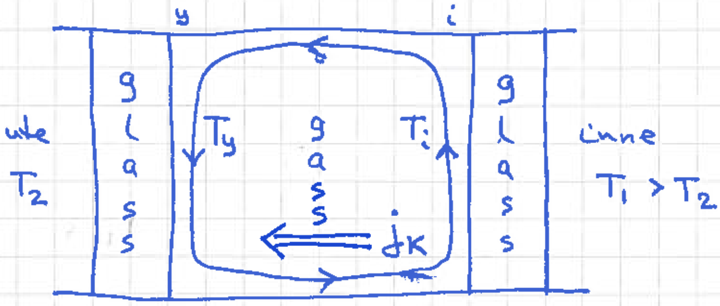
Varmetransport [YF 17 ; LHL 18 ; HS 13]

Ser på 3 ulike mekanismer :

- Konveksjon
- Varmeledning
- Stråling

Konveksjon [YF 17.7 ; LHL 18.2 ; HS 13.2]

Veldig kortfattet og kvalitativt, med dobbeltvindu som eksempel:



$T_i > T_y$ ⇒ gassen varmes opp ved i, utvider seg og stiger; avkjøles ved y, trekker seg sammen og faller ned

⇒ • Nettoeffekt : Strømning (se fig) og dermed varmeoverføring fra i til y

- Vanskelig å regne på

- Grovt sett : $\dot{j}_K \sim \Delta T$; $\Delta T = T_i - T_y$
  med $\dot{j}_K$ = overført varme pr flateenhet og pr tidsenhet (K for konveksjon)

- $\dot{j}_K$ vil avhenge av tykkelsen på laget mellom glassene

Varmeledning [YF 17.7; LHL 18.1; HS 13.1]

Fenomenologisk / Eksperimentelt finner man at overført varme typisk er proporsjonal med temperaturdifferansen pr lengdeenhet, dvs. prop. med gradienten til T:

$$\boxed{\vec{j} = -\kappa \nabla T}$$ Fouriers lov

der

$\vec{j}$ = overført varme pr flate- og tidsenhet (= varmestrømtetthet) ; $[j] = \frac{J}{m^2 \cdot s} = W/m^2$

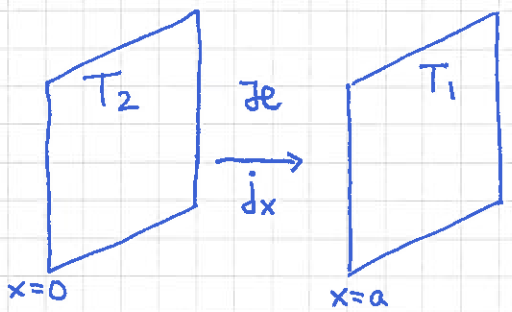
κ = varmeledningsevnen (evt. varmekonduktiviteten) til stoffet som varmen transporteres gjennom

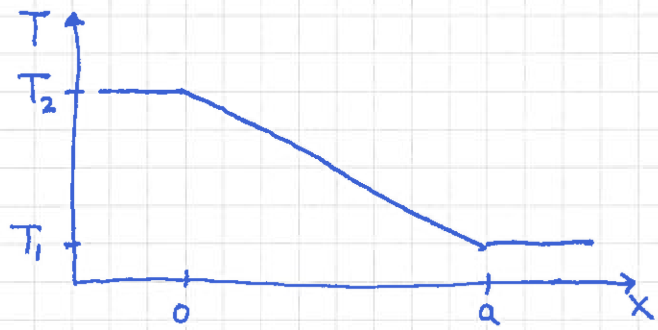
$[\kappa] = W/m \cdot K$

Vi ser her kun på varmeledning i en bestemt retning, dvs endimensjonal varmeledning.

Først tidsuavhengig (evt. stasjonær) varmeledning:

To store parallelle plan i innbyrdes avstand a, med fast temp. hhv T_2 og $T_1 < T_2$:





Fouriers lov, med $T = T(x)$:

$$j_x = -\kappa \frac{dT}{dx}$$

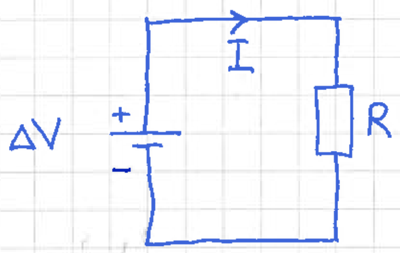
Stasjonær tilstand $\Rightarrow$ j_x uavhengig av x (og av t, selvsagt!)

Hvis j_x varierte med x, ville strøm inn og strøm ut ved en gitt x være forskjellig, og dermed ville tilstanden ikke være stasjonær.

$$dT = -\frac{j_x}{\kappa}\,dx \Rightarrow \int_{T_2}^{T_1} dT = -\frac{j_x}{\kappa}\int_0^a dx \Rightarrow T_1 - T_2 = -\frac{j_x a}{\kappa}$$

$$\Rightarrow j_x = \frac{\kappa}{a}(T_2 - T_1) = \frac{\kappa}{a}\cdot \Delta T$$

Dvs presis som Ohms lov!



ΔV = spenning (f.eks. med et batteri)
I = elektrisk strøm
R = resistans (motstand)

Ohms lov: $\Delta V = R\cdot I \Rightarrow I = \frac{1}{R}\cdot \Delta V$

Så analogien mellom varmeledningen og Ohms lov blir:

$$j_x \longleftrightarrow I \;;\quad \Delta T \longleftrightarrow \Delta V \;;\quad \frac{a}{\kappa} \longleftrightarrow R$$

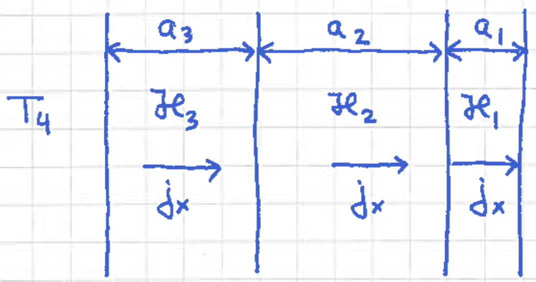
Det er rimelig at κ og R er "inverst analoge størrelser", siden κ er varmeledningsevne mens R representerer motstand mot transport (av elektrisk ladning). Skriver vi Ohms lov på formen

$I = G\cdot \Delta V$ med $G = \frac{1}{R}$ = konduktansen,

så blir analogien enda tydeligere, $\kappa/a \longleftrightarrow G$.

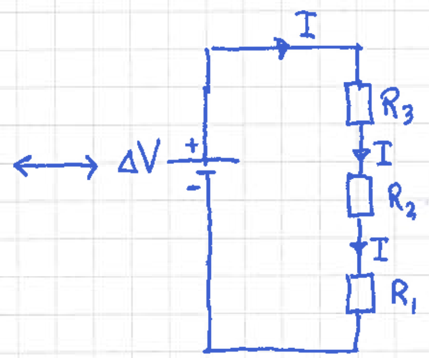
[Her leses $\longleftrightarrow$ som "tilsvarer" eller "er analog med".]

Varmeledning gjennom <u>flere lag</u>, generelt med ulike tykkelser a_i og ulike varmeledningsevner $\varkappa_i$, blir nå helt analogt med en <u>seriekobling</u> av resistanser R_i:



$T_1 < T_4$ $\longleftrightarrow$

$\Delta T = T_4 - T_1$



Stasjonær varmeledning $\Rightarrow$ samme j_x overalt.
Kjenner vi da til at total resistans for en seriekobling av tre resistanser er $R = R_1 + R_2 + R_3$ (slik at $\Delta V = (R_1+R_2+R_3) \cdot I$), kan vi uten videre skrive ned at

$$\Delta T = j_x \cdot \left(\frac{a_1}{\varkappa_1} + \frac{a_2}{\varkappa_2} + \frac{a_3}{\varkappa_3} \right)$$

Som gir

$$\underline{\underline{j_x = \frac{T_4 - T_1}{\frac{a_1}{\varkappa_1} + \frac{a_2}{\varkappa_2} + \frac{a_3}{\varkappa_3}}}}$$

Alternativt kan vi selvsagt løse dette uten å ha hørt om Ohms lov:

$$j_x = \frac{\varkappa_3}{a_3}(T_4 - T_3) = \frac{\varkappa_2}{a_2}(T_3 - T_2) = \frac{\varkappa_1}{a_1}(T_2 - T_1)$$

der

T_3 = temp. i grenseflaten mellom 3 og 2

T_2 = ——— " ——— 2 og 1

$$\Rightarrow \frac{a_3}{\varkappa_3} j_x = T_4 - T_3 \; ; \quad \frac{a_2}{\varkappa_2} j_x = T_3 - T_2 \; ; \quad \frac{a_1}{\varkappa_1} j_x = T_2 - T_1$$

hvoretter addisjon av disse 3 ligningene gir

$$j_x \left(\frac{a_3}{\varkappa_3} + \frac{a_2}{\varkappa_2} + \frac{a_1}{\varkappa_1} \right) = T_4 - T_1 ,$$ som ovenfor!

Det er verdt å <u>merke seg</u> at siden $\Delta T_i \sim 1/\kappa_i$, får vi <u>størst</u> temperaturgradient $(\Delta T_i / a_i)$ i det laget som har <u>minst</u> varmeledningsevne κ_i, dvs det som "isolerer best"!

Talleksempel: Vegg med 3 cm ytter- og innerpanel i gran, med 20 cm "glava" (glassvatt) mellom; $\kappa_{gran} = 0.12\ \mathrm{W/m\cdot K}$, $\kappa_{glava} = 0.035\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\cdot K}}$.

a) Med $T_4 = 20°C$ og $T_1 = -10°C$, hva blir j_x?

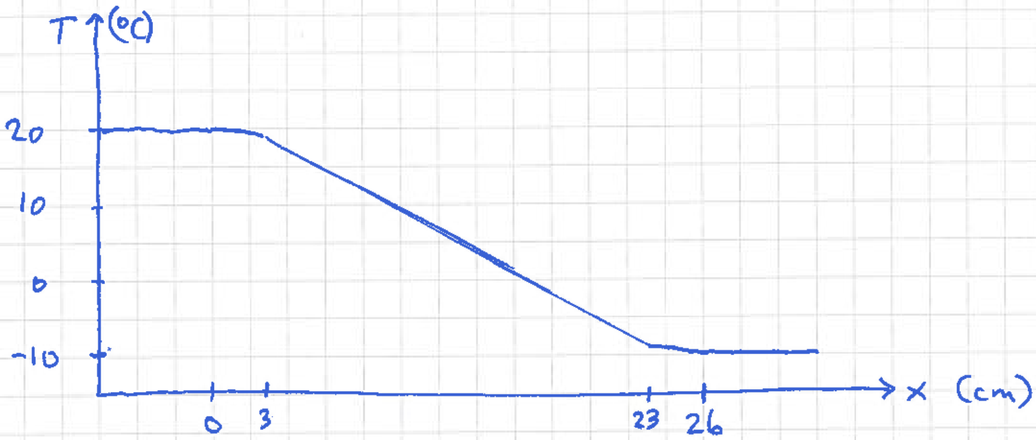
b) Hva blir $T(x)$?

----

a)
$$j_x = 30\,\mathrm{K} \cdot \{2 \cdot 0.03\,\mathrm{m} / 0.12\,\mathrm{W/m\cdot K} + 0.20\,\mathrm{m}/0.035\,\mathrm{W/m\cdot K}\}^{-1}$$
$$= 30\,\mathrm{K} \cdot \{0.5\,\mathrm{m^2\cdot K/W} + 5.71\,\mathrm{m^2\cdot K/W}\}^{-1}$$
$$= 30 \cdot 0.16\,\mathrm{W/m^2} = \underline{\underline{4.8\,\mathrm{W/m^2}}}$$

b)
$$T_4 - T_3 = j_x \cdot a_{gran} / \kappa_{gran} = 4.8\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}} \cdot \frac{0.03\,\mathrm{m}}{0.12\,\mathrm{W/m\cdot K}} = 1.2\,\mathrm{K}$$
$$\Rightarrow T_2 - T_1 = T_4 - T_3 = 1.2\,\mathrm{K}$$
$$\Rightarrow T_3 - T_2 = 30\,\mathrm{K} - 2.4\,\mathrm{K} = 27.6\,\mathrm{K}$$

Dvs $T_3 = 18.8°C$, $T_2 = -8.8\ °C$



Dvs praktisk talt hele ΔT over glavalaget!

Men: Panel + papp nødvendig for å hindre at det blåser rett gjennom, selvsagt.

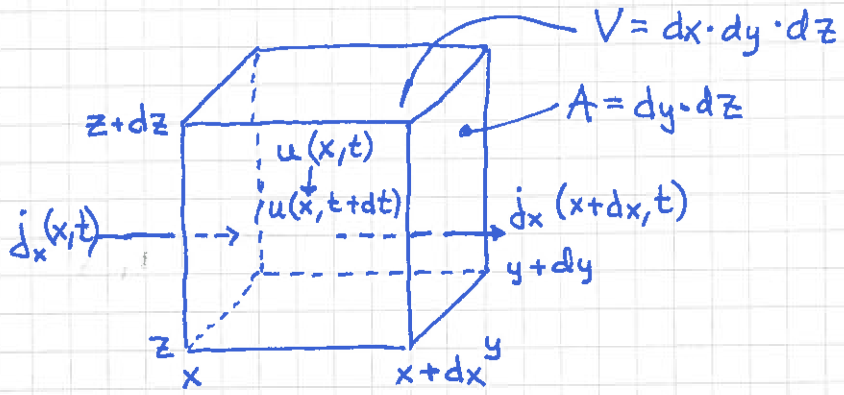
Varmeledningsligningen [LHL 18.5 ; HS 13.1]

Vi skal vise at med energibevarelse samt Fouriers lov ($\vec{j} \sim \nabla T$) får vi følgende generelle diff.ligning for $T(\vec{r},t)$:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \nabla^2 T}$$ som er varmeledningsligningen

(med $D_T = \kappa/\mu c$; μ = masse pr volumenhet, c = varmekapasitet pr masseenhet)

Vi tar for oss et lite men fast volum av et stoff:



Her er:

u = (indre) energi pr volumenhet

($\Rightarrow U = u \cdot V$ = energi i volumet $V = A \cdot dx$)

j_x = varmestrømtetthetens x-komponent ($\vec{j} = j_x\hat{x} + j_y\hat{y} + j_z\hat{z}$)

Det må nå forholde seg slik at dersom det er en netto tilstrømning av energi (varme), dvs dersom $j_x(x,t) \neq j_x(x+dx,t)$, så må det resultere i at energien U, og dermed $u = U/V$ (fast volum V!), endrer seg, dvs $u(x,t) \neq u(x,t+dt)$.

[Her ser vi først på bidraget til endringen i u som skyldes j_x; deretter er det en smal sak å gjenta argumentasjonen for j_y og j_z!]

Netto tilført energi utenfra mellom t og $t+dt$:

$$j_x = \frac{dU}{A\cdot dt} \Rightarrow dU = j_x \cdot A \cdot dt$$

$$\Rightarrow dU = dU_{inn} - dU_{ut}$$

$$= j_x(x,t)\cdot A\cdot dt - j_x(x+dx,t)\cdot A \cdot dt$$

$$= -\frac{\partial j_x}{\partial x}\cdot \underbrace{dx \cdot A}_{=V} \cdot dt \qquad \left(\text{siden } \frac{\partial j_x}{\partial x} = \frac{j_x(x+dx)-j_x(x)}{dx}\right)$$

Energiendring i V i løpet av dt:

$$dU = U(x,t+dt) - U(x,t)$$

$$= u(x,t+dt)\cdot V - u(x,t)\cdot V$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t}\cdot dt \cdot V \qquad \left(\text{siden } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(t+dt)-u(t)}{dt}\right)$$

Likhet mellom dU og dU (!) gir nå:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial j_x}{\partial x}$$

På samme vis blir netto tilførsel av energi $-\frac{\partial j_y}{\partial y}\cdot V\cdot dt$ og $-\frac{\partial j_z}{\partial z}\cdot V \cdot dt$ dersom hhv j_y og j_z ikke er konstante.

Netto energitilførsel mellom t og $t+dt$ blir dermed

$$-\left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}\right)\cdot V \cdot dt \equiv -(\nabla\cdot\vec{j})\cdot V\cdot dt$$

Her er: $\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$

$$\vec{j} = \hat{x}\, j_x + \hat{y}\, j_y + \hat{z}\, j_z$$

$$\nabla\cdot\vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \text{divergensen til } \vec{j} \quad (= \text{div}\,\vec{j})$$

Dermed: $\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0}$ Energibevarelse for $V = dx\cdot dy \cdot dz$, dvs "lokalt", på stedet (x,y,z).

["Kontinuitetsligning"; her for energi]

Knytter $\vec{j}$ og u til T:

$$\vec{j} = -\kappa \nabla T \Rightarrow \nabla \cdot \vec{j} = -\kappa \nabla^2 T$$ (der vi antar κ = konstant, dvs uniformt medium)

Her er $\nabla^2 T = \nabla \cdot (\nabla T) = \partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2 + \partial^2 T/\partial z^2$

∇^2 = "div grad" = Laplaceoperatoren

$$C = \frac{dQ}{dT} \overset{\text{fast } V}{=} \frac{dU}{dT} = V \cdot \frac{du}{dT} \Rightarrow \frac{du}{dT} = \frac{C}{V}$$

$du = \frac{\partial u}{\partial T} dT$ siden $dV = 0$ (fast volum!) $\Rightarrow \frac{du}{dT} = \frac{\partial u}{\partial T}$

Videre, med kjerneregelen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} \overset{\text{se over!}}{=} \frac{du}{dT}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{C}{V} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

Innfører:

$c = C/M$ = varmekap. pr masseenhet ; $[c] = J/kg \cdot K$

$\mu = M/V$ = masse pr volumenhet ; $[\mu] = kg/m^3$

$$\Rightarrow \frac{C}{V} = \frac{M \cdot c}{M/\mu} = c \cdot \mu$$

Dermed:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j} \Rightarrow c \cdot \mu \frac{\partial T}{\partial t} = + \kappa \nabla^2 T \Rightarrow \underline{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\mu} \nabla^2 T}$$

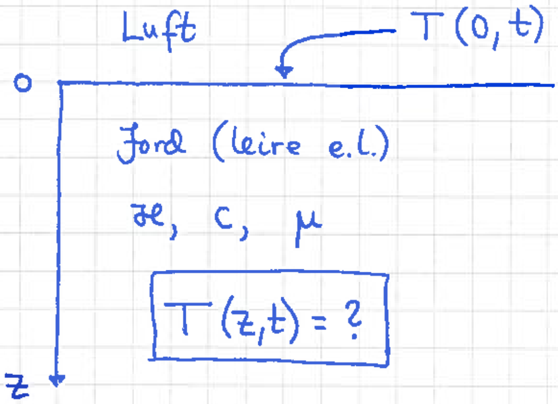
Innfører $D_T \equiv \kappa/c\mu$ = stoffets <u>termiske diffusivitet</u>,
med enheten $[D_T] = m^2/s$, og får

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \nabla^2 T} \qquad D_T = \kappa/c\mu$$

Som lovet!

Eks: $T(z,t)$ nedover i bakken

$T(0,t) = T_0 + T_1 \cos \omega t$ (grensebetingelse)



Døgnvariasjoner:

$\omega_d = 2\pi / 1\,\text{døgn}$; $T_1^{(d)} \sim \frac{1}{2} \cdot 10\,K$

Årsvariasjoner:

$\omega_a = 2\pi / 1\,\text{år}$; $T_1^{(a)} \sim \frac{1}{2} \cdot 20\,K$

Løsning: Vi gjetter $T(z,t) = T_0 + T_1 \cdot f(z) \cdot \cos(\omega t - \alpha z)$!!

Innsetting av gjetningen i ligningen $\partial T/\partial t = D_T\, \partial^2 T/\partial z^2$ gir $f(z) = \exp(-\alpha z)$ og $\alpha = \sqrt{\omega / 2D_T}$, slik at

$$\underline{\underline{T(z,t) = T_0 + T_1\, e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \alpha z)}}$$

Tallverdier for leire:

	κ (W/m·K)	c (kJ/kg·K)	μ (kg/m³)	D_T (m²/s)	$\frac{1}{\alpha_d}$ (cm)	$\frac{1}{\alpha_a}$ (cm)
Tørr	0.15	1.4	$1.1 \cdot 10^3$	$1.0 \cdot 10^{-7}$	5	100
Våt	1.8	2.5	$1.8 \cdot 10^3$	$4.0 \cdot 10^{-7}$	10	200

Dvs: Ved dybden $z = \pi/\alpha_a \approx 3\,m$ (6 m) ned i tørr (våt) leire

er $T(z,t) = T_0 + T_1^{(a)}\, e^{-\pi} \cos(\omega_a t - \pi)$

som er maksimal ca <u>½ år senere</u> enn når $T(0,t)$

er maksimal, dvs <u>midt på vinteren</u>!

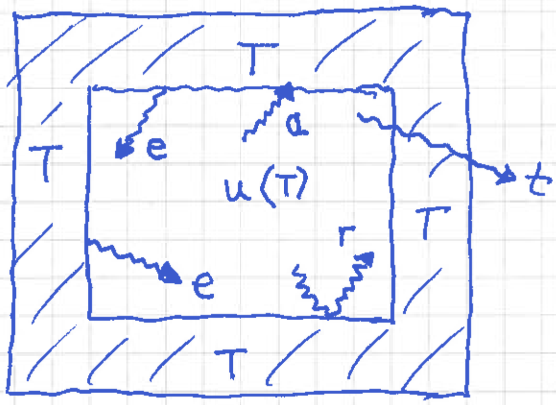
Men amplituden er <u>liten</u>:

$T_1^{(a)} \cdot e^{-\pi} \approx \frac{1}{2} \cdot 20\,K \cdot 0.04 \approx \underline{0.4\,K}$

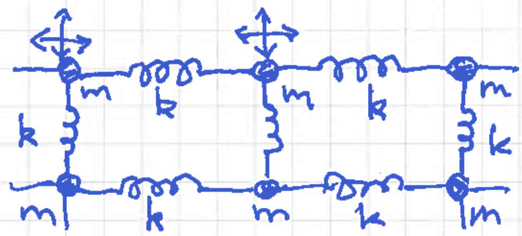
Stråling [YF 17.7; LHL 18.4; HS 13.3]

Innledning

Ser på hulrom, volum V, i termisk likevekt med boksens vegger:



- boks med temperatur T
- vibrerende atomer i veggene:



- dvs, vi har akselererte ladninger i veggene, og akselererte ladninger sender ut (emitterer) elektromagnetiske bølger, dvs stråling
- emitterte bølger kan

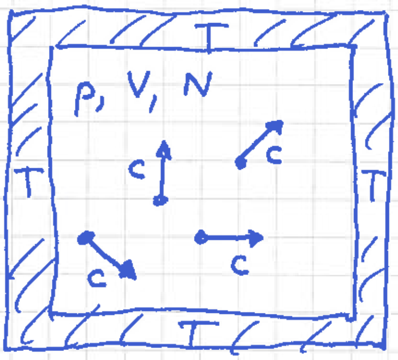
	absorberes	(andel a)
	reflekteres	(—"— r)
eller	transmitteres	(—"— t)

$\Rightarrow a + r + t = 1$

- et svart legeme defineres ved at $\boxed{a=1}$ (dvs $r=t=0$)
- hulrommet fylles med e.m. stråling, dvs fotoner, og energimengden pr volumenhet, $u = U/V$, blir bestemt av temperaturen, $u = u(T)$

Stefan-Boltzmanns lov

Hvordan avhenger u av temperaturen; $u(T) = ?$



- har N fotoner i hulrommet
- fotonenes hastighet: $v = c$ ($\approx 3\cdot 10^8$ m/s)
- generelt, for partikler med svært høy hastighet ("relativistiske partikler"):

$$E^2 = (mc^2)^2 + (Pc)^2$$

energi   masse   impuls

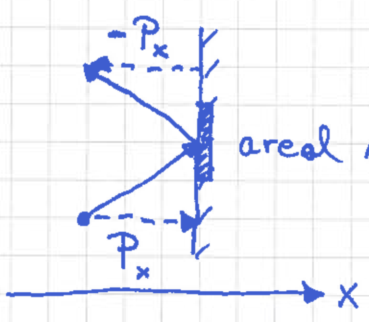
- fotoner: $m = 0 \Rightarrow E = Pc$

Planck: $E = hf$; h = Plancks konstant; f = fotonets frekvens

$\Rightarrow P\cdot c = h\cdot f \Rightarrow P = h\cdot f/c = h/\lambda$; λ = —"— bølgelengde

- kinetisk gassteori (se s. 92-94) gir trykket i fotongassen:

$$p \overset{\text{def}}{=} \langle F_x \rangle / A \overset{N2}{=} \langle \Delta P_x / \Delta t \rangle / A$$



$\Delta \tilde{P}_x = 2P_x$ [Termisk likevekt innebærer at veggen $\perp$ x-aksen. for hvert absorberte foton med impuls $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$ vil emittere et foton med impuls $(-P_x, P_y, P_z)$]

$\Delta \tilde{P}_x = 2P_x$ = impuls overført til veggen pr partikkel (foton)

Antall fotoner som treffer A i løpet av tid Δt:

$$\frac{1}{2} N \cdot \frac{A\cdot v_x \cdot \Delta t}{V}$$ (se s. 93)

$$\Rightarrow p = \frac{\langle \frac{1}{2} N \frac{A v_x \Delta t}{V} \cdot 2P_x / \Delta t \rangle}{A} = \frac{N}{V} \langle P_x \cdot v_x \rangle$$

Isotropi $\Rightarrow \langle P_x v_x \rangle = \frac{1}{3} \langle \vec{P} \cdot \vec{v} \rangle = \frac{1}{3} \langle P \cdot v \rangle$

$P = E/c$, $v = c \Rightarrow P \cdot v = E$

Fotongassens (indre) energi: $U = N \langle E \rangle$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{3} \frac{N \langle E \rangle}{V} = \frac{1}{3} \frac{U}{V} = \frac{1}{3} u$$

På s. 123–124 utledet vi et generelt uttrykk for dS, uttrykt ved dT og dV. Underveis, s. 124, fant vi at

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

som vi nå får god bruk for:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{\partial}{\partial V}\left[u(T) \cdot V\right] = u(T)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{1}{3} u(T)\right] = \frac{1}{3} \frac{du(T)}{dT}$$

Dermed:

$$u + \frac{1}{3} u = T \cdot \frac{1}{3} \frac{du}{dT}$$

$$\Rightarrow 4u = T \frac{du}{dT} \Rightarrow \frac{du}{u} = 4 \frac{dT}{T}$$

$$\Rightarrow \ln u = 4 \ln T + \ln A \qquad (A = \text{konst.})$$

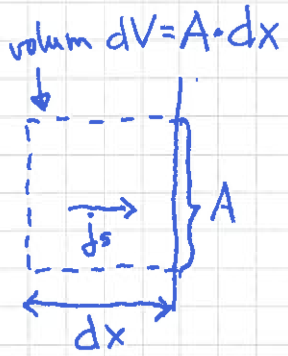
$$\Rightarrow \boxed{u(T) = A \cdot T^4}$$

Vi er strengt tatt på jakt etter

$j_s(T)$ = emittert strålingsenergi pr flateenhet og pr tidsenhet fra et svart legeme med temperatur T

Vi skal finne $j_s(T)$ fra $u(T)$, ved å benytte oss av at i termisk likevekt må legemet absorbere og emittere nøyaktig like mye energi pr flate- og tidsenhet, noe som må gjelde for enhver bølgelengde. Vi bestemmer derfor absorbert energimengde, og har da samtidig fastlagt emittert energimengde!

Ser på energistrøm mot areal A av veggen pr flate- og tidsenhet:



$$j_s(T) = \left\langle \frac{1}{2} \cdot \frac{dU}{A \cdot dt} \right\rangle$$

halvparten av fotonene går mot høyre!

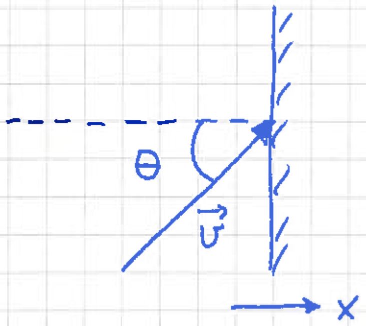
$$dU = u(T)\, dV = u(T)\, A\, dx$$

$$v_x = dx/dt$$

$$\Rightarrow j_s(T) = \left\langle \frac{1}{2} \frac{u(T)\, A\, dx}{A\, dt} \right\rangle = \frac{1}{2} u(T) \langle v_x \rangle$$

Det er klart at $\langle v_x \rangle$ må bli c multiplisert med et tall mindre enn 1, slik at vi allerede kvalitativt kan konkludere med at $j_s(T) \sim T^4$.

Vi regner ut $\langle v_x \rangle$ ved å midle over alle mulige retninger på $\vec{v}$, dog slik at $v_x > 0$:



$$\vec{v} = c \cdot \hat{v}$$

$$v_x = c \cdot \cos\theta$$

$$\langle v_x \rangle = \frac{\iint v_x \, d\Omega}{\iint d\Omega} \quad ; \quad d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$= \text{romvinkelelement}$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (dekker $\overset{\text{ulike}}{\smile}$ retninger for gitt θ ved å rotere omkring x-aksen (-----))

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (vinkel mellom $\vec{v}$ og -----, se figur; $\theta > \pi/2$ tilsvarer $v_x < 0$)

$$\Rightarrow \underline{\langle v_x \rangle} = c \cdot \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \, \sin\theta \cos\theta}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \, \sin\theta} = c \cdot \frac{\Big|_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin^2\theta}{\Big|_0^{\pi/2} (-\cos\theta)} = \underline{\frac{c}{2}}$$

$$\Rightarrow j_s(T) = \frac{1}{4} c \, u(T) = \frac{1}{4} c A T^4 = \sigma T^4$$

med $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \, \mathrm{W/m^2 \cdot K^4}$ = Stefan-Boltzmanns konstant

Stefan-Boltzmanns lov, $\boxed{j_s(T) = \sigma T^4}$, må gjelde for alle mulige bølgelengder hver for seg, og dermed også totalt.

Plancks fordelingslov

Energien i strålingshulrommet vil bestå av fotonenergier som tilsvarer alle mulige frekvenser, $0 \leq f \leq \infty$.

For gitt temp. T, hvor mye bidrar ulike frekvenser til $u(T)$?

$$u(T) = \int du = \int_0^\infty df \frac{du}{df} = \int_0^\infty df\, \eta(f,T)$$

dvs $\eta(f,T) = du/df$ = energi pr volum- og frekvensenhet

[dvs $du = df\, \eta(f,T)$ = energi pr volumenhet fra fotoner med frekvens mellom f og $f+df$]

Oppskriften for å bestemme $\eta(f,T)$ er grovt sett slik:

- se på et hulrom med volum $V = L_x \cdot L_y \cdot L_z$
- for et gitt materiale i veggene vil Maxwells ligninger for elektrisk felt $\vec{E}$ og magnetfelt $\vec{B}$ gi oss grensebetingelser for $\vec{E}$ (og $\vec{B}$) i grenseflaten mellom hulrom og vegg.
- dette vil fastlegge de mulige bølgelengder λ, og dermed de mulige frekvenser f for bølgene i hulrommet; med andre ord de mulige frekvensene mellom f og $f+df$, og dermed antall mulige frekvenser pr frekvensenhet, den såkalte tilstandstettheten (evt. modetettheten)

- resultatet blir at antall mulige frekvenser pr volum- og frekvensenhet er proporsjonalt med f^2, og med prop.faktor $8\pi/c^3$.

- <u>klassisk</u> elektromagnetisme gir en energitetthet

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

der $\vec{E}$ = elektrisk felt og $\vec{B}$ = magnetfelt, og ε_0 og μ_0 er naturkonstanter. Ifølge det <u>klassiske</u> ekvipartisjonsprinsippet (s. 101-102) blir da midlere energi pr "svingemode"

$$\langle E \rangle = 2 \cdot \tfrac{1}{2} k_B T = k_B T$$

siden det er 2 kvadratiske ledd i energifunksjonen u.

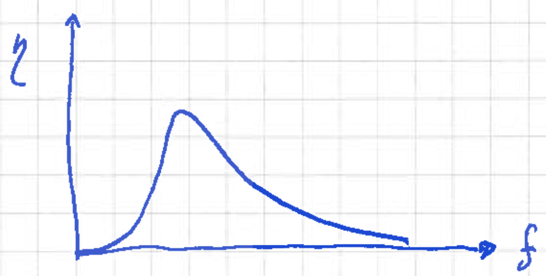
- dermed: $\eta(f,T) = k_B T \cdot 8\pi f^2/c^3$ (klassisk!)

- dette resultatet er <u>problematisk</u>, og heldigvis <u>feil</u>!

<u>Problematisk</u>, fordi

$$u(T) = \int_0^\infty df\, \eta(f,T) = \frac{8\pi k_B T}{c^3} \int_0^\infty f^2\, df = \infty$$

<u>Feil</u>, fordi <u>observert</u> fordeling ser slik ut:



- Løsningen ligger i Plancks hypotese (1900):

$$E(f) = 0,\ hf,\ 2hf,\ldots = j\cdot hf \qquad (j = 0,1,2,\ldots)$$

Statistisk mekanikk gir nå: (se s 104)

$$\langle E\rangle = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} E_j \exp(-E_j/k_BT)}{\sum_{j=0}^{\infty} \exp(-E_j/k_BT)} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} jhf \exp(-jhf/k_BT)}{\sum_{j=0}^{\infty} \exp(-jhf/k_BT)}$$

$= \ldots$ endel algebra $\ldots$

$$= \frac{hf}{\exp(hf/k_BT) - 1}$$

slik at

$$\eta(f,T) = \frac{8\pi h f^3/c^3}{\exp(hf/k_BT) - 1}$$

som stemmer med observert fordeling (nederst s. 150)

- energi pr volumenhet blir dermed

$$u(T) = \int_0^\infty df\, \eta(f,T) = \ldots \text{ endel algebra} \ldots$$

$$= \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^3}\cdot T^4$$

slik at (se s 148)

$$j_s(T) = \frac{1}{4} c\, u(T) = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2}\cdot T^4 = \sigma\cdot T^4$$

med $\sigma \approx 5.67\cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2\cdot K^4}$; Stefan-Boltzmanns lov

— " — konstant

- ved å sette $\partial\eta/\partial f = 0$ finner en η_{max} for $hf/k_BT = 2.821$, dvs $f(\eta_{max})/T = 5.9 \cdot 10^{10}$ Hz/K

- videre kan en skrive

$$u(T) = \int_0^\infty d\lambda \, \xi(\lambda)$$

med $\xi(\lambda) = du/d\lambda = \frac{du}{df} \cdot \frac{df}{d\lambda}$,

dvs som en fordeling over bølgelengder λ.

Med $\eta = du/df$ fra s. 151 og $f = c/\lambda$, er det en "smal sak" å vise at

$$\xi(\lambda) = \frac{8\pi hc/\lambda^5}{\exp(hc/\lambda k_B T) - 1}$$

som har et maksimum for

$$\lambda_{max} \cdot T \simeq 2.90 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

dvs <u>Wiens forskyvningslov</u>

Stråling; eksempler

- Estimer varmetapet fra en naken kropp pga stråling, i omgivelser ved $-5\,°C$. (Hudens overflate: ca $30\,°C$)

Løsning:

$$j_{netto} = j_{ut} - j_{inn} = \sigma (T_{hud}^4 - T_{omg}^4)$$
$$= 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} (303^4 - 268^4) K^4$$
$$= (478 - 292)\ W/m^2 = 186\ W/m^2$$

Med $h = 180\,cm$, $b \approx 35$ og $d \approx 15\,cm$ blir $A \approx 1.8\ m^2$

$\Rightarrow Q_{netto} = j_{netto} \cdot A \approx \underline{335\ W}$ [Vel, strengt tatt en effekt, så kanskje heller $P_{netto} \doteq 335\,W$]

$(Q_{ut} \simeq 860\ W$ brutto)

- Sammenlign med energiinntak via mat.

Løsning:

Normalt matinntak tilsvarer ca 2000 kcal pr døgn, eller la oss si 10000 kJ pr døgn, som tilsvarer

$P_{inn} = 10^7 J / 3600 \cdot 24\,s \approx \underline{116\ W}$

Som er betydelig mindre enn både P_{brutto} og P_{netto} fra første oppg.

Klær eliminerer det meste av strålingstapet.

- Sammenlign utstrålt energi pr masseenhet fra sola og fra en voksen person.

Løsning:

Sola har $M = 2 \cdot 10^{30}\ kg$ og $P_{ut} = 3{,}9 \cdot 10^{26}\ W$

$\Rightarrow 1{,}95 \cdot 10^{-4}\ W/kg$

En voksen person har (f.eks.) $M = 86\ kg$ og $P_{ut} = 860\ W$

$\Rightarrow 10\ W/kg$

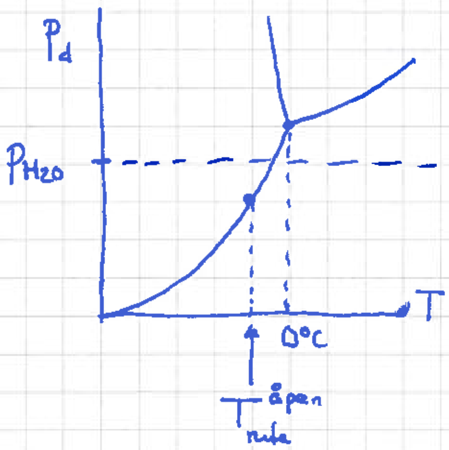
- Hvordan hindrer en carport (evt. en husvegg eller en skogkant) is og rim på bilruta?

Løsning:

Anta en klar vinternatt, uten vind og snø, og temperatur omkring 0°C. Himmelen stråler da effektivt som et svart legeme med temp. omlag 20 grader kaldere enn lufttemperaturen.

På åpen parkeringsplass foregår utveksling av strålingsenergi i stor grad mellom ruta og himmelen, og ruta kan bli en god del kaldere enn lufta omkring. I carport eller ved en vegg utveksler ruta strålingsenergi i stor grad med carportens tak eller husveggen, som begge har temp. omtrent som lufta omkring, og bare i liten grad med den kalde himmelen. Rutas temperatur blir dermed omtrent som lufta omkring.

Anta nå at luftas partialtrykk p_{H_2O} ligger mellom damptrykket ved 0°C, $p_d(0)$, og damptrykket ved himmelens temp., $p_d(-20)$, eller rettere sagt $p_d(T_{rute}^{åpen})$, der $T_{rute}^{åpen}$ er rutas temp. hvis bilen parkeres "åpent":



På ruta på bilen midt på parkeringsplassen er mengden vann i lufta så stor at $p_{H_2O} > p_d(T_{rute}^{åpen})$, og vi får kondensasjon og rimdannelse. Men $p_{H_2O} < p_d(0°C)$, så bilen i carporten forblir rimfri!

- Jorda mottar 1370 W/m^2 fra sola. Avstanden til sola er 150 mill. km. Hva er da utstrålt effekt fra sola?

Løsning:

$$P_{sol} = j(\text{fra sola, i avstand } 150\cdot10^9\,m) \cdot A(\text{kuleflate med } R = 150\cdot10^9\,m)$$
$$= 1370\,W/m^2 \cdot 4\pi\cdot(150\cdot10^9\,m)^2$$
$$= \underline{\underline{3.9\cdot10^{26}\,W}}$$

- Hva blir da solas overflatetemperatur, når sola har radius $7\cdot10^8\,m$?

Løsning:

$$T_{sol} = [\,j_{sol}(R_{sol})/\sigma\,]^{1/4} = \left[\frac{P_{sol}/4\pi R_{sol}^2}{\sigma}\right]^{1/4}$$
$$= \left[\frac{3.9\cdot10^{26}\,W/(4\cdot\pi\cdot(7\cdot10^8\,m)^2)}{5.67\cdot10^{-8}\,W/m^2K^4}\right]^{1/4} \simeq \underline{\underline{5800\,K}}$$

- Hva blir da jordas overflatetemp. (i middel)?

Løsning:

$$\underbrace{1370\,\frac{W}{m^2}\cdot\pi R_J^2}_{P_{inn}} = \underbrace{4\pi R_J^2\cdot\sigma T_{jord}^4}_{P_{ut}}$$

$$\Rightarrow T_{jord} = \left[\frac{1370\,W/m^2}{4\cdot5.67\cdot10^{-8}\,W/m^2K^4}\right]^{1/4} = \underline{279\,K}$$

Ikke verst; $T_{observert} \simeq 288\,K.$

Vi har f.eks. neglisjert "drivhuseffekt" pga atmosfæren: