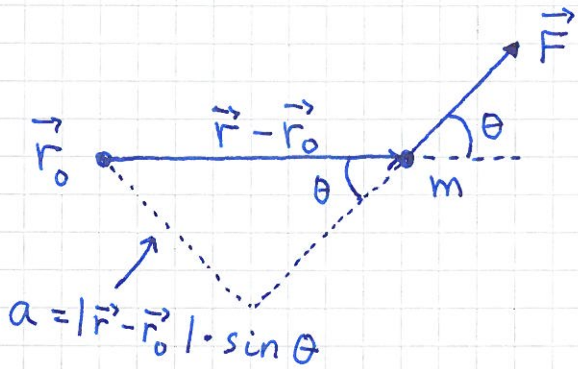
Rotasjonsdynamikk [YF 10; TM 10; LL 6 og 5; HS 5]

(nesten helt) generell beskrivelse

Dreiemoment [YF 10.1; TM 10.2; LL 5.5, 6.4; HS 5.1]



$$\boxed{\vec{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{r}-\vec{r}_0) \times \vec{F}}$$

= $\vec{F}$'s dreiemoment på m i posisjon $\vec{r}$, relativt (det fritt valgte) referansepunktet $\vec{r}_0$

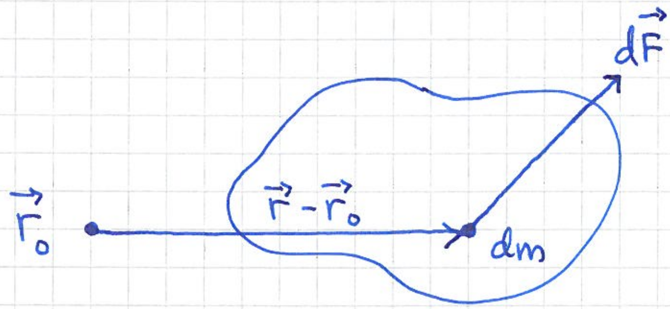
Retning: $\vec{\tau} \perp \vec{F}$ og $\vec{\tau} \perp \vec{r}-\vec{r}_0$

(h.h. regel $\Rightarrow$ $\vec{\tau}$ <u>ut</u> av planet i fig. over)

Absoluttverdi: $|\vec{\tau}| = |\vec{r}-\vec{r}_0| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\theta = a \cdot F$

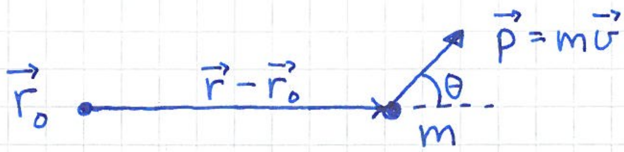
der a = "armen til $\vec{F}$"

For partikkelsystem (f.eks. stivt legeme):



$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int_{\text{legemet}} (\vec{r}-\vec{r}_0) \times d\vec{F}$$

Dreieimpuls [YF 10.5; TM 10.2; LL 6.6; HS 5.3]



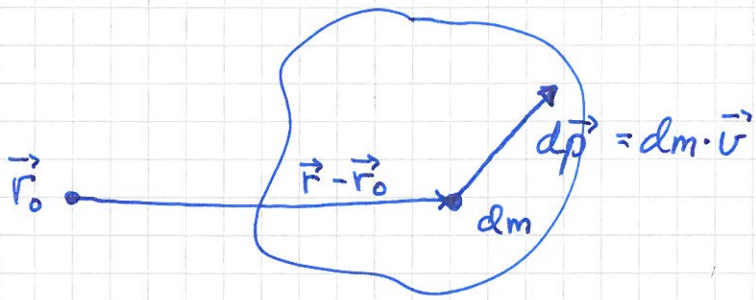
$$\boxed{\vec{L} \overset{def}{=} (\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{p} = m(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{v}}$$

= m's dreieimpuls relativt $\vec{r}_0$

Retning: $\vec{L} \perp \vec{p}$ og $\vec{L} \perp \vec{r}-\vec{r}_0$

Abs. verdi: $|\vec{L}| = |\vec{r}-\vec{r}_0|\cdot|\vec{p}|\cdot\sin\theta = a\cdot p$ (se s. 47)

For partikkelsystem:



$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int_{\text{legemet}} dm\,(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{v}$$

N2, rotasjon [YF 10.5 ; TM 10.3; LL 6.6; HS 5.2]

(= "spinnsatsen")

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}\left\{ m(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{v} \right\} = m(\dot{\vec{r}}-\dot{\vec{r}}_0)\times\vec{v} + m(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\dot{\vec{v}}$$

Anta $\dot{\vec{r}}_0 = 0$ (fast $\vec{r}_0$) eller $\dot{\vec{r}}_0 \parallel \vec{v}$

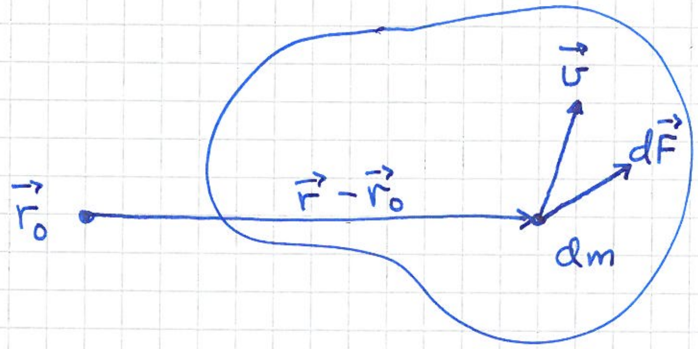
slik at $\dot{\vec{r}}_0 \times \vec{v} = 0$

Har (som s. 41): $\dot{\vec{r}} \times \vec{v} = \vec{v}\times\vec{v} = 0$

$$m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = \vec{F}$$

Dermed: $\dot{\vec{L}} = (\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{F}$, dvs $\boxed{\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}}$

For partikkelsystem:



$$\dot{\vec{L}} = \int d\dot{\vec{L}} = \int \frac{d}{dt}\left\{ dm\,(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{v} \right\}$$

$=$ .... som ovenfor, med $\dot{\vec{r}}_0 \times \vec{v} = 0$ fortsatt ....

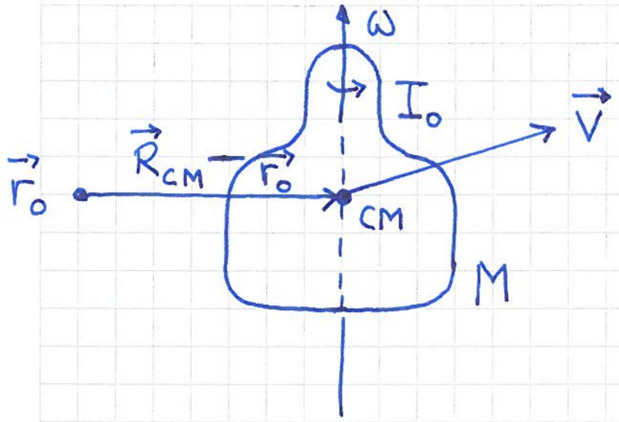
$$= \int (\vec{r}-\vec{r}_0)\times d\vec{F} = \int d\vec{\tau} = \vec{\tau}$$

med $\vec{\tau}$ = totalt dreiemoment på systemet (relativt $\vec{r}_0$)

$\vec{L}$ = total dreieimpuls for — " — (— " —)

Dreieimpuls for stivt legeme [YF 10.5; TM 10.2; LL 6.6; HS 5.3]

Anta at legemet har sylindersymmetri om (den instantane) rotasjonsaksen, "utpekt" med $\hat{\omega}$.



Fra s. 46: $K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$

Spm: Kan $\vec{L}$ på samme måte skrives som en sum av to ledd, ett assosiert med massesenterets translasjonsbevegelse, og ett assosiert med legemets rotasjonsbevegelse om en akse gjennom CM ?

Svar: Ja! Med antagelsen om sylindersymmetri om $\hat{\omega}$ kan det vises at legemets totale dreieimpuls kan skrives slik:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + I_0\vec{\omega}}$$

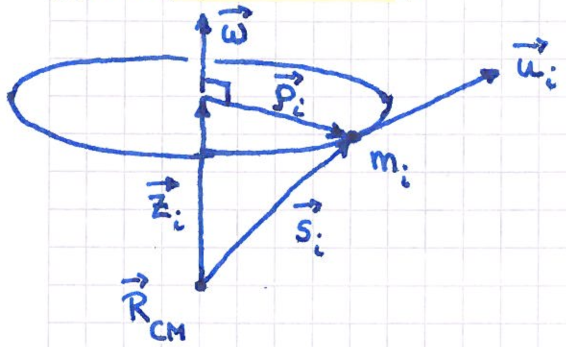
Banedreieimpuls, relativt $\vec{r}_0$: $\vec{L}_b = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V}$

Indre dreieimpuls ("spinn"; uavh. av $\vec{r}_0$): $\vec{L}_s = I_0\vec{\omega}$

[For bevis, som starter fra definisjonen $\vec{L} = \int dm\, (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}$, se s. 50 A og 50 B. Litt "kronglete", men ikke særlig vanskeligere enn bevisene s. 45 og 46.]

50 A

Bevis [illegible]:



relativkoord.

$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{s}_i$$
$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{u}_i$$
relativhastighet
$$(\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}}_{CM} + \dot{\vec{s}}_i)$$

Fra figur: $\vec{s}_i = \vec{z}_i + \vec{\rho}_i$

Fra før: $\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i = \vec{\omega} \times \vec{s}_i$ (siden $\vec{\omega} \times \vec{z}_i = 0$)

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{v}_i$$
$$= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0 + \vec{s}_i) \times (\vec{V} + \vec{u}_i)$$
$$= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{V}$$
$$+ \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{u}_i + \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i$$

1. sum:

$$\sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} = \vec{L}_{CM}$$

= banedreieimpulsen relativt $\vec{r}_0$ pga CM's bevegelse (jfr. $\vec{L}$ for punktmasse)

2. sum:

$$\sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{V} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \times \vec{V} = (M\vec{R}_{CM} - M\vec{R}_{CM}) \times \vec{V} = 0$$

3. sum:

$$\sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{u}_i = \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i)$$
$$= (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times (\vec{\omega} \times \underbrace{\sum_i m_i \vec{s}_i}_{=0}) = 0$$

4. sum:

$$\sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i = \vec{L}_{rel.} =$$ dreieimpuls pga masseelementenes bevegelse relativt CM

Dermed:

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{rel.} = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i$$

som gjelder for <u>vilkårlig</u> partikkelsystem (ikke nødv.vis stivt legeme); alternativt $\int_M dm(\vec{s} \times \vec{u})$ for $\vec{L}_{rel}$ hvis kontinuerlig massefordeling.

Hvis stivt legeme: $\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{s}_i$

$$\Rightarrow \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i = \sum_i m_i \vec{s}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i)$$

Identitet: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

(kjedelig, men ikke vanskelig å bevise!)

Dermed:

$$\sum_i m_i \vec{s}_i \times (\vec{\omega} \times s_i) = \sum_i m_i \{ \vec{\omega}\, s_i^2 - \vec{s}_i (\vec{s}_i \cdot \vec{\omega}) \}$$

$$= \sum_i m_i \{ \vec{\omega}(z_i^2 + \rho_i^2) - (\vec{z}_i + \vec{\rho}_i) z_i \omega \}$$

$$= \sum_i m_i \{ \vec{\omega}(z_i^2 + \rho_i^2) - z_i^2 \vec{\omega} - z_i \omega \vec{\rho}_i \}$$

$$= \sum_i m_i \rho_i^2 \, \vec{\omega} - \omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i$$

$$= I_0 \vec{\omega} - \omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i$$

<u>Hvis</u> sylindersymmetri om $\hat{\omega}$, dvs om $\hat{z}$:

$$\sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i = \sum_i m_i z_i (x_i \hat{x} + y_i \hat{y}) = 0$$

fordi bidragene fra <u>like store</u> masseelementer i (x_i, y_i, z_i) og $(-x_i, -y_i, z_i)$ <u>kansellerer</u>.

Dette er <u>ofte</u> tilfelle, men ikke alltid.

Men <u>hvis</u> sylindersymmetri om $\hat{\omega}$: $\vec{L}_{rel} = I_0 \vec{\omega}$

$$\Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{rel} = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}$$

<u>qed</u>

Bevaringslover

For isolert system (dvs: system som ikke påvirkes av ytre krefter) er energi, impuls og dreieimpuls bevarte størrelser.

$$W = 0 \quad (\text{dvs } P = \frac{dW}{dt} = 0) \quad \Rightarrow \quad E = \text{konst.}$$

$$\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{konst.}$$

$$\vec{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{konst.}$$

Mekanisk likevekt (Statikk)

[YF 11.1–11.3; TM 12.1–12.3; LL 7.1 ; HS 4.6]

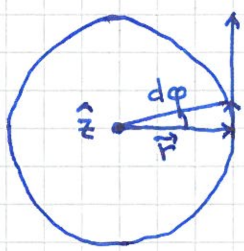
Et stivt legeme er i ro,

$$\vec{p} = 0 \quad \text{og} \quad \vec{L} = 0$$

bare dersom $\sum_i \vec{F}_i = 0$ og $\sum_i \vec{\tau}_i = 0$

Arbeid utført ved rotasjon

[YF 10.4; TM 9.5; LL 6.4; HS 4.4.1]



$\vec{F} = F\hat{\varphi}$

$d\vec{s} = r\,d\varphi\,\hat{\varphi}$

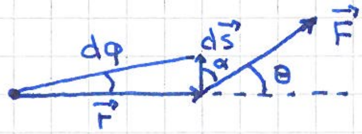
$\vec{r} = r\,\hat{r}$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot r\,d\varphi$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = r \cdot F\,\hat{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{dW = \tau\,d\varphi} \Rightarrow P = \frac{dW}{dt} = \tau \cdot \omega$$

Enn om $\vec{F}$ og $d\vec{s}$ ikke er parallelle?



$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$

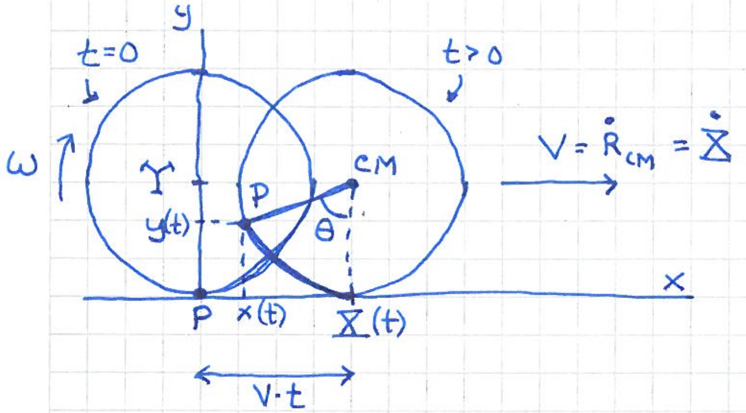
$$dW = F \cdot ds \cdot \cos\alpha = F \cdot r\,d\varphi \cdot \sin\theta$$

$$\tau = |\vec{\tau}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = r \cdot F \cdot \sin\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{dW = \tau\,d\varphi}$$

Rulling [YF 10.3 ; TM 9.6 ; LL 6.7 ; HS 4.5.3 og 5.4.3]

Ren rulling:



Sammenhenger:

$\theta = \omega t$ (hvis ω = konst.)

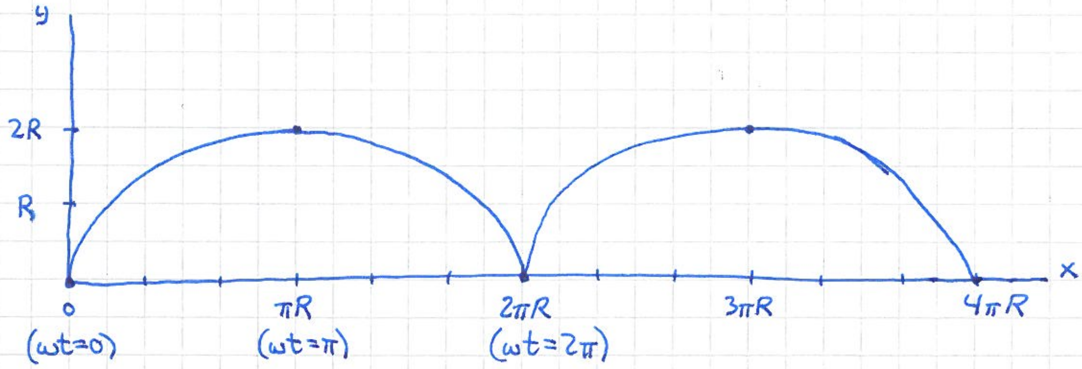
$$\begin{cases} X = Vt = R\theta \; (= R\omega t) \\ V = \dot{X} = R\omega \quad (\text{hvis } \omega = \text{konst.}) \\ A = \ddot{X} = R\ddot{\theta} = R\dot{\omega} = R\alpha \end{cases}$$

→ rullebetingelser

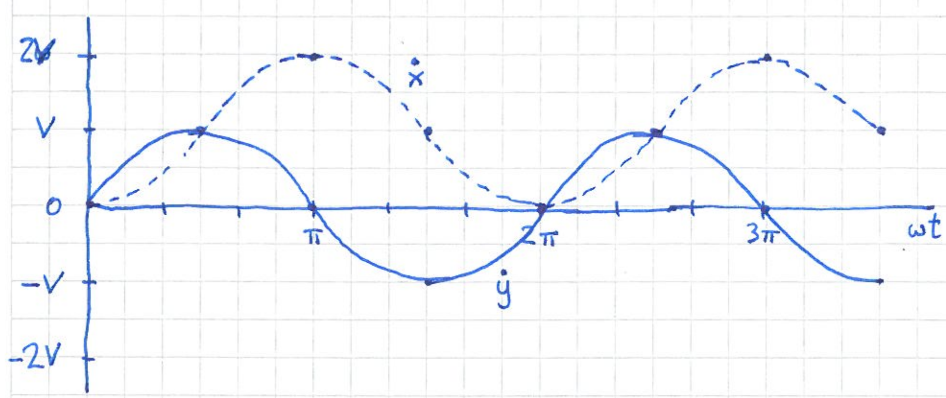
Ser fra fig. at banen til P (= punkt på periferien) blir en sykloide:

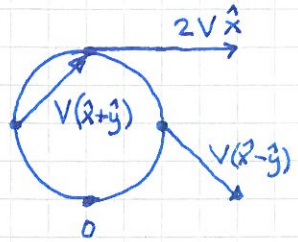
$x(t) = X(t) - R\sin\theta = Vt - R\sin\omega t$; $\quad y(t) = R - R\cos\theta = R - R\cos\omega t$

[der vi nå antar ω = konst.]



P's hastighet: $\dot{x} = V - \omega R\cos\omega t = V(1-\cos\omega t)$
$\dot{y} = \omega R\sin\omega t = V\sin\omega t$
$\Rightarrow \vec{v}(\theta) = \hat{x}\,V(1-\cos\theta) + \hat{y}\,V\sin\theta$





⇒ Ingen relativ bevegelse i kontaktpunktet ved ren rulling.

Kin. energi ved ren rulling:

$$K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \qquad (s.46)$$

$I_0 = c \cdot MR^2$ (med $c=1$ for ring, $\frac{2}{5}$ for massiv kule osv)

$\omega = V/R$ (rullebetingelse)

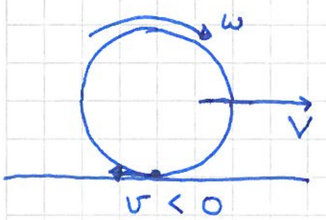
$$\Rightarrow \quad K = (1+c) \cdot \frac{1}{2} M V^2$$

Sluring

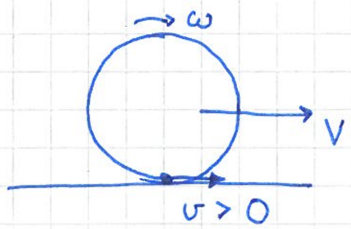
$\omega \neq V/R \Rightarrow$ kontaktpunktet får hastighet $v = V - \omega R \neq 0$ relativt underlaget

$\Rightarrow$ legemet roterer og glir samtidig

Hvis $\omega > V/R$:



Hvis $\omega < V/R$:



Friksjonens rolle

Hvis sluring: Friksjonskraft $f = \mu_k N$ rettet mot $\vec{v}$.

Effekttap: $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$

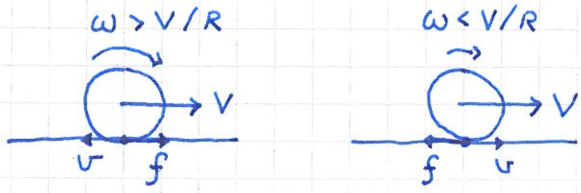
($\Rightarrow$ redusert mekanisk energi)

Hvis ren rulling: $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$

Null effekttap

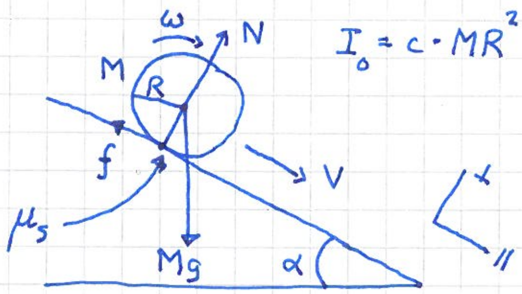
Statisk friksjon: $f \leq \mu_s \cdot N$

Sluring:



Ren rulling: Retningen på den statiske friksjonskraften bestemmes ved å besvare spørsmålet "Hva ville kontaktpunktets relativhastighet $\vec{v}$ ha vært hvis det ikke var friksjon?"

Eks: Rulling på skråplan



$I_0 = c \cdot MR^2$

- $\dot{V} = ?$
- $\mu_s^{min} = ?$

} for ren rulling

- ren rulling $\Rightarrow$ $\omega = V/R$, med klokka
- V og ω øker $\Rightarrow$ dreiemoment τ om CM i tråd med dette $\Rightarrow$ friksjonskraft f oppover

N2: $\sum F_{\parallel} = M\dot{V}$, $\sum \tau = I_0 \dot{\omega}$, $\sum F_{\perp} = 0$

$\Downarrow$ $Mg \sin\alpha - f = M\dot{V}$

$\Downarrow$ $f \cdot R = I_0 \dot{\omega}$

$\Downarrow$ $f = (cMR^2 \cdot \frac{\dot{V}}{R})/R = cM\dot{V}$

$\Downarrow$ $N = Mg\cos\alpha$

$\Downarrow$

$$Mg\sin\alpha - cM\dot{V} = M\dot{V}$$

$\Downarrow$

$$\dot{V} = g\,\frac{\sin\alpha}{1+c}$$

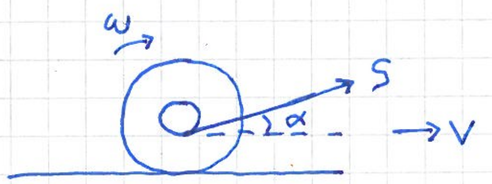
$$f \leq f_{max} = \mu_s \cdot N$$

$$\Rightarrow \quad cMg\,\frac{\sin\alpha}{1+c} \leq \mu_s Mg\cos\alpha$$

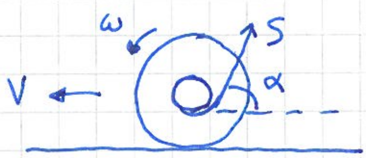
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mu_s^{min} = \frac{c}{1+c}\tan\alpha}} \qquad (\text{for å ha ren rulling})$$

	c	$\dot{v}$	μ_s^{min}
Ring og hul sylinder	1	$\frac{1}{2} g \sin\alpha$	$\frac{1}{2}\tan\alpha$
Skive og kompakt sylinder	1/2	$\frac{2}{3} g \sin\alpha$	$\frac{1}{3}\tan\alpha$
Kompakt ball	2/5	$\frac{5}{7} g \sin\alpha$	$\frac{2}{7}\tan\alpha$

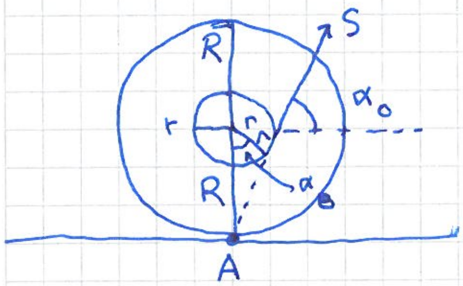
Eks: Snelle



liten α ⇒ ruller mot høyre



stor α ⇒ mot venstre



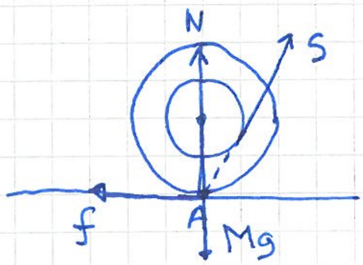
snelle i ro

når $\alpha = \alpha_0$ gitt ved

$\underline{\underline{\cos\alpha_0 = r/R}}$ (ses fra figur!)

Da går alle krefter gjennom kontaktpunktet A (f, N, mg og S)

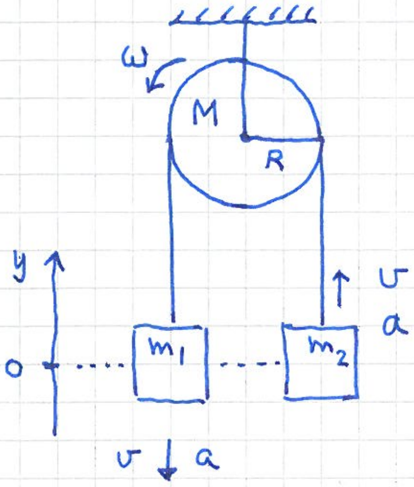
$\Rightarrow \sum \tau_A = 0$



Eks: Atwoods maskin

Løses på øving med N2 trans. + rot. (evt kun N2 rot.)

Løses her med energibevarelse



- $m_1 > m_2$
- snora glir ikke på skiva $\Rightarrow \omega R = \upsilon$
- $I_0 = \frac{1}{2} M R^2$ = skivas tregh.mom.
- Anta $U(y=0) = 0$; lodd i ro ved start
- Bestem loddenes akselerasjon a

Løsning:

Total energi, $E = U_i + K_i = 0$ ("initial")

E er bevart

$\Rightarrow \quad U_f + K_f = 0$ ("final")

$$\Rightarrow \quad m_2 g y - m_1 g y + \frac{1}{2} m_1 \upsilon^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon^2 + \underbrace{\frac{1}{2} I_0 \omega^2}_{= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M R^2 \cdot \left(\frac{\upsilon}{R}\right)^2 = \frac{1}{4} M \upsilon^2} = 0$$

(der $y > 0$ er posisjon til m_2)

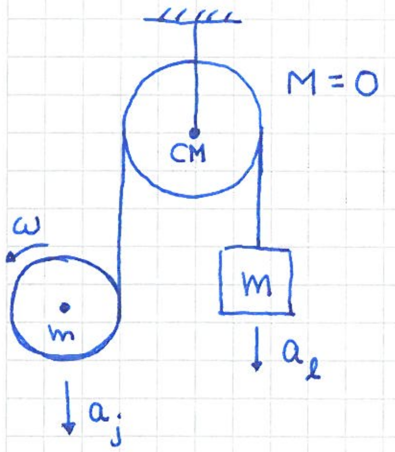
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \upsilon^2 = y \cdot \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + M/2}$$

Tar $\frac{d}{dt}$ på begge sider:

$$\frac{1}{2} \cdot 2\upsilon \cdot \underbrace{\frac{d\upsilon}{dt}}_{= a} = \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{= \upsilon} \cdot \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + M/2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = g \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}}$$

Eks: Atwood med ideell trinse og lodd + jojo, $m_1 = m_2 = m$.



Er $a_j = a_\ell$?

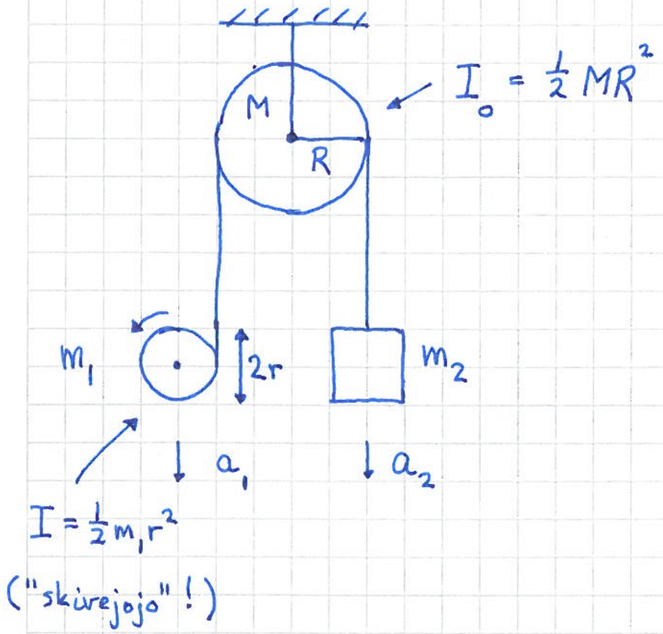
Ja:

Må ha likt snordrag på begge sider. Ellers ville trinsa ha vært utsatt for et netto dreiemoment mhp CM. Men med M=0 ville trinsa da ha fått uendelig vinkelakselerasjon, umulig!

Med likt snordrag og lik tyngde på begge sider blir akselerasjonen den samme:

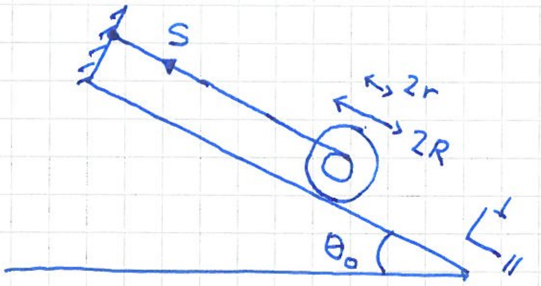
$m \cdot a_j = mg - S$; $m \cdot a_\ell = mg - S$ $\Rightarrow a_j = a_\ell = g - S/m$

Utfordring: Atwood med lodd + jojo (generelt)



Bestem a_1 og a_2!

Eks: Sluresnelle (demo + øving)



θ_0 = max vinkel før snella glir (slurer) nedover skråplanet

Bestem θ_0. Hva er snordraget S da?

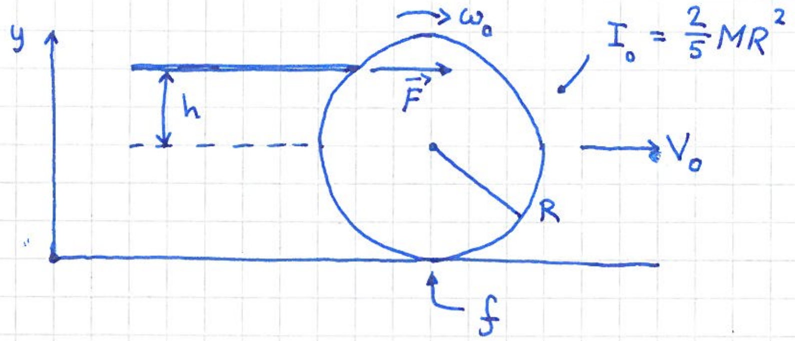
Tips: Bruk $\sum F_{\parallel} = 0$ samt $\sum \tau = 0$ (med snellas CM som ref.punkt)

Ved $\theta = \theta_0$ er $f = f_{max} = \mu_s \cdot N$

Ekstraoppg: Bestem snellas akselerasjon når $\theta > \theta_0$.

Tips: $\sum F_{\parallel} = M \cdot a$, $\sum \tau = I \dot{\omega}$, $v = \omega r$ (siden det vikles av snorlengde $2\pi r$ på tiden $T = 2\pi/\omega$, dvs $v = 2\pi r / T = \omega r$)

Eks: Snooker (øving)



Kortvarig støt, $\Delta t \gtrsim 0$:

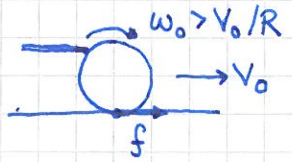
$F \cdot \Delta t = \Delta p = MV_0$

$\tau \cdot \Delta t = \Delta L = I_0 \omega_0$

$\tau = F \cdot h$

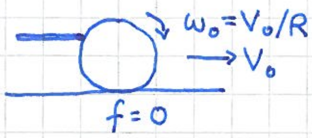
$F \gg f$

Hvis $h > h_0$:



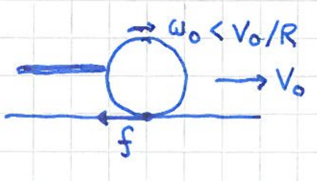
(sluring)

Hvis $h = h_0$:



(ren rulling) ($h_0 = ?$)

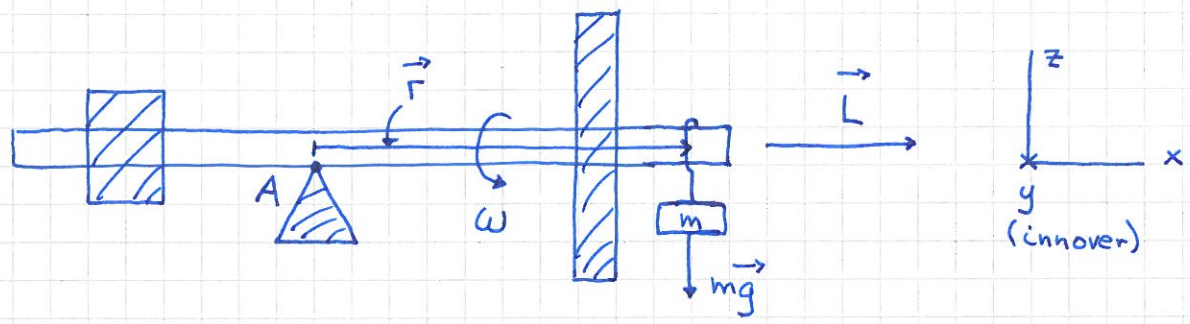
Hvis $h < h_0$:



(sluring)

Presesjon

Gyroskop (kvalitativt):



Uten lodd: Dynamisk likevekt med roterende skive

$$\vec{\omega} = \omega \hat{x}, \quad \vec{L}_A = L_A \hat{x}, \quad L_A = I_{skive} \cdot \omega$$

Med lodd: Dreiemoment relativt A:

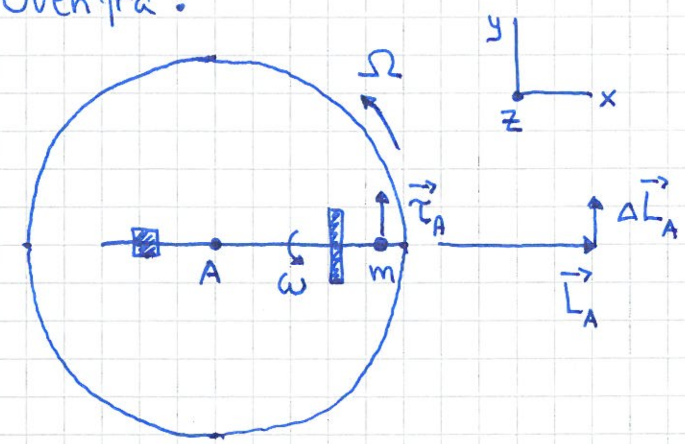
$$\vec{\tau}_A = \vec{r} \times m\vec{g} = rmg\ \hat{y}$$

$$N2,rot: \vec{\tau}_A = \Delta \vec{L}_A / \Delta t$$

$\Rightarrow \Delta \vec{L}_A$ peker i retning $\hat{y}$

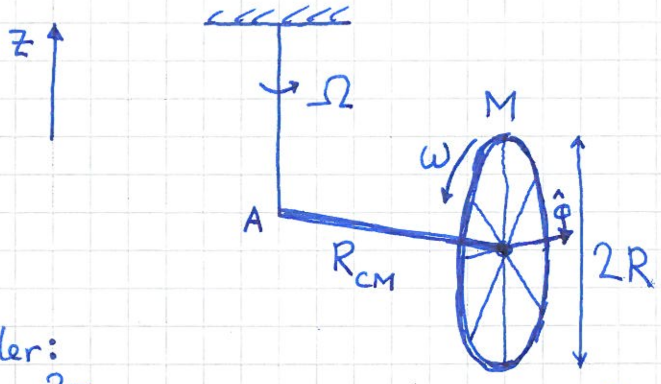
$\Rightarrow$ rotasjon mot klokka om z-aksen, presesjon, med vinkelhastighet $\Omega \ll \omega$

Ovenfra:



- større $m\vec{g}$ $\Rightarrow$ raskere presesjon (større Ω)
- større $\vec{r}$ (lengre arm) $\Rightarrow$ større Ω
- vipping opp og ned, "nutasjon"

Sykkelhjul (halvkvantitativt):



Estimerer:

$M \approx 5\ \text{kg}$

$R \approx \frac{3}{10}\ \text{m}$

$R_{CM} \approx \frac{2}{10}\ \text{m}$

$T_\omega = 2\pi/\omega \approx \frac{1}{3}\ \text{s}$

Måler:

$T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 4\,\text{s}$

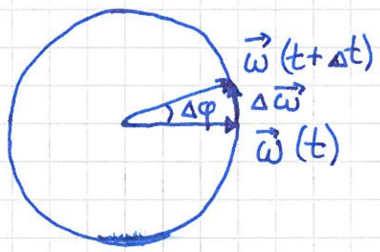
$I_0 \approx MR^2$

<u>Finn estimat for T_Ω !</u>

Løsning: $\vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} + I_0 \vec{\omega}$

$\vec{L}_b = R_{CM} \cdot MV\,\hat{z} \approx \text{konst.}$

$\Rightarrow \dot{\vec{L}}_A \simeq I_0 \dot{\vec{\omega}} = \vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} \Rightarrow R_{CM} Mg\,\hat{\varphi}$



$\Delta\vec{\omega} = \omega \cdot \Delta\varphi \cdot \hat{\varphi}$

$\Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \omega \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\hat{\varphi} = \omega\Omega\,\hat{\varphi}$

$\Rightarrow R_{CM} Mg = I_0 \omega\Omega \simeq MR^2\omega\Omega$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Omega = \frac{R_{CM}\, g}{R^2\omega}}}$$

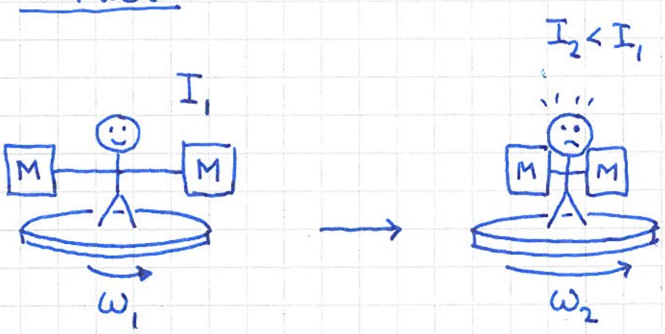
Dermed:

$$T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi R^2\omega}{R_{CM}\, g} = \frac{(2\pi R)^2/T_\omega}{R_{CM}\, g} \approx \frac{(6\pi/10)^2\ \text{m}^2/(\frac{1}{3}\,\text{s})}{\frac{2}{10}\,\text{m} \cdot 10\ \text{m/s}^2}$$

$= \frac{27\pi^2}{50}\ \text{s} \approx \underline{5\ \text{s}}$, ikke verst !!

To raske demonstrasjoner av <u>dreieimpulsbevarelse</u> helt til slutt:

Piruett



$\tau_{ytre} = 0 \Rightarrow L = \text{konst.}$

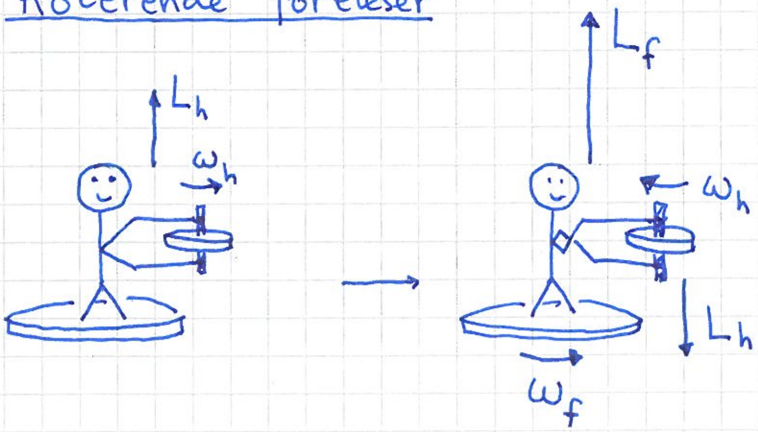
$\Rightarrow I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$

$\Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \omega_1 > \omega_1$

[$K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 \cdot \frac{I_1}{I_2} = K_1 \cdot \frac{I_1}{I_2} > K_1$!

Henter energi fra armmusklene når bøkene trekkes inn, gir økt mekanisk energi.]

Roterende foreleser



h: hjul

f: foreleser

$\Delta \vec{L} = 0 \Rightarrow L_f \approx 2 L_h$

Slutten på del I av kurset.