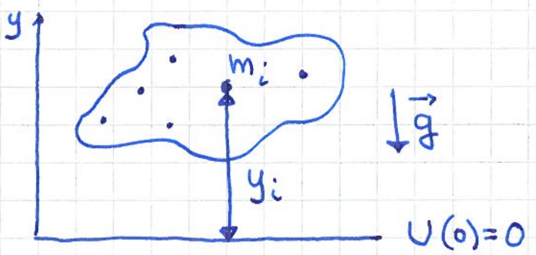
Potensiell energi for partikkelsystem i tyngdefeltet



$$U = \sum_i U_i = \sum_i m_i g y_i \overset{\text{anta}}{\underset{g=\text{konst.}}{=}} g \sum_i m_i y_i = \underline{g M Y_{CM}}$$

Dvs: Som om hele massen $M = \sum_i m_i$ var samlet i høyden $Y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i$, og da f.eks. i massesenteret $\vec{R}_{CM}$.

Tyngdepunktbevegelsen [YF 8.5; TM 5.5; LL 5.8; HS 3.5]

Ser på system med N masser, $m_1, m_2, \cdots, m_N$.

N2 for m_i: $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$

der

$\vec{F}_{i,ytre}$ = ytre kraft på m_i

$\vec{F}_{ji}$ = ("indre") kraft fra m_j på m_i

$\Rightarrow \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$ = total indre kraft på m_i

Ta $\sum_i$ av ligningen ovenfor: $\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_{i,ytre} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} \left(M \cdot \vec{R}_{CM} \right) = M \cdot \ddot{\vec{R}}_{CM}$$

$\sum_i \vec{F}_{i,ytre} = \vec{F}_{ytre}$ = netto ytre kraft på systemet

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}_{=0} + \underbrace{\vec{F}_{31} + \vec{F}_{13}}_{=0} + \cdots + \underbrace{\vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N}}_{=0} = 0 \quad \text{(pga N3)}$$

Dermed:
$$\boxed{M \ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}}$$

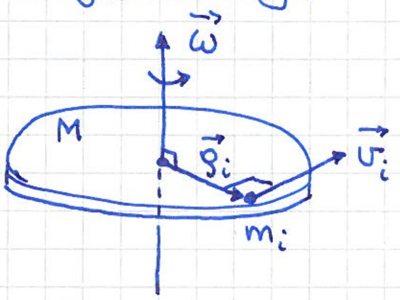
Dvs: $\vec{R}_{CM}$ beveger seg som om hele M var samlet i $\vec{R}_{CM}$ og ble utsatt for summen av alle ytre krefter som virker på systemet. I tillegg kommer <u>rotasjon om CM</u>. [+ evt. vibrasjoner, som ikke er tema her]

Rotasjon

[YF 9+10; TM 9+10; LL 5.5+5.9+6; HS 4+5]

Først: Rask gjennomgang av ren rotasjon om fast akse.
Dernest: Grundigere og mer generell gjennomgang.

Rotasjonsenergi



$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\rho_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2$$

s.8: $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$; $v_i = \rho_i \omega$

Treghetsmoment

$I \overset{\text{def}}{=} \sum_i m_i \rho_i^2$ = legemets treghetsmoment (om gitt akse)

Dermed:

$K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$ [Translasjonsanalogi: $K_{trans} = \frac{1}{2} M V^2$]

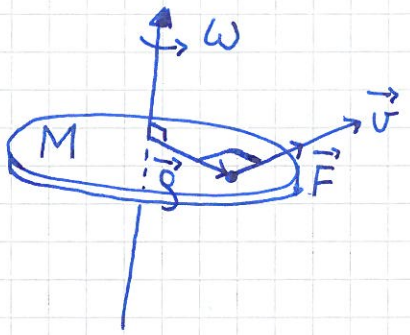
Hvis kontinuerlig massefordeling:

$m_i \rightarrow \Delta m_i \xrightarrow{\Delta m_i \to 0} dm$, og $\sum_i \rightarrow \int$ (over legemet)

$$\Rightarrow \boxed{I = \int \rho^2 \, dm}$$

(der ρ = avstand fra rot.aksen til masseelementet dm)

Dreiemoment (evt: Kraftmoment; eng: Torque)



antar her $\vec{F} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{F} \perp \vec{\rho}$

$$\tau \overset{def}{=} F \cdot \rho = F\text{'s dreiemoment}$$

om rot.aksen

N2 for rotasjon om fast akse

Ser på tilført effekt:

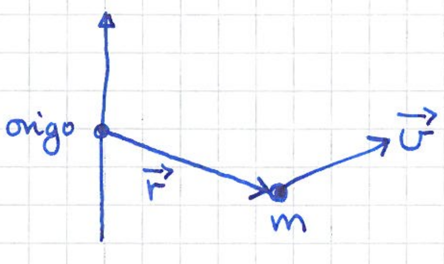
$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v = F \cdot \rho \cdot \omega = \tau \cdot \omega$$

Dessuten:

$$P = \frac{dK_{rot}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right) \underset{I = \text{konst.}}{\overset{\text{anta}}{=}} I \omega \frac{d\omega}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = I \dot{\omega}} \qquad [\text{Transl. analogi: } F = M\dot{V} \quad (N2)]$$

Dreieimpuls (evt: spinn)



$$\vec{L} \overset{def}{=} \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$= m$'s dreieimpuls (relativt origo)

Dreiemoment som vektor

$$\vec{\tau} \overset{def}{=} \vec{r} \times \vec{F} = \vec{F}\text{'s dreiemoment}$$

(relativt origo)

Dreieimpulsbevarelse

Hva gir <u>endring</u> i $\vec{L}$? La oss se på $\dot{\vec{L}}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v}) = m\left\{\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{v}}_{=\vec{v}\times\vec{v}=0} + \underbrace{\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}}_{=\vec{r}\times\vec{F}/m\ \text{(N2 !)}}\right\} = \vec{\tau}$$

N2 for rotasjon, inkl. bevaring av $\vec{L}$:

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}\ ; \quad \text{dvs } \vec{L} = \text{konst. hvis } \vec{\tau} = 0}$$

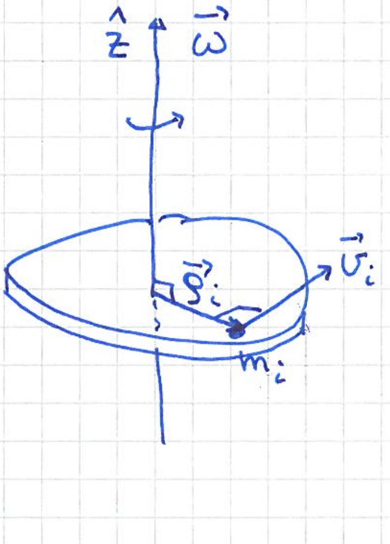
[Transl. analogi : $\vec{F} = d\vec{p}/dt$; dvs $\vec{p}$ = konst. hvis $\vec{F} = 0$]

$$\boxed{\text{For isolert system: } \quad E,\ \vec{p} \text{ og } \vec{L} \text{ er bevart.}}$$

Hva er $\vec{L}$ for ren rotasjon om fast akse?

Svar: $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

Bevis:



$$\vec{L} = \sum_i \vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_i$$

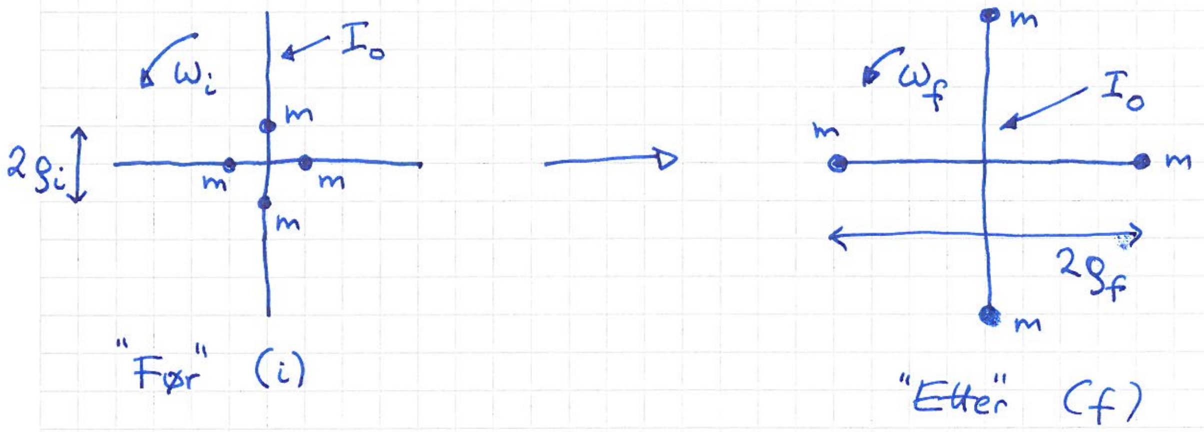
$$\vec{\rho}_i \times \vec{v}_i = \rho_i v_i \hat{z} = \rho_i^2 \omega \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \underbrace{\left(\sum_i m_i \rho_i^2\right)}_{=I} \cdot \underbrace{\omega\hat{z}}_{=\vec{\omega}}$$

$$= I\vec{\omega} \qquad \text{qed}$$

[Translasjonsanalogi : $\vec{p} = M\vec{V}$]

Relevans for LAB-oppg. om rotasjon:



$$I_i = I_0 + 4m\rho_i^2 \qquad\qquad I_f = I_0 + 4m\rho_f^2 > I_i$$

Intet ytre dreiemoment fra (i) til (f)

$\Rightarrow \quad L_i = L_f \qquad$ (dreieimpulsbevarelse!)

$$\Rightarrow \quad I_i\omega_i = I_f\omega_f \qquad \Rightarrow \quad \omega_f = \omega_i \cdot \frac{I_i}{I_f} < \omega_i$$

Hva med energibevarelse?

$$K_i = \frac{1}{2} I_i \omega_i^2$$

$$K_f = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 = \frac{1}{2} I_f \cdot \left(\omega_i \frac{I_i}{I_f}\right)^2 = \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 \cdot \frac{I_i}{I_f}$$

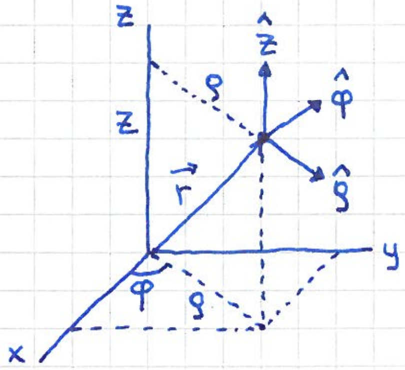
$$= K_i \cdot \frac{I_i}{I_f} \quad < \quad K_i$$

Hmm...!? Hvor ble det av $|\Delta K| = |K_f - K_i|$?

Sirkelbevegelse [YF 9.1–9.3; TM 9.1; LL 1.8; HS 2.1.2]

(Delvis repetisjon, se s. 6–8.)

Anta rotasjon om z-aksen ⇒ velger sylinderkoord. (ρ, φ, z)

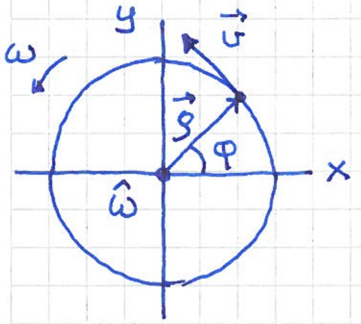


$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\rho^2+z^2}$$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{\rho\, d\varphi}{dt}\hat{\varphi} = \rho\omega\hat{\varphi}$$

$$\vec{\omega} = \omega\hat{z} = \omega\hat{\omega}, \quad \vec{\rho} = \rho\hat{\rho}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

$T = 2\pi/\omega$ = periode, $\quad f = 1/T$ = frekvens

$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ = vinkelakselerasjon

$v = \omega\rho$ = banehastighet

$a_{\parallel} = \dot{v} = \dot{\omega}\rho = \alpha\rho$ = baneaks. $\quad (\vec{a}_{\parallel} = \alpha\rho\hat{\varphi})$

$a_{\perp} = v^2/\rho = \omega v = \omega^2\rho$ = sentripetalaks. $\quad (\vec{a}_{\perp} = -\omega^2\rho\hat{\rho})$

[Total aks.: $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}$

$$= \dot{\omega}\rho\hat{\varphi} - \omega v\hat{\rho} = a_{\parallel}\hat{\varphi} - a_{\perp}\hat{\rho}$$]

Med <u>stivt legeme</u>:

- felles ω og α for hele legemet
- v og a øker med ρ $\quad$ (ρ = avstand fra rot.aksen)

Treghetsmoment [YF 9.4; TM 9.3; LL 6.2, 6.3; HS 4.2]

For ren rotasjon om fast akse:

$$K = K_{rot} = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum_i m_i \rho_i^2\right)\omega^2 = \tfrac{1}{2} I \omega^2$$

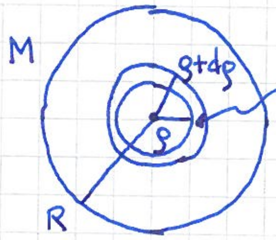
der $I = \sum_i m_i \rho_i^2$ (evt. $I = \int \rho^2 dm$) er legemets treghetsmoment mhp rot. aksen.

Notasjon: $I = I_0$ hvis akse gjennom legemets CM.

Eks 1: Ring (og "sylinderskall")

$$I_0 = \int_{ring} \rho^2 dm = R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$$

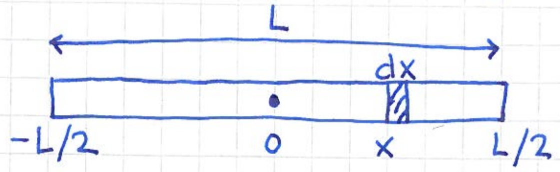
Eks 2: Sirkulær skive (og kompakt sylinder)



$$dm = M \cdot \frac{dA}{A} = M \cdot \frac{2\pi\rho \cdot d\rho}{\pi R^2} = \frac{2M}{R^2}\rho\, d\rho$$

$$I_0 = \int_0^R \rho^2 \frac{2M}{R^2}\rho\, d\rho = \frac{2M}{R^2} \Big|_0^R \tfrac{1}{4}\rho^4 = \underline{\underline{\tfrac{1}{2} MR^2}}$$

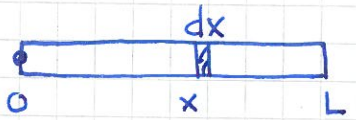
Eks 3: Tynn stang



$$dm = M \cdot \frac{dx}{L}, \quad \rho = x$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot M \cdot \frac{dx}{L} = \frac{M}{L} \Big|_{-L/2}^{L/2} \tfrac{1}{3}x^3 = \underline{\underline{\tfrac{1}{12} ML^2}}$$

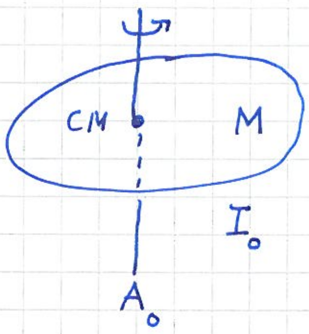
Eks 4: Om stangas ende

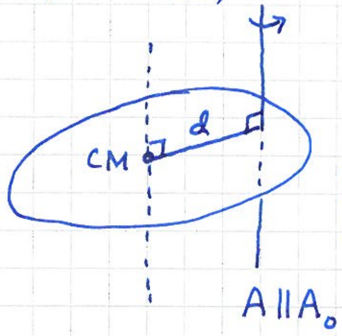


$$I = \int_0^L x^2 \cdot M \cdot \frac{dx}{L} = \underline{\underline{\tfrac{1}{3} ML^2}}$$

Øving 6: Kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3}MR^2$ Kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5}MR^2$

Steiners sats [YF 9.5; TM 9.3; LL 6.3; HS 4.3]

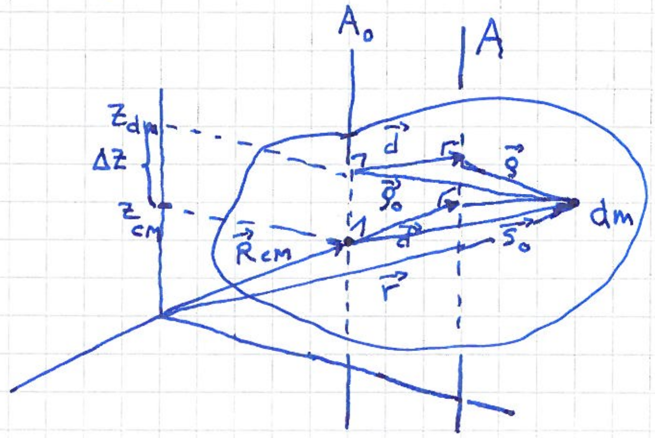




$$\boxed{I = I_o + Md^2}$$

Bevis:

[Bedre figur på s. 45B]



$$\vec{\rho}_o = \vec{d} + \vec{\rho}$$

$$I_o = \int \rho_o^2 \, dm$$

$$\rho^2 = \rho_o^2 + d^2 - 2\vec{d}\cdot\vec{\rho}_o$$

$$\Rightarrow I = \int \rho^2 \, dm = \underbrace{\int \rho_o^2 \, dm}_{= I_o} + d^2 \underbrace{\int dm}_{= M} - 2\vec{d}\cdot\int \vec{\rho}_o \, dm$$

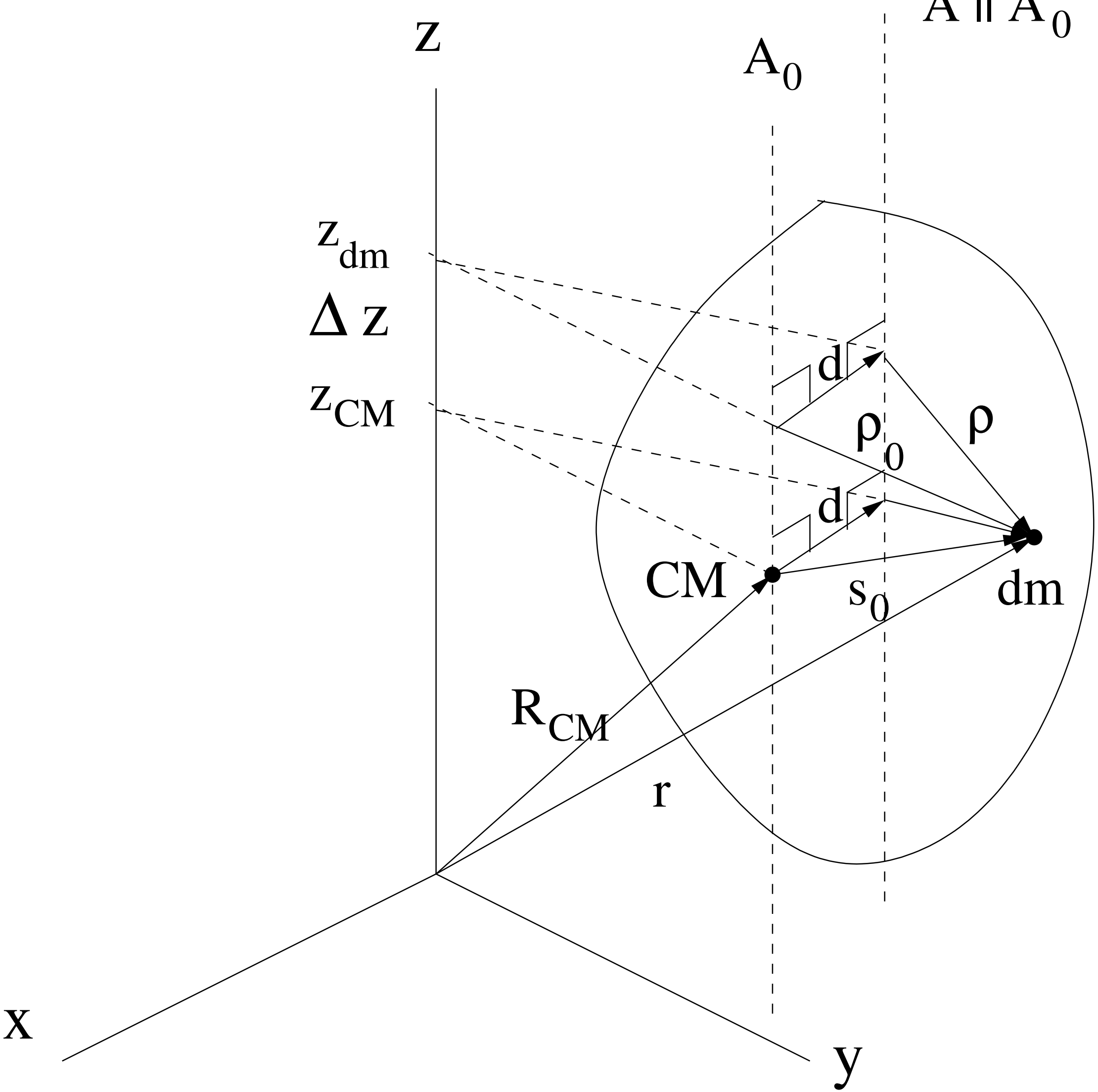
$$\vec{r} = \vec{R}_{CM} + \vec{s}_o = \vec{R}_{CM} + \Delta z \cdot \hat{z} + \vec{\rho}_o$$

$$\Rightarrow \vec{d}\cdot\vec{\rho}_o = \vec{d}\cdot(\vec{r} - \vec{R}_{CM}) - \Delta z \underbrace{\vec{d}\cdot\hat{z}}_{= 0}$$

$$\Rightarrow \vec{d}\cdot\int \vec{\rho}_o \, dm = \vec{d}\cdot \underbrace{\int \vec{r} \, dm}_{= M\vec{R}_{CM}} - \vec{d}\cdot\vec{R}_{CM} \underbrace{\int dm}_{= M} = 0$$

$$\Rightarrow I = I_o + Md^2 \qquad \text{qed}$$

[Terminologi : Steiners sats = Parallellakseteoremet]



$$\rho_0 = d + \rho$$

$$r = R_{CM} + s_0$$

$$= R_{CM} + \Delta z\,\hat{z} + \rho_0$$

Kinetisk energi for stivt legeme

[YF 10.3 ; TM 9.3 ; LL 6.6 ; HS 4.1]

Generell bevegelse for stivt legeme:

Translasjon av CM + Rotasjon om akse A_0 gjennom CM.

Skal vise at: $\boxed{K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2}$

der

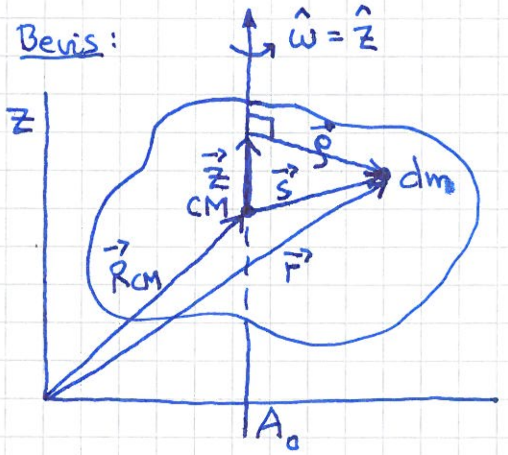
M = legemets masse

$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM}$ = hastigheten til CM

I_0 = legemets treghetsmoment om aksen A_0

$\vec{\omega}$ = vinkelhastigheten for rotasjonen om A_0

Bevis:



$\vec{r} = \vec{R}_{CM} + \vec{s} = \vec{R}_{CM} + \vec{z} + \vec{\rho}$

$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ = dm's hastighet

$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM}$ = CM's — " —

$\vec{u} = \dot{\vec{s}} = \dot{\vec{\rho}}$ = dm's hastighet relativt CM $\Rightarrow \vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$

$dK = \frac{1}{2} dm \cdot v^2$ = dm's kinetiske energi

$\Rightarrow K = \int dK = \int \frac{1}{2} dm \cdot v^2$ = legemets kinetiske energi

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = (\vec{V} + \vec{u}) \cdot (\vec{V} + \vec{u}) = V^2 + u^2 + 2 \vec{V} \cdot \vec{u}$$

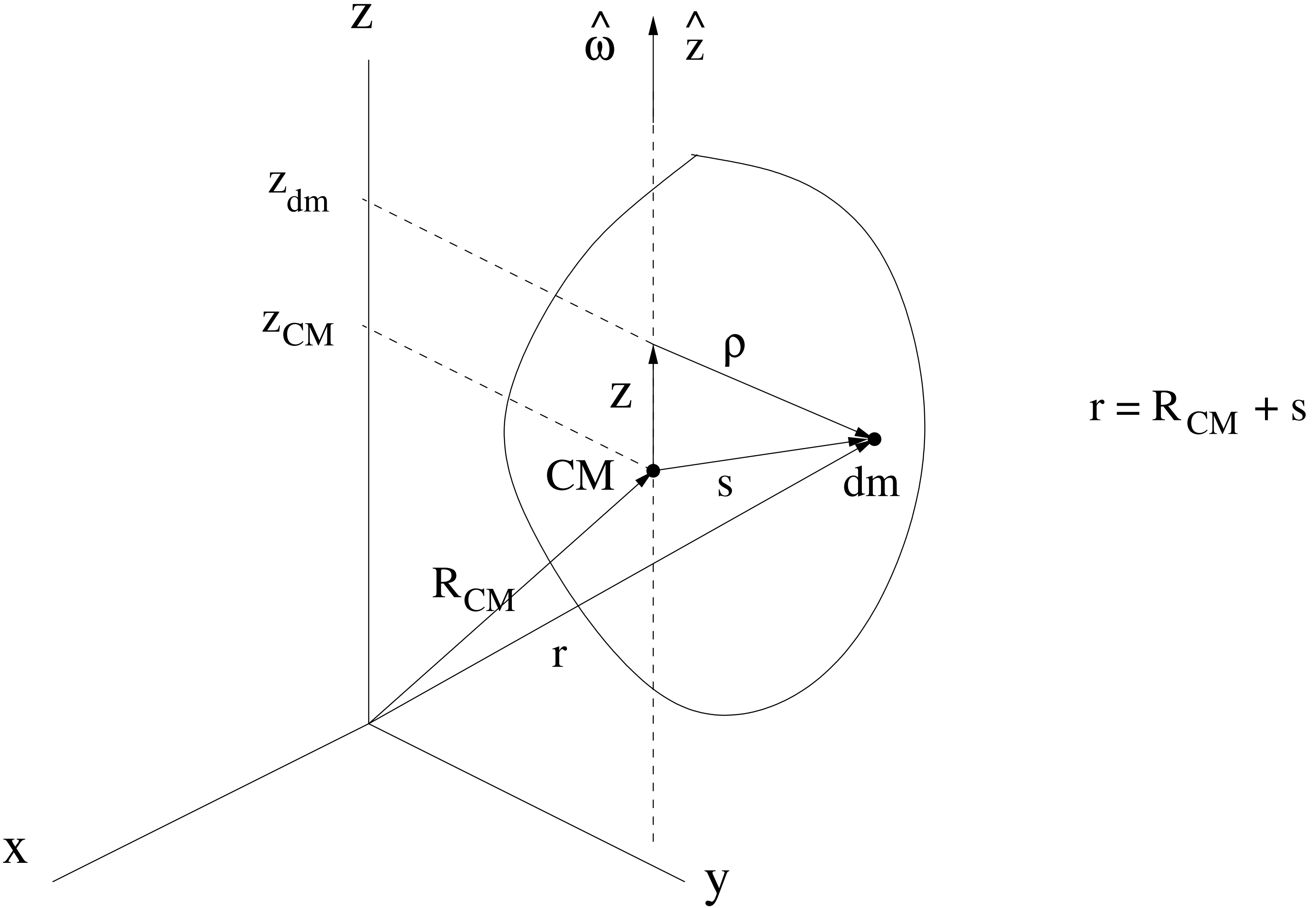
$$\frac{1}{2} \int dm \, V^2 = \underline{\frac{1}{2} M V^2}$$

$$\frac{1}{2} \int dm \, u^2 = \frac{1}{2} \int dm \, (\rho \omega)^2 = \frac{1}{2} \left(\int dm \, \rho^2 \right) \omega^2 = \underline{\frac{1}{2} I_0 \omega^2}$$

$$\int dm \, \vec{V} \cdot \vec{u} = \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \int dm \, \vec{s} = \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \int dm \, (\vec{r} - \vec{R}_{CM})$$

$$= \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \Big\{ \underbrace{\int \vec{r} \, dm}_{= M \cdot \vec{R}_{CM}} - \vec{R}_{CM} \underbrace{\int dm}_{= M} \Big\} = \underline{0}$$

qed!


z
$\hat{\omega}$
$\hat{z}$
z_{dm}
z_{CM}
ρ
z
CM
s
dm
R_{CM}
r
x
y
$r = R_{CM} + s$