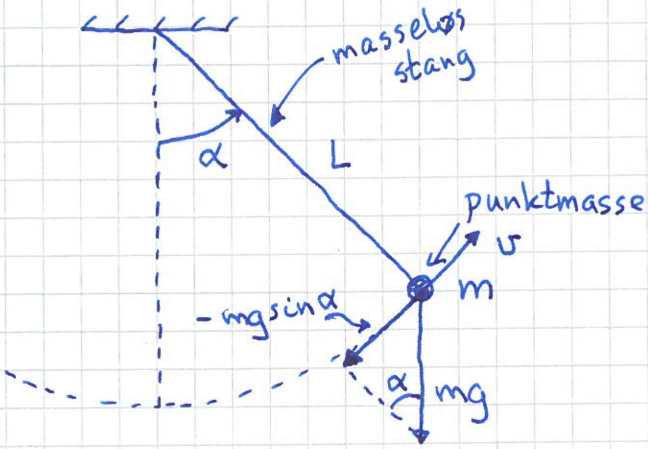
Eksempel, inkl. numerisk løsningsmetode

[TM 5.4]

(Øving 4, oppgave 1)

Matematisk pendel (se s. 21, samt øving 2, oppg. 4):



N2 ∥ sirkelbuen:

$$-mg \sin\alpha = m a_{\parallel}$$

$$a_{\parallel} = L\ddot{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\alpha} + \frac{g}{L}\sin\alpha = 0$$

Hvis små utsving, $|\alpha| \ll 1$: $\sin\alpha \approx \alpha$

$\Rightarrow \quad \ddot{\alpha} + \frac{g}{L}\alpha = 0$

$\Rightarrow \quad \alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi)$

} Enkel harmonisk oscillator med $\omega = \sqrt{g/L}$, dvs $T = 2\pi\sqrt{L/g}$

Hvis større utsving: $\ddot{\alpha} + \frac{g}{L}\sin\alpha = 0$ kan ikke løses analytisk; numerisk løsningsmetode er nødvendig.

Enkleste metode er såkalt "forward Euler":

Vi har (pr def.)

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{\dot{\alpha}(t+dt) - \dot{\alpha}(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \dot{\alpha}(t+dt) = \dot{\alpha}(t) + \ddot{\alpha}(t)\,dt$$

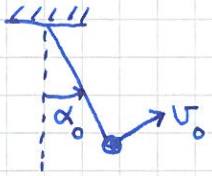
$$\dot{\alpha}(t) = \frac{\alpha(t+dt) - \alpha(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \alpha(t+dt) = \alpha(t) + \dot{\alpha}(t)\,dt$$

La $dt \to$ endelig tidssteg Δt og "$= \;\to\; \approx$":

$$\alpha(t+\Delta t) \approx \alpha(t) + \dot{\alpha}(t)\,\Delta t$$

$$\dot{\alpha}(t+\Delta t) \approx \dot{\alpha}(t) + \ddot{\alpha}(t)\,\Delta t \overset{\text{her}}{=} \dot{\alpha}(t) - \Delta t \cdot \frac{g}{L} \cdot \sin\alpha(t)$$

Dermed, med initialbetingelser $\alpha(0) = \alpha_0$ og $v(0) = v_0$, dvs $\dot{\alpha}(0) = v_0 / L$:



$\boxed{t=0}$

$$\alpha(\Delta t) \approx \alpha(0) + \dot{\alpha}(0)\,\Delta t = \alpha_0 + \frac{v_0}{L}\Delta t$$

$$\dot{\alpha}(\Delta t) \approx \dot{\alpha}(0) + \ddot{\alpha}(0)\,\Delta t = \frac{v_0}{L} - \Delta t \cdot \frac{g}{L} \cdot \sin\alpha_0$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha[(n+1)\cdot\Delta t] &\approx \alpha[n\cdot\Delta t] + \dot{\alpha}[n\cdot\Delta t]\cdot\Delta t \\ \dot{\alpha}[(n+1)\cdot\Delta t] &\approx \dot{\alpha}[n\cdot\Delta t] + \ddot{\alpha}[n\cdot\Delta t]\cdot\Delta t \end{aligned}\right\} n = 0,1,2,\ldots$$

Kan nå blant annet:

- plotte $\alpha(t)$, $\dot{\alpha}(t)$ etc.
- regne ut $K(t)$, $U(t)$ og $E(t)$ og sjekke energibevarelse (se s. 21)
- sammenligne numerisk løsning med harm.osc.-tilnærmelsen
- inkludere friksjon, med $f = -bv$ evt $f = -Dv^2$ (se s. 14)
- inkludere ytre kraft $F_y(t)$

etc. etc.

Andre (og bedre) num. metoder for løsn. av ordinære diff. lign:

- Verlet
- Runge-Kutta

Verlet:

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t-\Delta t)}{2\Delta t}$$

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{\dot{\alpha}(t+\Delta t/2) - \dot{\alpha}(t-\Delta t/2)}{\Delta t}$$

$$= \frac{\dfrac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} - \dfrac{\alpha(t) - \alpha(t-\Delta t)}{\Delta t}}{\Delta t}$$

$$= \frac{\alpha(t+\Delta t) - 2\alpha(t) + \alpha(t-\Delta t)}{\Delta t^2}$$

Impuls og impulsbevarelse [YF 8; TM 8; LL 5; HS 3.6, 3.7]

[Terminologi: impuls ≡ bevegelsesmengde]

[Engelsk: (linear) momentum]

N2 for legeme med (konstant) masse m:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

impuls = masse · hastighet

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \qquad [p] = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

Dermed: $\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$ N2

som gir

Lov om impulsbevarelse:

> Hvis sum av ytre krefter på et legeme er null, er legemets impuls bevart: $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konst.}$

Kollisjoner [YF 8.3+8.4; TM 8.3; LL 5.3; HS 3.7.1]

= (som regel kortvarige) støt mellom legemer

Elastisk støt: $\Delta K = 0$ (energien er bevart)

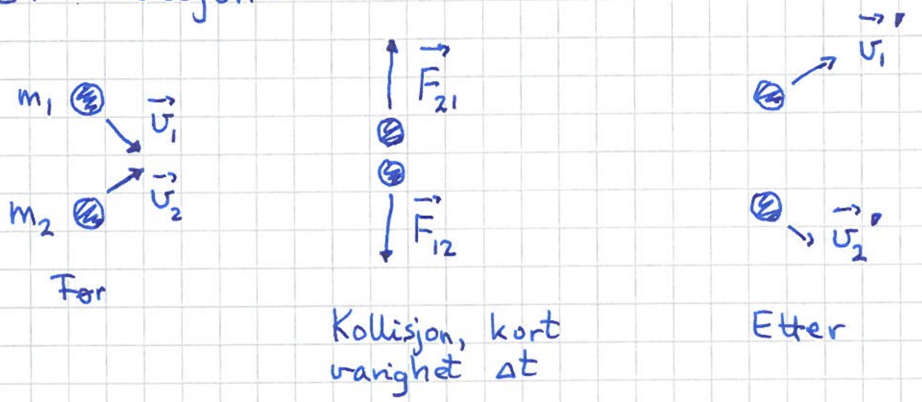
Uelastisk støt: $\Delta K < 0$ (—"— ikke bevart)

Fullstendig uelastisk støt: Legemene henger sammen og har felles hastighet etter kollisjonen. (Gir maksimalt energitap $|\Delta K|$.)

Tapt mekanisk energi ΔK → deformasjon, varme, lyd, ...

Men: Dersom $\vec{F}_{ytre} = 0$ (evt. neglisjerbar) under kollisjonen, er $\Delta \vec{p} = 0$ for alle typer kollisjoner.

Har typisk store men ukjente indre krefter i en kollisjon:



N3 garanterer impulsbevarelse for systemet $m_1 + m_2$:

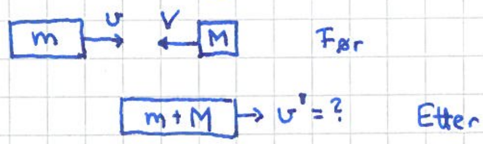
$$\vec{F}_{21} \overset{N3}{=} -\vec{F}_{12}$$

$$\overset{N2}{\Rightarrow} \quad \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{P}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst.}$$

Eks: Fullstendig uelastisk støt.



Løsn: $P_{før} = mv - MV$

$= P_{etter} = (m+M)\,v'$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{v' = \frac{mv - MV}{m+M}}}$$

Eks: $\langle F \rangle$ på bordtennisball = ? $\quad \langle F \rangle / mg$ = ?

Løsning: $m = 2.7\,g$, $v_i \sim 10$ m/s, $v_f \sim 30$ m/s, $\Delta t \sim 1$ ms

$$\Rightarrow \langle F \rangle \approx \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} = \frac{2.7 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg} \cdot 40\ \mathrm{m/s}}{10^{-3}\ \mathrm{s}} = \underline{\underline{108\ \mathrm{N}}}$$

$$\langle F \rangle / mg \approx \frac{\Delta v}{g\,\Delta t} = \frac{\langle a \rangle}{g} \approx \frac{40 \cdot 10^{3}\ \mathrm{m/s^2}}{10\ \mathrm{m/s^2}} = \underline{\underline{4000}}$$

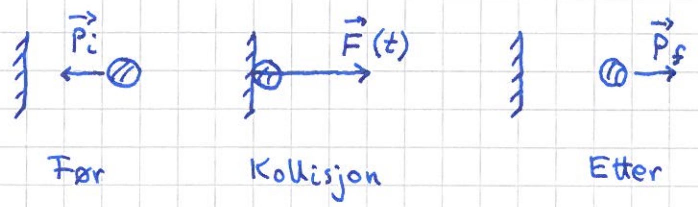
Dvs: Helt OK å neglisjere ytre kraft mg i støtet

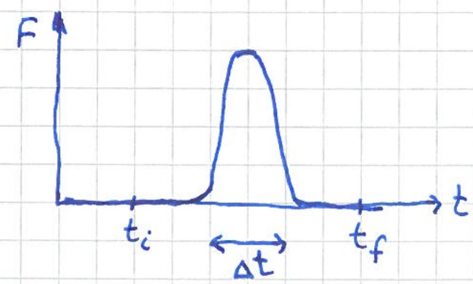
Kraftstøt [YF 8.1; TM 8.3; LL 5.2; HS 3.7.1]

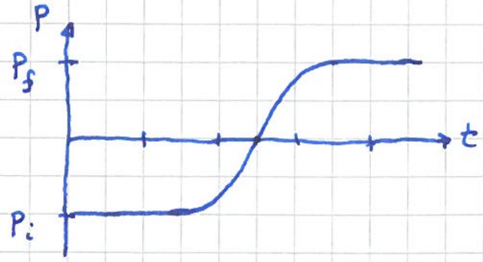
(Eng: impulse) ("kraftimpuls")

= impulsendring i støt

Ball mot vegg:







Ballens impulsendring i kollisjonen:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt \equiv \text{kraftstøtet } (\underline{\text{fra}} \text{ veggen } \underline{\text{på}} \text{ ballen})$$

[Hva blir <u>veggens</u> impulsendring i denne kollisjonen?]

Sentralt støt [YF 8.2-8.4; TM 8.3 ; LL 5.3 ; HS 3.7.1]

Før: $\underset{m}{\bullet} \longrightarrow v \qquad V \longleftarrow \underset{M}{\bullet}$ (i)

$(- \longleftrightarrow +)$

Etter: $v' \longleftarrow \underset{m}{\bullet} \quad \underset{M}{\bullet} \longrightarrow V'$ (f)

$$\Delta p = 0 \Rightarrow \underbrace{mv + MV}_{p_i} = \underbrace{mv' + MV'}_{p_f}$$ (alle typer støt)

(a) Elastisk støt, $\Delta K = 0$:

$$\underbrace{\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2}_{K_i} = \underbrace{\frac{1}{2} m v'^2 + \frac{1}{2} M V'^2}_{K_f}$$

Omskriving:

$$m(v + v')(v - v') = M(V' + V)(V' - V) \quad (1) \quad (\Delta K = 0)$$

$$m(v - v') = M(V' - V) \quad (2) \quad (\Delta p = 0)$$

Triks: Ta (1) / (2)

$$\Rightarrow \quad v + v' = V + V'$$

dvs $v' - V' = -(v - V)$ (3) (relativhastigheten skifter fortegn)

Finner v' og V' fra (2) og (3):

$$v' = \frac{M}{m+M} \left\{ 2V + v \cdot \frac{m-M}{M} \right\}$$

$$V' = \frac{m}{M+m} \left\{ 2v + V \cdot \frac{M-m}{m} \right\}$$

(merk ombytte $m \to M$, $v \to V$ etc. når $v' \to V'$)

(b) Fullstendig uelastisk støt:

$$v' = V' = \frac{mv + MV}{m + M}$$ (fra $\Delta p = 0$)

(c) Delvis uelastisk støt: Har kun 1 ligning ($\Delta p = 0$) for 2 ukjente (v', V'). Trenger en ekstra opplysning for å bestemme både v' og V'.

Eks: Elastisk kollisjon med vegg

Sjekk: Er $\Delta p = 0$? Er $\Delta K = 0$?

Løsning:

$$v' = \frac{M}{m+M}\left\{0 + v \cdot \frac{m-M}{M}\right\} \approx \frac{M}{M} \cdot v \cdot \left(\frac{-M}{M}\right) = \underline{\underline{-v}} \qquad \text{(som ventet)}$$

$$V' = \frac{m}{M+m}\left\{2v + 0\right\} \approx \frac{m}{M} \cdot 2v \approx \underline{\underline{0}} \qquad (\text{ -- " -- })$$

Er $\Delta p = 0$?

$$p' = mv' = -mv, \qquad P' = MV' \approx M \cdot \frac{m}{M} \cdot 2v = 2mv$$

$$p = mv, \qquad P = MV = 0$$

$$\Rightarrow \quad p' + P' = p + P = mv \qquad \text{ok!}$$

Er $\Delta K = 0$?

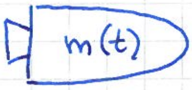
$$K_m' = \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} m v^2, \qquad K_M' = \frac{1}{2} M V'^2 \approx \frac{1}{2} M \cdot \left(\frac{m}{M} \cdot 2v\right)^2$$
$$= 2 \cdot \frac{m^2}{M} \cdot v^2 \approx 0$$

$$K_m = \frac{1}{2} m v^2, \qquad K_M = \frac{1}{2} M V^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad K_m' + K_M' = K_m + K_M = \frac{1}{2} m v^2 \qquad \text{ok!}$$

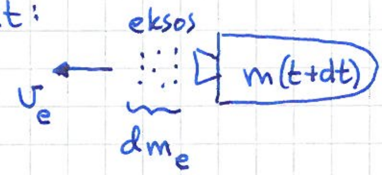
Rakettprinsipp [YF 8.6; TM 8.5; LL 5.4; HS 3.7.2]

Ved tid t:



$\longrightarrow v(t)$ $\qquad p(t) = m(t)\,v(t)$

Ved tid $t+dt$:



$\longrightarrow v(t+dt)$

$$p(t+dt) = \underbrace{m(t+dt)}_{m(t)+dm} \cdot \underbrace{v(t+dt)}_{v(t)+dv} + \underbrace{dm_e}_{-dm} \cdot \underbrace{v_e(t)}_{v(t)+u}$$

der u = eksosens hastighet relativt raketten

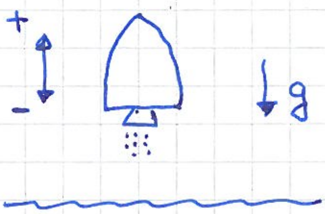
$$= \underbrace{m(t)v(t)}_{=p(t)} + m(t)\,dv + \underbrace{dm\cdot v(t) - dm\cdot v(t)}_{=0} - u\,dm$$

"Outer space": $F_{ytre} = 0 \overset{N2}{\Rightarrow} p(t+dt) = p(t) \Rightarrow m(t)\,dv = u\,dm$

$$\Rightarrow m(t)\cdot\frac{dv}{dt} = u\cdot\frac{dm}{dt} = u\dot{m} \qquad (u<0,\ \dot{m}<0)$$

$$\Rightarrow \text{Skyvkraft}: \quad F_{skyv} = u\dot{m} > 0$$

I tyngdefeltet: $F_{ytre} = -m(t)g$



$\Rightarrow$ Totalkraft på (rest-)raketten:

$F_{skyv} + F_{ytre}$

$$\overset{N2}{\Rightarrow} \quad u\dot{m} - mg = ma$$

Øving 5: Saturn V, trinn 1. [TM Ex. 8.19; litt andre tall]

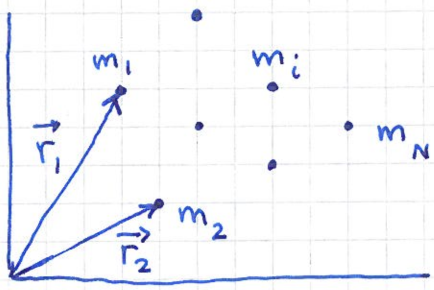
[HS 3.7.2; — " —]

Så langt i kurset: Punktmasser (eller: form og størrelse på legemet uten praktisk betydning)

Nå: Partikkelsystemer; for det meste <u>stive legemer</u>.
<u>Rotasjonsdynamikk</u> blir et aktuelt tema!

Men aller først:

<u>Massesenter, tyngdepunkt</u> [YF 8.5; TM 5.5; LL 5.6+5.8; HS 3.5]



System med N partikler, masser $m_1, m_2, \dots, m_N$ i posisjoner $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$

Massesenteret (CM = center of mass):

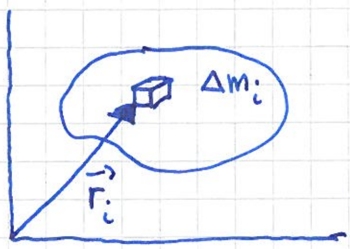
$$\vec{R}_{CM} \overset{\text{def.}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Total masse: $M = \sum_i m_i$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i}$$

(Med konstant g over hele systemet er <u>tyngdepunktet</u> samme sted som massesenteret.)

Med <u>kontinuerlig massefordeling</u>: [YF oppg 8.115 + 8.116; TM 5.5; LL 6.1; HS 3.5]



$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i \Delta m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} \xrightarrow{\Delta m_i \to 0} \frac{\int dm \cdot \vec{r}}{\int dm}$$

$M = \int dm$ = total masse

$$\Rightarrow \boxed{\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm}$$

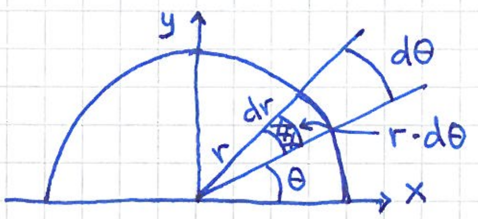
Her går integralet "over legemet" (der massen <u>er</u>!)

Masseelementet:

$$dm = \begin{cases} \rho \cdot dV \ ; & \rho = \text{masse pr volumenhet} \ ; \ dV = \text{volumelement} \ (3D) \\ \sigma \cdot dA \ ; & \sigma = \text{—"— flate —"—} \ ; \ dA = \text{flate —"—} \ (2D) \\ \lambda \cdot d\ell \ ; & \lambda = \text{—"— lengde —"—} \ ; \ d\ell = \text{linje —"—} \ (1D) \end{cases}$$

Et hensiktsmessig <u>koordinatsystem</u> velges ut fra legemets form og eventuell symmetri.

Eks: Halvsirkulær tynn skive, radius R, masse σ pr flateenhet



$$dm = \sigma \cdot dA = \sigma \cdot r\,d\theta \cdot dr$$

$$M = \sigma \cdot \tfrac{1}{2}\pi R^2$$

$$\vec{r} = \hat{x}\,x + \hat{y}\,y = \hat{x}\,r\cos\theta + \hat{y}\,r\sin\theta$$

<u>Ser</u> at $X_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{R}_{CM} = Y_{CM}\,\hat{y}$

med $Y_{CM} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int y \cdot dm = \dfrac{2}{\sigma \pi R^2} \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi} r\sin\theta \cdot \sigma \cdot r\,d\theta \cdot dr$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \underbrace{\left(\int_0^R r^2\,dr\right)}_{=\frac{1}{3}R^3} \cdot \underbrace{\left(\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\right)}_{=\Big|_0^\pi(-\cos\theta) = 1+1=2} = \underline{\underline{\frac{4}{3\pi}R \approx 0.42\,R}}$$

Oppg, 1D: Vis at $Y_{CM} = \dfrac{2}{\pi}R$ for halvsirkel

Oppg, 3D: Vis at $Y_{CM} = \dfrac{3}{8}R$ for halvkule