 2P_x =$ impuls overført til vegg per partikkel (foton)

Antall fotoner som treffer A i løpet av tid Δt :

$$\frac{1}{2} N \cdot \frac{A \cdot v_x \cdot \Delta t}{V} \quad (\text{se s. 93})$$

$$\Rightarrow p = \frac{\langle \frac{1}{2} N \frac{A v_x \Delta t}{V} \cdot 2 P_x / \Delta t \rangle}{A} = \frac{N}{V} \langle P_x \cdot v_x \rangle \quad (146)$$

$$\text{Isotropi} \Rightarrow \langle P_x v_x \rangle = \frac{1}{3} \langle \vec{P} \cdot \vec{v} \rangle = \frac{1}{3} \langle P \cdot v \rangle$$

$$P = E/c, \quad v = c \Rightarrow P \cdot v = E$$

$$\text{Fotongassens (indre) energi: } U = N \langle E \rangle$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{3} \frac{N \langle E \rangle}{V} = \frac{1}{3} \frac{U}{V} = \frac{1}{3} u$$

På s. 123-124 utledet vi et generelt uttrykk for dS , uttrykt ved dT og dV . Underveis, s. 124, fant vi at

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

som vi nå får god bruk for:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = \frac{\partial}{\partial V} [u(T) \cdot V] = u(T)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{1}{3} u(T) \right] = \frac{1}{3} \frac{du(T)}{dT}$$

Dermed:

$$u + \frac{1}{3} u = T \cdot \frac{1}{3} \frac{du}{dT}$$

$$\Rightarrow 4u = T \frac{du}{dT} \Rightarrow \frac{du}{u} = 4 \frac{dT}{T}$$

$$\Rightarrow \ln u = 4 \ln T + \ln A \quad (A = \text{konst.})$$

$$\Rightarrow u(T) = A \cdot T^4$$

147

Vi er strengt tatt på jakt etter

$j_s(T)$ = emittert strålingsenergi pr flateenhet og pr tidsenhet fra et svart legeme med temperatur T

Vi skal finne $j_s(T)$ fra $u(T)$, ved å benytte oss av at i termisk likevekt må legemet absorbere og emitte nøyaktig like mye energi pr flate- og tidsenhet, noe som må gjelde for enhver bølgelengde. Vi bestemmer derfor absorbert energimengde, og har da samtidig fastlagt emittert energimengde!

Ser på energistrøm mot areal A av veggen pr flate- og tidsenhet =

$$\text{volum } dV = A \cdot dx$$



$$j_s(T) = \left\langle \frac{1}{2} \cdot \frac{dU}{A \cdot dt} \right\rangle$$

↑
halvparten av fotonene går mot høyre!

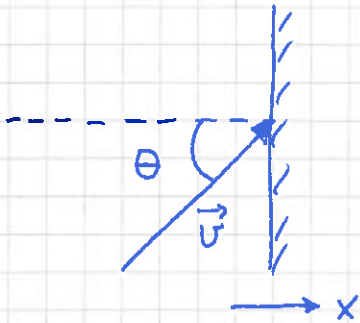
$$dU = u(T) dV = u(T) A dx$$

$$v_x = dx/dt$$

$$\Rightarrow j_s(T) = \left\langle \frac{1}{2} \frac{u(T) A dx}{A dt} \right\rangle = \frac{1}{2} u(T) \langle v_x \rangle$$

Det er klart at $\langle v_x \rangle$ må bli c multiplisert med et tall mindre enn 1, slik at vi allerede kvalitativt kan konkludere med at $j_s(T) \sim T^4$.

Vi regner ut $\langle v_x \rangle$ ved å midle over alle mulige retninger på \vec{v} , dog slik at $v_x > 0$:



$$\vec{v} = c \cdot \hat{u}$$
$$v_x = c \cdot \cos \theta$$

$$\langle v_x \rangle = \frac{\iint v_x d\Omega}{\iint d\Omega} ; \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

= romvinklelement

$0 \leq \phi \leq 2\pi$ (dekker ^{ulike} retninger for gitt θ ved å rotere omkring x-aksen (-----))

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (vinkel mellom \vec{v} og -----, se figur; $\theta > \pi/2$ tilsvarer $v_x < 0$)

$$\Rightarrow \langle v_x \rangle = c \cdot \frac{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos \theta}{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta} = c \cdot \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin^2 \theta}{\int_0^{\pi/2} (-\cos \theta)} = \frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow j_s(T) = \frac{1}{4} c u(T) = \frac{1}{4} c AT^4 = \sigma T^4$$

med $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ = Stefan-Boltzmanns konstant

Stefan-Boltzmanns lov, $j_s(T) = \sigma T^4$, må gjelde for alle mulige bølgelengder hver for seg, og dermed også totalt.

Plancks fordelingslov

(149)

Energien i strålingshulrommet vil bestå av fotonenergier som tilsvarer alle mulige frekvenser, $0 \leq f \leq \infty$.

For gitt temp. T , hvor mye bidrar ulike frekvenser til $u(T)$?

$$u(T) = \int du = \int_0^{\infty} df \frac{du}{df} = \int_0^{\infty} df \eta(f, T)$$

der $\eta(f, T) = du/df =$ energi pr volum- og frekvensenhet

[der $du = df \eta(f, T) =$ energi pr volumenhet fra fotoner med frekvens mellom f og $f+df$]

Oppskriften for å bestemme $\eta(f, T)$ er grovt sett slik:

- se på et hulrom med volum $V = L_x \cdot L_y \cdot L_z$
- for et gitt materiale i veggene vil Maxwells ligninger for elektrisk felt \vec{E} og magnetfelt \vec{B} gi oss grensebetingelser for \vec{E} (og \vec{B}) i grenseflaten mellom hulrom og vegg.
- dele ut fastlegge de mulige bølglengder λ , og dermed de mulige frekvenser f for bølgene i hulrommet; med andre ord de mulige frekvensene mellom f og $f+df$, og dermed antall mulige frekvenser pr frekvensenhet, den såkalt tilstandsletheten (evt. modetetheten)

- resultatet blir at antall mulige frekvenser pr volum- og frekvensenhet er proporsjonalt med f^2 , og med prop.faktor $8\pi/c^3$.

- klassisk elektromagnetisme gir en energitetthet

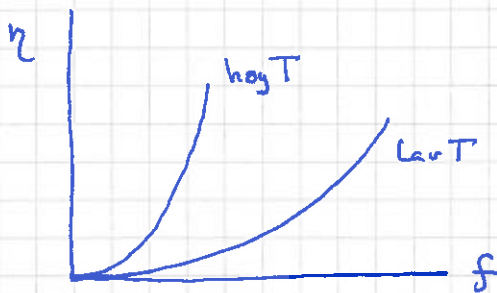
$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

der \vec{E} = elektrisk felt og \vec{B} = magnetfelt, og ϵ_0 og μ_0 er naturkonstanter. Ifølge det klassiske ekuipartisjonsprinsippet (s.101-102) blir da midlere energi pr "svingemode"

$$\langle E \rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} k_B T = k_B T$$

siden det er 2 kvadratiske ledd i energifunksjonen u .

- dermed: $\eta(f, T) = k_B T \cdot 8\pi f^2 / c^3$ (klassisk!)

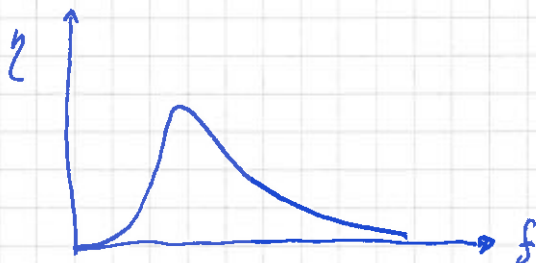


- dette resultatet er problematisk, og heldigvis feil!

Problematisk, fordi

$$u(T) = \int_0^{\infty} df \eta(f, T) = \frac{8\pi k_B T}{c^3} \int_0^{\infty} f^2 df = \infty$$

Feil, fordi observert fordeling ser slik ut:



- løsningen ligger i Plancks hypotese (1900):

(151)

$$E(f) = 0, hf, 2hf, \dots = j \cdot hf \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

Statistisk mekanikk gir nå: (se s 104)

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} E_j \exp(-E_j/k_B T)}{\sum_{j=0}^{\infty} \exp(-E_j/k_B T)} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} j hf \exp(-j hf/k_B T)}{\sum_{j=0}^{\infty} \exp(-j hf/k_B T)}$$

= endel algebra.....

$$= \frac{hf}{\exp(hf/k_B T) - 1}$$

slik at

$$\eta(f, T) = \frac{8\pi h f^3 / c^3}{\exp(hf/k_B T) - 1}$$

som stemmer med observert fordeling (nederst s. 150)

- energi pr volumenheter blir dermed

$$u(T) = \int_0^{\infty} df \eta(f, T) = \dots \text{endel algebra} \dots$$

$$= \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^3} \cdot T^4$$

slik at (se s 148)

$$\underline{j_s(T)} = \frac{1}{4} c u(T) = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} \cdot T^4 = \underline{\sigma \cdot T^4}$$

med $\sigma \approx 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$; Stefan-Boltzmanns lov

———— " ———— konstant

- ved å sette $\partial \eta / \partial f = 0$ finner en η_{\max}
for $hf/k_B T = 2.821$, dvs $f(\eta_{\max})/T = 5.9 \cdot 10^{10} \text{ Hz/K}$

- videre kan en skrive

$$u(T) = \int_0^{\infty} d\lambda \xi(\lambda)$$

$$\text{med } \xi(\lambda) = du/d\lambda = \frac{du}{df} \cdot \frac{df}{d\lambda},$$

dvs som en fordeling over bølglengder λ .

Med $\eta = du/df$ fra s. 151 og $f = c/\lambda$, er det en "smal sak" å vise at

$$\xi(\lambda) = \frac{8\pi hc/\lambda^5}{\exp(hc/\lambda k_B T) - 1}$$

som har et maksimum for

$$\lambda_{\max} \cdot T \approx 2.90 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

dvs Wiens forskyvningslov

Stråling; eksempler

(153)

- Estimer varmetapet fra en naken kropp pga stråling, i omgivelser ved -5°C . (Hudens overflate: ca 30°C)

Løsning:

$$\begin{aligned}j_{\text{netto}} &= j_{\text{ut}} - j_{\text{inn}} = \sigma (T_{\text{hud}}^4 - T_{\text{omg}}^4) \\ &= 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} (303^4 - 268^4) \text{K}^4 \\ &= (478 - 292) \text{W/m}^2 = 186 \text{W/m}^2\end{aligned}$$

Med $h=180\text{cm}$, $b \approx 35$ og $d \approx 15\text{cm}$ blir $A \approx 1.8\text{m}^2$

$$\begin{aligned}\Rightarrow Q_{\text{netto}} &= j_{\text{netto}} \cdot A \approx \underline{335\text{W}} \quad [\text{Vel, strengt tatt en effekt,} \\ (Q_{\text{ut}} &\approx 860\text{W brutto)} \quad \text{så kanskje heller } P_{\text{netto}} \approx 335\text{W}]\end{aligned}$$

- Sammenlign med energiinntak via mat.

Løsning:

Normalt matinntak tilsvarer ca 2000kcal pr døgn, eller la oss si 10000kJ pr døgn, som tilsvarer

$$P_{\text{inn}} = 10^7 \text{J} / 3600 \cdot 24\text{s} = \underline{116\text{W}}$$

Som er betydelig mindre enn både P_{brutto} og P_{netto} fra første oppg.

Kler eliminerer det meste av strålingstapet.

- Sammenlign utstrålt energi pr masseenheter fra sola og fra en voksen person.

Løsning:

$$\text{Sola har } M = 2 \cdot 10^{30} \text{kg} \quad \text{og } P_{\text{ut}} = 3.9 \cdot 10^{26} \text{W}$$

$$\Rightarrow 1.95 \cdot 10^{-4} \text{W/kg}$$

$$\text{En voksen person har (f.eks.) } M = 86\text{kg} \quad \text{og } P_{\text{ut}} = 860\text{W}$$

$$\Rightarrow 10 \text{W/kg}$$

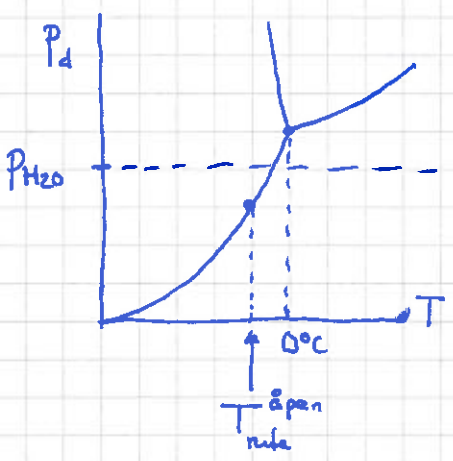
- Hvordan hindrer en carport (evt. en husvegg eller en skogkant) is og rim på bilruta?

Løsning:

Anta en klar vinternatt, uten vind og snø, og temperatur omkring 0°C. Himmelen stråler da effektivt som et svart legeme med temp. omlag 20 grader kaldere enn lufttemperaturen.

På åpen parkeringsplass foregår utveksling av strålingsenergi i stor grad mellom ruta og himmelen, og ruta kan bli en god del kaldere enn lufta omkring. I carport eller ved en vegg utveksler ruta strålingsenergi i stor grad med carportens tak eller husveggen, som begge har temp. omtrent som lufta omkring, og bare i liken grad med den kalde himmelen. Rutas temperatur blir dermed omtrent som lufta omkring.

Anta nå at luftas partialtrykk P_{H_2O} ligger mellom damptrykket ved 0°C, $P_d(0)$, og damptrykket ved himmelens temp., $P_d(-20)$, eller retttere sagt $P_d(T_{\text{himmel}}^{\text{åpen}})$, der $T_{\text{himmel}}^{\text{åpen}}$ er rutas temp. hvis bilen parkeres "åpent":



På ruta på bilen midt på parkeringsplassen er mengden vann i lufta så stor at $P_{H_2O} > P_d(T_{\text{himmel}}^{\text{åpen}})$, og vi får kondensasjon og rimdennelse. Men $P_{H_2O} < P_d(0°C)$, så bilen i carporten forblir rimfri!

- Jorda mottar 1370 W/m^2 fra sola. Avstanden til sola er 150 mill. km. Hva er da utstrålt effekt fra sola? (155)

Løsning:

$$P_{\text{sol}} = j(\text{fra sola, i avstand } 150 \cdot 10^9 \text{ m}) \cdot A \text{ (kuleflate med } R=150 \cdot 10^9 \text{ m)}$$

$$= 1370 \text{ W/m}^2 \cdot 4\pi \cdot (150 \cdot 10^9 \text{ m})^2$$

$$= \underline{\underline{3.9 \cdot 10^{26} \text{ W}}}$$

- Hva blir da solas overflatetemperatur, når sola har radius $7 \cdot 10^8 \text{ m}$?

Løsning:

$$T_{\text{sol}} = \left[j_{\text{sol}}(R_{\text{sol}}) / \sigma \right]^{1/4} = \left[\frac{P_{\text{sol}} / 4\pi R_{\text{sol}}^2}{\sigma} \right]^{1/4}$$

$$= \left[\frac{3.9 \cdot 10^{26} \text{ W} / (4 \cdot \pi \cdot (7 \cdot 10^8 \text{ m})^2)}{5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4} \right]^{1/4} \approx \underline{\underline{5800 \text{ K}}}$$

- Hva blir da jordas overflatetemp. (i middel)?

Løsning:

$$\textcircled{J} \quad A = \pi R_J^2$$

$$\underbrace{1370 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot \pi R_J^2}_{P_{\text{inn}}} = \underbrace{4\pi R_J^2 \cdot \sigma T_{\text{jord}}^4}_{P_{\text{ut}}}$$

$$\Rightarrow T_{\text{jord}} = \left[\frac{1370 \text{ W/m}^2}{4 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4} \right]^{1/4} = \underline{\underline{279 \text{ K}}}$$

Ikke verst; $T_{\text{observert}} \approx 288 \text{ K}$.

Vi har f.eks. neglisjert "drivhuseffekt" pga atmosfæren:

