Eks: Tyngdefeltet

$\vec{F} = m\vec{g} = -mg\hat{z}$

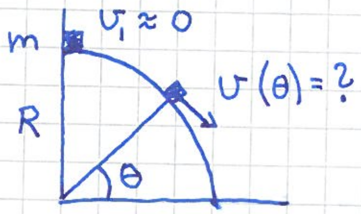
- Velg $U(0) = 0$ og bestem $U(z)$
- Anta $v(0) = 0$ og bestem $v(z)$ $(z<0)$

Løsning: • $U(z) = -\int_0^z \underbrace{(-mg\hat{z})}_{\vec{F}} \cdot \underbrace{(\hat{z}\,dz)}_{d\vec{r}} = \underline{\underline{mgz}}$

• $E(0) = U(0) + K(0) = 0 = U(z) + K(z)$
$= mgz + \frac{1}{2}mv(z)^2$

$\Rightarrow \quad v(z) = \underline{\underline{\sqrt{-2gz}}} \quad (z<0)$

Eks: Gli på kuleflate (uten friksjon)



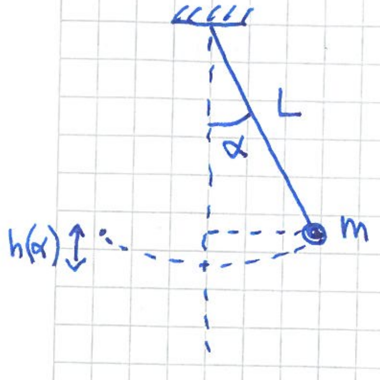
Løsn: E er bevart

$\Rightarrow \frac{1}{2}mv(\theta)^2 + mgR\sin\theta = mgR$

$\Rightarrow v(\theta) = \underline{\underline{\sqrt{2gR(1-\sin\theta)}}}$

[Spm: Fra der hvor normalkrafta N fra underlaget forsvinner $(N=0)$ har vi et "skrått kast". Ved hvilken vinkel θ skjer dette?]

Eks: Matematisk pendel



Bestem $E(\alpha, \dot{\alpha})$.

Løsn: $U(\alpha) = mgh(\alpha) = mgL(1-\cos\alpha)$ [Velger $U(0)=0$]

$K(\dot{\alpha}) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(L\dot{\alpha})^2$

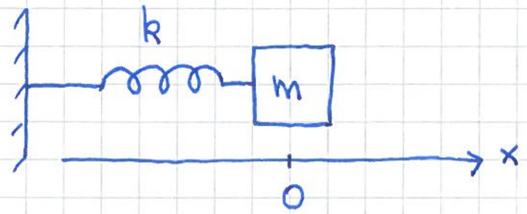
$\Rightarrow \quad \underline{\underline{E(\alpha, \dot{\alpha}) = \frac{1}{2}mL^2\dot{\alpha}^2 + mgL(1-\cos\alpha)}}$

Svingninger [YF 14; TM 14; LL 9; HS 6]

= oscillasjoner = periodisk oppførsel omkring likevekt

Eks: masse/fjær, pendel, gitarstreng, vibrerende atomer i krystall, ...

Harmonisk oscillator [YF 14.2; TM 14.1; LL 9.1–9.3; HS 6.1]



Likevekt ($F=0$) med m i $x=0$.

Strukket fjær ($x>0$) :

Sammenpresset fjær ($x<0$) :

Ideell fjær : $F \sim |x|$

$$\boxed{\vec{F} = -k\,x\,\hat{x}}$$

Hookes lov

N2 : $-kx = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Innfør $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$ Ligning for harm. osc. i 1D

Generell løsning:

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ evt. $x(t) = B\cos\omega t + C\sin\omega t$

2. ordens diffligning. $\Rightarrow$ 2 integrasjonskonstanter,

A og φ evt B og C

[A og φ fastlegges via 2 initialbetingelser, f.eks. $x(0)=x_0$ og $\dot{x}(0)=v_0$]

[$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ $\Rightarrow$ sammenheng mellom A,φ og B,C]

A = amplitude = max utsving

ω = vinkelfrekvens = vinkelhastighet $\quad [\omega] = s^{-1}$

$T = 2\pi/\omega$ = periode = tid pr svingning $\quad [T] = s$

$f = T^{-1}$ = frekvens = antall svingn. pr tidsenhet $\quad [f] = Hz = s^{-1}$

$\omega t + \varphi$ = svingningens fase

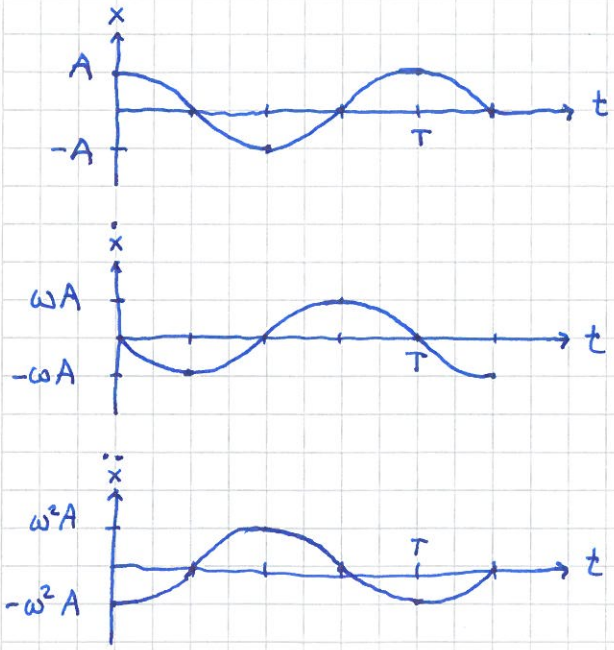
φ = fasekonstant $\quad [\varphi] = 1$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

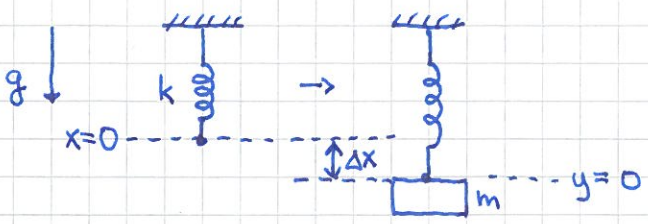
$$\Rightarrow \dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = \omega A \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi + \pi) = -\omega^2 x(t)$$

Anta f.eks. $\varphi = 0$ og $A > 0$:



Hvis vertikalt i tyngdefeltet (Øving 3 og Lab):



$\Rightarrow$ Harmonisk svingn. om $y = 0$, med $\omega = \sqrt{k/m}$ som før.

Energi i harmonisk oscillator

[YF 14.3; TM 14.2; LL 9.4 ~~&~~ ~~4.5~~]

Massens kinetiske energi:

$$K(t) = \frac{1}{2}m\,\dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2}\underbrace{m\omega^2}_{=k}A^2\sin^2(\omega t+\varphi) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

Potensiell energi i fjæra:

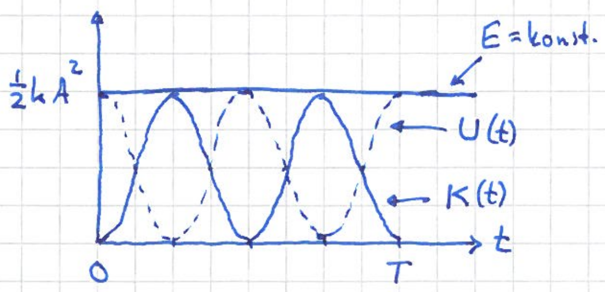
$$U = -\int_0^x F(x)\cdot dx = -\int_0^x (-kx)\,dx = \frac{1}{2}kx^2$$

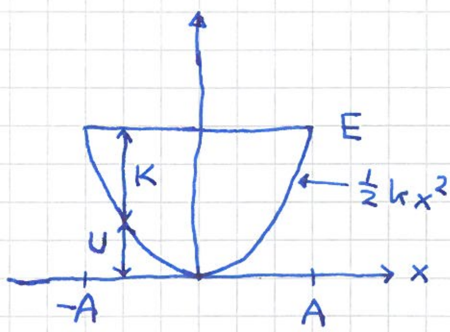
$$\Rightarrow U(t) = \frac{1}{2}k\,x(t)^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

Total energi: $E = K + U = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$ = konstant

$\Rightarrow$ vi har konservativt system; E er bevart

Anta $\varphi = 0$:





Enkel harmonisk oscillator, oppsummering:

- F er proporsjonal med utsvinget fra likevekt
- U —— " —— kvadratet av utsvinget
- Bevegelsesligning: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
- "Utsving" kan være lengde, vinkel etc

Fra sist:

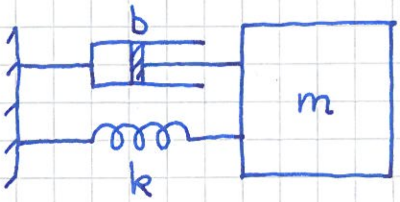
$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \; ; \quad \omega = \sqrt{k/m}$$
$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Enkel harmonisk oscillator

Dempet svingning [YF 14.7; TM 14.4; LL 9.7; HS 6.2.1]

Friksjon $\Rightarrow$ fri svingninger dempes (og dør ut)

Antar $f = -b\dot{x}$ (som for langsom bevegelse i fluid; s. 14)



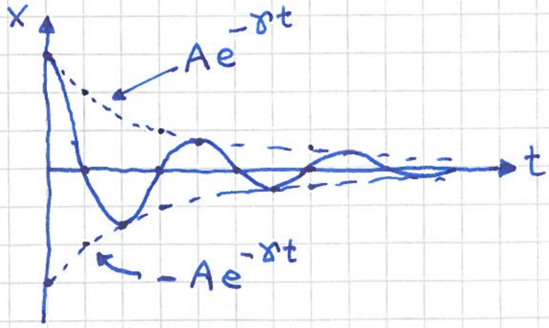
N2: $-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$

$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \; ; \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \; \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$[\gamma] = [\omega_0] = s^{-1}$

Underkritisk demping, $\gamma < \omega_0$ (dvs $b < 2m\sqrt{k/m} = \sqrt{4k \cdot m}$)

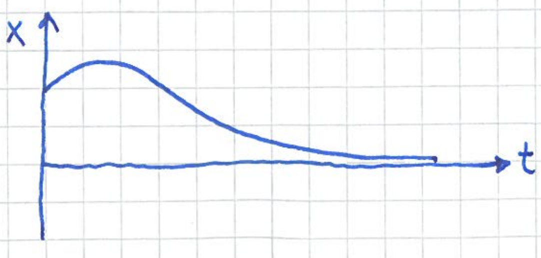
$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) \; ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



- redusert frekvens pga demping ($\omega < \omega_0$)
- amplituden, $Ae^{-\gamma t}$, avtar eksponentielt med t
- A, φ fastlegges med 2 initialbetingelser

Overkritisk demping, $\gamma > \omega_0$

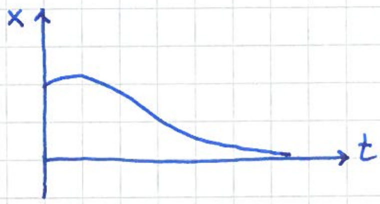
$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t} \; ; \quad \alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$



(dvs ingen svingninger)

Kritisk demping, $\gamma = \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} + B t e^{-\gamma t}$$



Eks: Støtdempere i bil dempes nær kritisk

$\Rightarrow$ mest behagelig på humpete vei

Tvungen svingning. Resonans [YF 14.8; TM 14.5; LL 9.9; HS 6.3]

$F_y(t) = F_0 \cos \omega t$ = ytre kraft, antas harmonisk

N2: $-kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$ [inhomogen 2. ordens diff. ligning]

Løsning: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

der homogen løsn. x_h oppfyller $\ddot{x}_h + 2\gamma \dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$

og partikulær løsn. x_p —"— $\ddot{x}_p + 2\gamma \dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$

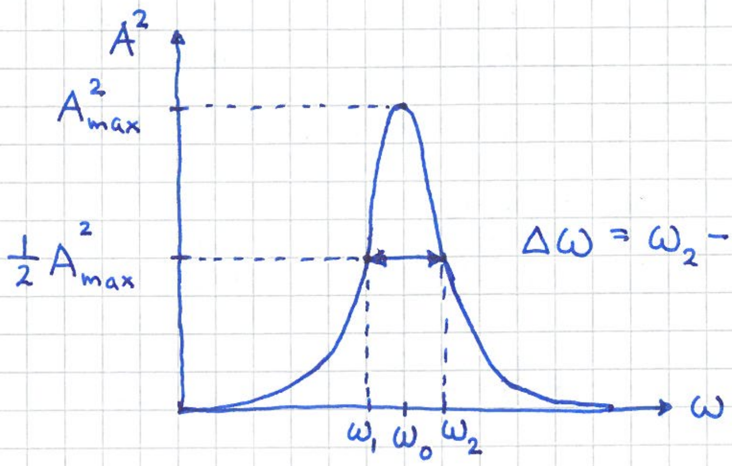
I starten (dvs: før $e^{-\gamma t}$ blir mye mindre enn 1) bidrar både x_h og x_p til et (som regel) komplekst innsvingningsforløp (jf Laboppg.).

Etter "lang tid", slik at $\gamma t \gg 1$ og $e^{-\gamma t} \approx 0$, vil $x_h(t) \to 0$, og $x(t) \approx x_p(t)$.

"Gjetter" $x_p(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$, verifiseres ved innsetting, og finner den frekvensavhengige amplituden

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\gamma = \frac{b}{m}$$

som viser at vi får <u>resonans</u>: Med svak demping (dvs liten γ) og ytre kraft med frekvens ω i nærheten av systemets <u>egenfrekvens</u> $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, så blir amplituden A <u>stor</u>:



$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ = halvverdibredden

$\Delta\omega$ refererer til oscillatorens energi, som er prop. med A^2 (se s. 24). Liten γ $\Rightarrow$ skarp resonans, med $\Delta\omega \approx 2\gamma$.

Resonanstoppens Q-faktor (Q for "quality"):

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma} \qquad (\gg 1 \text{ hvis } \gamma \ll \omega_0)$$

Frekvensavhengig fasekonstant:

$$\varphi(\omega) = \arctan\left\{\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right\}$$

Tilført effekt av $F_y(t) = F_0 \cos\omega t$ ved resonans, $\omega \approx \omega_0$:

$$P(t) = F_y(t) \cdot \dot{x}_p(t) = F_0 \cos\omega t \cdot \omega A(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \varphi = \arctan 0 = 0, \quad \text{og} \quad A = A(\omega_0) = A_{max} = \frac{F_0}{b \cdot \omega_0}$$

$$\Rightarrow P(t) = \frac{F_0^2}{b} \cdot \cos^2 \omega_0 t \geq 0 \quad \text{hele tiden;}$$

dvs <u>maksimal</u> tilført effekt ved resonans!

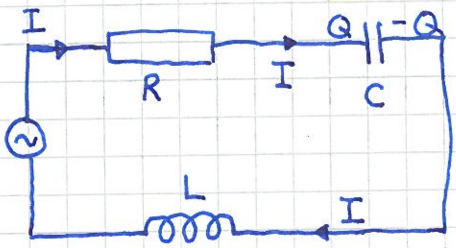
Elektrisk svingekrets

(Denne siden er ikke pensum i TFY4115; kun orienteringsstoff!)

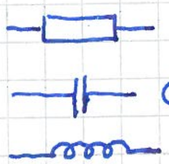
4104 12.09.

4115 17.09.

$V(t) = V_0 \cos \omega t$



$I = dQ/dt = \dot{Q}$



R : motstand

C : kondensator

L : spole

Spenning over motstand R : $V_R = R \cdot I = R \cdot \dot{Q}$ (Ohms lov)

— " — kapasitans C : $V_C = Q/C$

— " — induktans L : $V_L = L \cdot dI/dt = L \cdot \ddot{Q}$

Kirchhoffs spenningsregel $\Rightarrow$ $L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C} Q = V_0 \cos \omega t$

Dvs nøyaktig samme diff.ligning for Q, ladningen på kondensatoren, som for x, massens utsving fra likevekt, i det mekaniske svingesystemet : $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$

Vi har dermed analoge ("tilsvarende") størrelser :

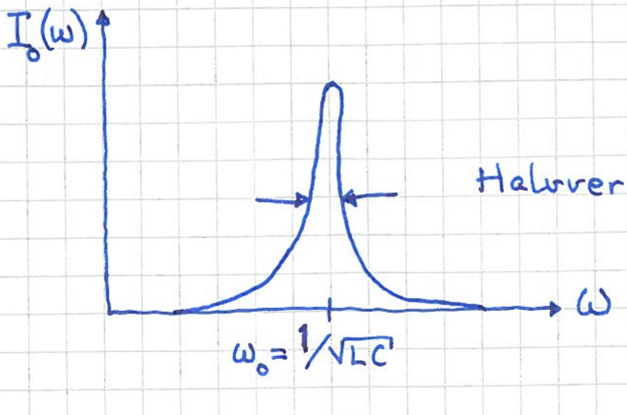
$m \leftrightarrow L$, $b \leftrightarrow R$, $k \leftrightarrow 1/C$, $x \leftrightarrow Q$, $\dot{x} \leftrightarrow I$

$\omega_0^{mek} = \sqrt{k/m} \longleftrightarrow \omega_0^{el} = \sqrt{1/LC}$ osv.

$Q(t) = Q_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow I(t) = \dot{Q}(t) = \omega Q_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$

med $Q_0(\omega) = (V_0/L) / \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$; $2\gamma = R/L$

Resonans, dvs stor strømamplitude $I_0(\omega) = \omega Q_0(\omega)$, når $\omega \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$:



Halvverdibredde $\Delta\omega \approx 2\gamma = R/L$

Eks : $L = 22$ mH, $C = 0.15\ \mu F$, $R = 20\ \Omega$

$\Rightarrow f_0 = 2.77$ kHz , $\Delta f \approx 0.29$ kHz, $Q = f_0/\Delta f \approx 10$