KLASSISK MEKANIKK

[YF 1-10, 14 ; TM 1-10, 14 ; LL 1-6, 9 ; HS 1-6]

Størrelser og enheter. SI-systemet. [YF1, TM1, HS1]

Fysisk størrelse = målbar størrelse for fysisk fenomen

Eks: Tid. $\underset{\text{symbol}}{\tau} = \underbrace{1.0167}_{\text{måltall}}$ ns ← enhet, inkl. dekadisk prefiks (n = nano = 10^{-9})

$[\tau] = s$ "enheten til tau er sekund"

SI : 7 grunnenheter + div. sammensatte og avledete

Navn	Symbol (er)	Enhet	
lengde	$\ell, s, \Delta x, \ldots$	m	Mekanikk
masse	$m, M, \ldots$	kg	Mekanikk
tid	$t, \tau, \ldots$	s	Mekanikk
elektrisk strømstyrke	I	A	Elmag
temperatur	T	K	Termisk
stoffmengde	n	mol	—"— (Kjemi)
lysstyrke	I	cd	Lite brukt
hastighet	v	m/s	
akselerasjon	a	m/s^2	
kraft	F	$kg\,m/s^2 \equiv N$	avledete
energi	$E, K, U, W, \ldots$	$Nm \equiv J$	avledete
effekt	P	$J/s \equiv W$	avledete
⋮			

Eks: Hvor lang tid bruker lyset på å gå 1 fot, i vakuum?

Løsn: $c = 299792458$ m/s , $\ell = 1$ fot $= 12$ in $= 12 \cdot 25.4$ mm

$\tau = \ell / c = 12 \cdot 25.4 \cdot 10^{-3}$ m / 299792458 m/s

$\approx 1.0167 \cdot 10^{-9}$ s $= \underline{1.0167 \text{ ns}}$

Eks: Hvor mye er en (engelsk!) pint i SI-enheter?

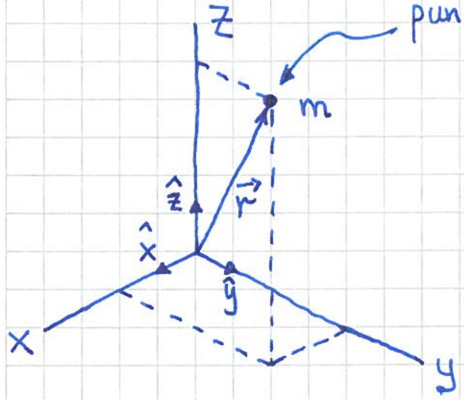
Løsn: 1 pint $= 0.56826125$ L $\approx \underline{0.568 \text{ dm}^3}$

$= 0.568 \cdot (10^{-1} \text{ m})^3 = \underline{5.68 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3}$

Kinematikk [YF 2,3 ; TM 2,3 ; LL 1 ; HS 2.1]

= beskrivelse av bevegelse

Posisjon:



punktpartikkel (evt. massesenter / tyngdepunkt, "CM", i legeme / partikkelsystem)

$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z}$

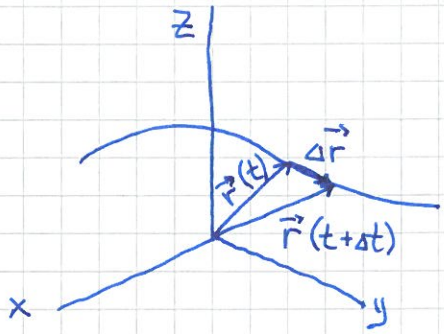
= posisjonen til m ved tid t (i kartesiske koord.)

$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ = enhetsvektorer i hhv x-, y-, z-retning

$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$; $[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1$ (dimensjonsløse)

$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$, $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \ldots = 0$

m's bevegelse beskrives ved banen $\vec{r}(t)$:



Forflytning (i løpet av tid Δt):

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

(= posisjonsendring)

Hastighet = forflytning pr tidsenhet:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Δt er (positiv) skalar, så $\vec{v} \parallel \Delta\vec{r}$, dvs $\vec{v}$ er tangentiell til banen

Akselerasjon = hastighetsendring pr tidsenhet:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Standard notasjon for derivert mhp tid t:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{etc.}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

Med kartesiske komponenter:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \\ \parallel \\ \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\hat{x} + \dfrac{dy}{dt}\hat{y} + \dfrac{dz}{dt}\hat{z} \end{array}\right\} \Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{etc.}$$

Tilsvarende: $a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ etc.

M.a.o: Finner $\vec{v}$ og $\vec{a}$ fra $\vec{r}$ og $\vec{v}$ med <u>derivasjon</u> (mhp t)

$\Rightarrow$ Må kunne finne $\vec{r}$ og $\vec{v}$ fra $\vec{v}$ og $\vec{a}$ med <u>integrasjon</u>:

Først i én dimensjon (dvs rettlinjet, 1D):

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v \cdot dt$$

$$\Rightarrow \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

Tilsvarende:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a \cdot dt$$

$$\Rightarrow \int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \Rightarrow v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

Generalisering til 3D: $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, $\vec{a} = d\vec{v}/dt$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,dt \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,dt$$

$$\int_{\vec{v}(t_0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt$$

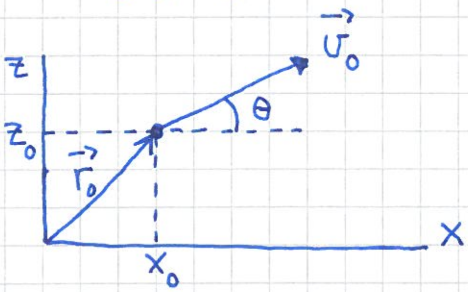
Eks: $\vec{a}$ = konstant, og <u>initialbetingelser</u> $\vec{r}(t_0)=\vec{r}_0$, $\vec{v}(t_0)=\vec{v}_0$

Dermed: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\cdot(t-t_0)$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\cdot(t-t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot(t-t_0)^2$$

Eks: Skrått kast i tyngdefeltet.

Initialbet: (ved $t_0=0$)



$\vec{a} = -g\cdot\hat{z}$

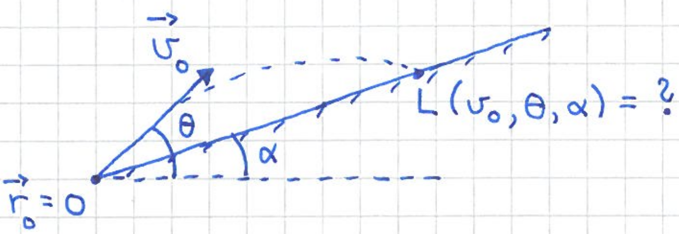
$(g \approx 9.8\ m/s^2)$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + v_{0x}\cdot t + \frac{1}{2}\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{a_x}t^2 = x_0 + v_0 t\cos\theta$$

$$z(t) = z_0 + v_{0z}\cdot t + \frac{1}{2}\underset{\substack{\parallel \\ -g}}{a_z}t^2 = z_0 + v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

Eliminasjon av t gir banen $z(x)$. [Parabel; vis dette!]

Øving 1: Skrått kast i motbakke.



Eks: Hastighetsavhengig akselerasjon, $a = a(v)$.

Gitt $v(0) = v_0$, bestem $v(t)$.

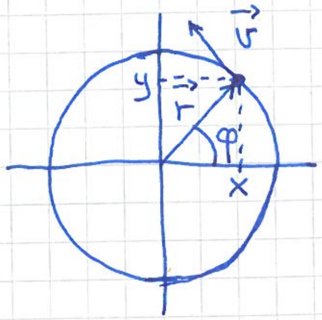
Løsn: $a(v) = dv/dt \Rightarrow dt = dv/a(v)$

$$\Rightarrow t = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{a(v)} \Rightarrow \ldots\ldots$$

[Øving 1]

Sirkelbevegelse [YF 3.4; TM 3.3; LL 1.7, 1.8; HS 2.1.2]

Først: $v = |\vec{v}| = \text{konst.}$ (uniform sirkelbevegelse)



Fra figur: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{konst.}$

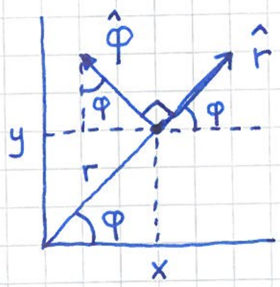
$\vec{r} = r\cos\varphi\ \hat{x} + r\sin\varphi\ \hat{y}$

$\tan\varphi = y/x$

Polarkoordinater: r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom x-aksen og $\vec{r}$

(positiv mot klokka)



$\hat{r} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$

= enhetsvektor radielt (bort fra origo)

$\hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$

= enhetsvektor angulært (mot klokka)

$\hat{r}\cdot\hat{\varphi} = 0$, $\hat{r}\cdot\hat{r} = \hat{\varphi}\cdot\hat{\varphi} = 1$

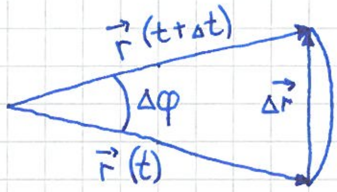
Vinkelhastighet = vinkelendring pr tidsenhet:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Vinkel = buelengde delt på radius:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r} \Rightarrow [\varphi] = \left[\frac{s}{r}\right] = \frac{m}{m} = 1 \quad \text{(evt. rad)}$$

$$\Rightarrow [\omega] = [\varphi/t] = 1/s = s^{-1}$$



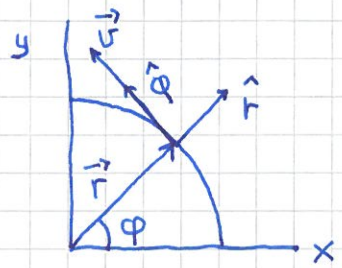
Δs = sirkelbueelement

Hvis $\Delta t \to 0$: $\Delta\varphi \to 0$, $\Delta\vec{r} \perp \vec{r}$, $|\Delta\vec{r}| \approx \Delta s = r \cdot \Delta\varphi$

Dermed:

$$\underline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\,\Delta\varphi}{\Delta t} = r\,\frac{d\varphi}{dt} = \underline{r\,\omega}$$

Retning på $\vec{v}$: $\vec{v} \parallel \Delta\vec{r}$ og $\Delta\vec{r} \perp \vec{r}$ $\Rightarrow$ $\underline{\vec{v} \perp \vec{r}}$



$$\vec{v} = v\,\hat{\varphi} = r\omega\,\hat{\varphi}$$

v = konst. $\Rightarrow$ ω = konst. $\Rightarrow$ φ endres lineært med t:

$$\omega = d\varphi/dt \Rightarrow \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} d\varphi = \int_0^t \omega\,dt \Rightarrow \varphi(t) = \varphi(0) + \omega t = \omega t$$

anta $\varphi(0) = 0$

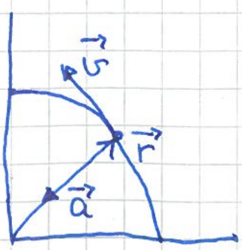
Dermed:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} = r\cos\omega t\,\hat{x} + r\sin\omega t\,\hat{y}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\,\hat{x} + \dot{y}(t)\,\hat{y} = -r\omega\sin\omega t\,\hat{x} + r\omega\cos\omega t\,\hat{y}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\hat{x} + \ddot{y}(t)\,\hat{y} = -r\omega^2\cos\omega t\,\hat{x} - r\omega^2\sin\omega t\,\hat{y}$$

Dvs: $\boxed{\vec{a} = -\omega^2\,\vec{r}}$ Akselerasjon ved uniform sirkelbevegelse (sentripetalakselerasjon)



$\vec{r} = r\,\hat{r}$, $v = \omega r$

$$\Rightarrow \vec{a} = -r\omega^2\,\hat{r} = -\frac{v^2}{r}\,\hat{r}$$

Flere nyttige størrelser for sirkelbevegelse:

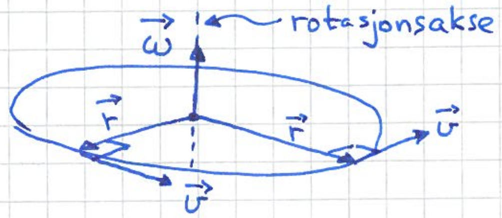
Vinkelakselerasjon: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ $\quad [\alpha] = s^{-2}$

Periode: T = tid pr omdreining $\quad [T] = s$

Frekvens: f = antall omdreininger pr tidsenhet $\quad [f] = Hz = s^{-1}$

Dermed: $v = \frac{2\pi r}{T}$, $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$, $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

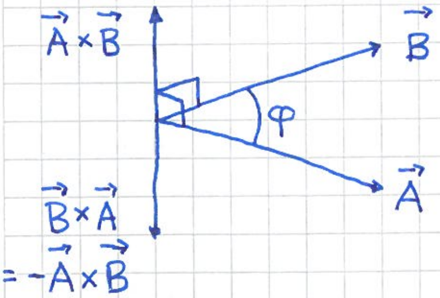
Vinkelhastighet som vektor:



La $\vec{\omega}$ peke langs rot, aksen

$\Rightarrow$ kan da skrive $\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$

Kryssprodukt:



- $\vec{A} \times \vec{B} \perp \vec{A}$ og $\vec{B}$
- Fortegn via høyrehåndsregel
- $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin\varphi$
  $= A \cdot B \cdot \sin\varphi$

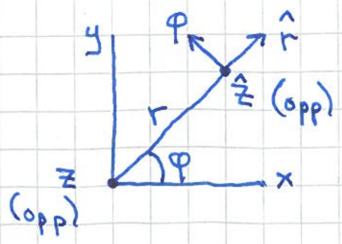
For sirkelbevegelsen:

$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin\frac{\pi}{2} = \omega r = v$, OK!

$\vec{\omega}$ opp $\Rightarrow$ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ mot klokka (og omvendt)

Enhetsvektorer og kryssprodukt:

$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$, $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$, $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$, $\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0$



$\hat{r} \times \hat{\varphi} = \hat{z}$, $\hat{\varphi} \times \hat{z} = \hat{r}$, $\hat{z} \times \hat{r} = \hat{\varphi}$

Newtons lover [YF 4,5 ; TM 4,5 ; LL 2,3 ; HS 2]

Empiriske lover (dvs: basert på eksperimenter, erfaring):

N1 : $\boxed{\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{konst.}}$

Null netto ytre kraft ⇒ legemet forblir i ro eller i rettlinjet bevegelse med uendret hastighet.

N2 : $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$

Netto ytre kraft $\vec{F}$ ⇒ legemet får akselerasjon proporsjonal med $\vec{F}$; m = legemets masse

N3 : $\boxed{\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}}$

Hvis A virker på B med kraft $\vec{F}_{AB}$, så virker B på A med kraft $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$. Legemene A og B vekselvirker.

Enhet: $[F] = [m \cdot a] = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2 = \text{N}$ (newton)

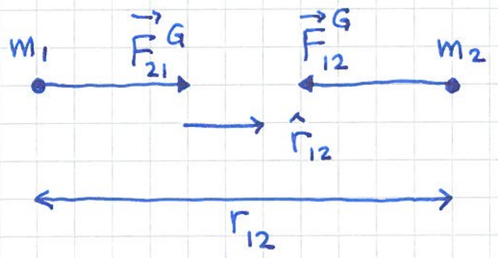
Fundamentale krefter i naturen

[YF 5.5 ; TM 4.2 ; LL 2.1 ; HS 2.2.2]

- Gravitasjon: Svak tiltrekning mellom legemer pga masse
- Elektromagnetisk: Tiltrekning eller frastøtning pga elektrisk ladning

(• Svake og sterke kjernekrefter: Kort rekkevidde, hhv ca 10^{-18} m og 10^{-15} m, beskriver hhv radioaktivitet og at kjernepartiklene holdes sammen.)

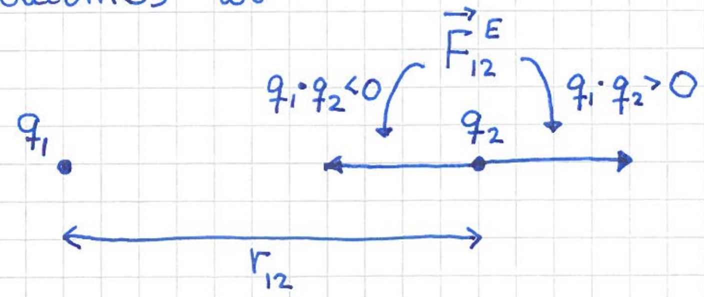
Newtons gravitasjonslov:



$$\boxed{\vec{F}^G_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}}$$

$G \simeq 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2/kg^2}$

Coulombs lov:



$$\boxed{\vec{F}^E_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}}$$

$[q] = \mathrm{C}$ (coulomb)

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2/C^2}$; $\varepsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\,m^2}$
(vakuumpermittiviteten)

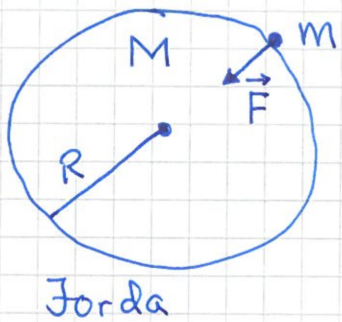
Mellom 2 elektroner: $F^G / F^E \sim 10^{-43}$
[Sjekk selv! $m \sim 10^{-30}$ kg , $q \sim 10^{-19}$ C]

Mellom jorda og månen: $F^G / F^E \sim 10^{15}$
[Selv om vi antar netto ladning $q \sim 10^6$ C på begge]

"Dagligdagse" objekter er (omtrent) elektrisk nøytrale
$\Rightarrow$ coulombkreftene er i stor grad nøytralisert
$\Rightarrow$ "hverdagen" styres av både F^G og F^E

Masse og tyngde

[YF 4.4 ; TM 4.4 ; LL 2.5 ; HS 2.2.1]



$M \simeq 6 \cdot 10^{24}$ kg , $R \simeq 6370$ km

$\Rightarrow$ m ved jordas overflate trekkes mot jordas sentrum med <u>tyngdekraften</u> $\vec{F}$.

$$F = |\vec{F}| = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \simeq m \cdot g$$

med $g = G \cdot M / R^2 \simeq 9.8 \ m/s^2$ = tyngdens akselerasjon

Hvis mg er eneste kraft : fritt fall !

Da blir : $mg \overset{N2}{=} ma$, dvs $\underline{a = g}$