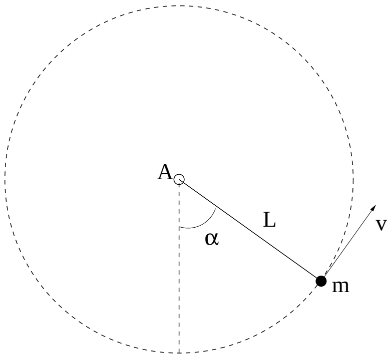
TFY4115 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2013.
Øving 4. Veiledning: 17. september. Innleveringsfrist: 20. september kl 14.

Oppgave 1: Matematisk pendel



Figuren til venstre viser en såkalt matematisk pendel, bestående av ei kule (tilnærmet punktmasse) med masse m i enden av ei masseløs stang med lengde L. Stanga kan svinge uten friksjon omkring festepunktet (A), slik at kula følger en sirkelbane med radius L. Kulas bevegelse er bestemt ved ligningen

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\alpha = 0.$$

(N2 tangentielt til sirkelbanen, og vi har brukt sammenhengen mellom hastighet og vinkelhastighet ved sirkelbevegelse. Se også oppgave 4 i øving 2.)

For små utsving fra likevekt, $\alpha \ll 1$, kan $\sin\alpha$ erstattes med α, og vi har en enkel harmonisk oscillator, med kjent løsning, og med vinkelfrekvens ("egenfrekvens") $\omega_0 = \sqrt{g/L}$. Men for større utsving fra likevekt må vi beholde $\sin\alpha$, og da kan ligningen ovenfor ikke løses analytisk. Numerisk er det imidlertid ingen problemer! Den enkleste og mest intuitive numeriske måten å bestemme $\alpha(t)$ på er den såkalte Euler-metoden: N2 kan skrives på formen

$$dv = \frac{F}{m}\,dt.$$

Det betyr at hastigheten ved tidspunktet $t+dt$ kan bestemmes dersom vi kjenner hastigheten ved tidspunktet t:

$$v(t+dt) = v(t) + dv = v(t) + \frac{F}{m}\,dt.$$

Med et *endelig* tidssteg Δt blir ligningen

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \Delta v = v(t) + \frac{F(t)}{m}\,\Delta t$$

bare tilnærmet riktig, men formodentlig en riktig *god* tilnærmelse dersom Δt velges tilstrekkelig liten. Samme oppskrift kan vi i neste omgang bruke for å bestemme posisjonen, eller som her, vinkelen $\alpha(t)$. Vi har $v = ds/dt = L\,d\alpha/dt$, dvs

$$d\alpha = \frac{v}{L}\,dt,$$

og med endelig tidssteg gir dette

$$\alpha(t+\Delta t) = \alpha(t) + \Delta\alpha = \alpha(t) + \frac{v(t)}{L}\,\Delta t.$$

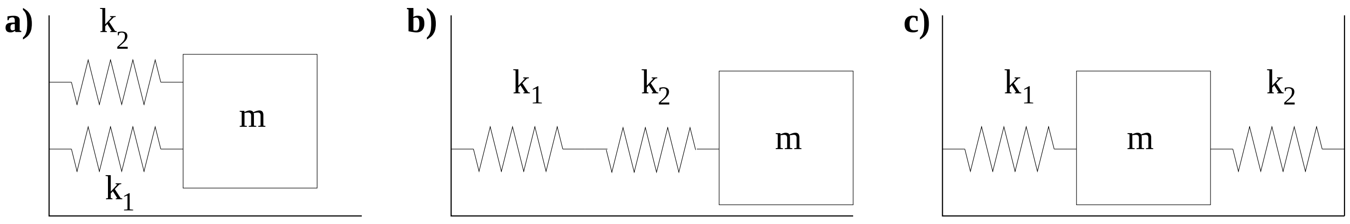
Hvis vi nå, som her, kjenner $\alpha(t=0)$ og $v(t=0)$, dvs $\alpha(0) = \alpha_0$ og $v(0) = v_0$, kan ligningene over brukes til å finne $\alpha(\Delta t)$ og $v(\Delta t)$, deretter $\alpha(2\Delta t)$ og $v(2\Delta t)$ osv. I vårt konkrete tilfelle er det tyngdens tangentialkomponent som bestemmer akselerasjonen, og dermed hastigheten tangentielt,

$$\frac{F}{m} = -g\sin\alpha.$$

I MATLAB-programmet pendel_matematisk.m og i PYTHON-programmet pendel_matematisk.py er denne oppskriften implementert. (Det beste er selvsagt at du skriver et program selv, men du skal ikke ha dårlig samvittighet om du laster ned et ferdig program og tar dette i bruk. Dårlig samvittighet skal du derimot ha hvis du ikke gjør denne oppgaven i det hele tatt!) **Kjør programmet** med startvinkel $\alpha_0 = 0$, men med diverse ulike verdier av starthastigheten v_0 (dvs $v(1)$ (MATLAB) evt $v[0]$ (PYTHON) i programmet), les av tilhørende maksimalt vinkelutslag, og plott svingeperioden T som funksjon av $\alpha_{\max}$. **Vis at** mekanisk energi (pr masseenhet), $E/m = (K+U)/m$, er bevart, ved å regne den ut og plotte den som funksjon av t i programmet.

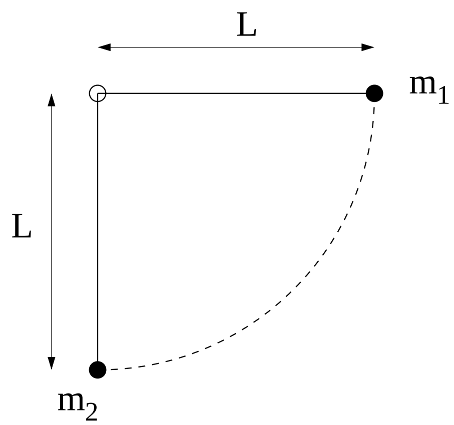
Oppgave 2: Kobling av fjærer

Et enkelt masse-fjær-svingesystem med masse m og fjærstivhet k_i har som kjent svingefrekvens $\omega_i = \sqrt{k_i/m}$. Sett opp "N2" for de tre svingesystemene vist i figuren nedenfor og finn svingefrekvensen ω for hvert av systemene uttrykt ved ω_1 og ω_2. I alle tilfellene er fjærene masseløse, og det er ingen friksjon.



Oppgave 3: Kulekollisjoner

To kuler med masse m_1 og m_2 er hengt opp i samme punkt med tynne, vektløse snorer med lengde L. Kula med masse m_1 trekkes ut til snora er horisontal og slippes. Den svinger nedover og treffer kula med masse m_2 i et sentralt støt. Betrakt kulene som punktmasser slik at snorene er vertikale når kollisjonen skjer.



a) Hva er hastigheten v_1 til kula med masse m_1 og strekket S_1 i snora som masse m_1 henger i, like før støtet?

b) Anta at kulene er klebrige og kollisjonen fullstendig uelastisk. Hvor høyt kommer kulene etter kollisjonen?

c) Finn forholdet mellom mekanisk energi etter og før denne fullstendig uelastiske kollisjonen.

Anta heretter at kollisjonen er elastisk.

d) Finn uttrykk for hastighetene til kule 1 og kule 2 like etter kollisjonen.

e) Hva må masseforholdet m_1/m_2 minst være for at kule 2 etter støtet skal svinge helt rundt, dvs nå topp-punktet med stram snor?

Oppgave 4: Flervalgsoppgaver

a) En kloss er festet til ei fjær og utfører udempede harmoniske svingninger med vinkelfrekvens ω. Ved et bestemt tidspunkt er fjæra strukket en lengde x_0 og klossens hastighet er da v_0. Hva er klossens maksimale hastighet?

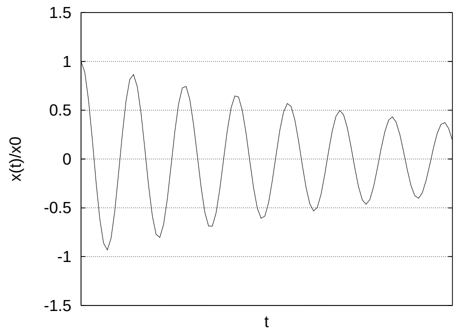
A v_0
B $v_0 + \omega x_0$
C $v_0\sqrt{1 + (\omega x_0/v_0)^2}$
D $v_0\sqrt{1 - (\omega x_0/v_0)^2}$

b) Figuren viser utsvinget

$$x(t) = x_0 e^{-t/\tau} \cos \omega t,$$

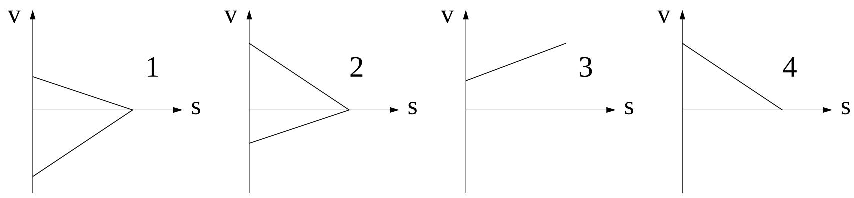
eller rettere sagt $x(t)/x_0$, for en dempet harmonisk svingning. Omtrent hvor stort er produktet $\omega\tau$ mellom vinkelfrekvensen og den "karakteristiske tiden" for dempingsforløpet?

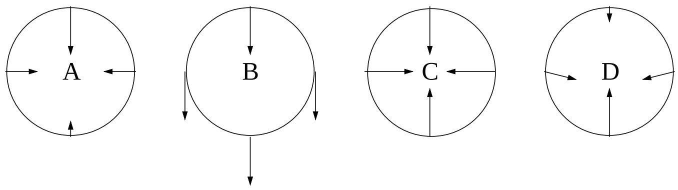
A 0.022
B 1.7
C 14
D 45



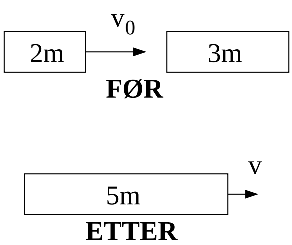
c) En kloss sendes oppover et skråplan. Det er friksjon mellom klossen og underlaget. Hvilken eller hvilke av figurene viser mulig graf for klossens hastighet v? (s angir klossens posisjon på skråplanet, og v og s er begge positive i retning oppover skråplanet.)

A Kun graf 1.
B Kun graf 2.
C Graf 2 og 4.
D Graf 1 og 3.





d) Ei vogn har stor nok hastighet til å fullføre en vertikaltstilt sirkelformet "loop". Hvilken figur viser riktige akselerasjonsvektorer på de fire stedene på loopen (nederst, øverst, venstre og høyre)? (Se bort fra friksjon.)



e) En kloss med masse $2m$ kolliderer fullstendig uelastisk med en kloss med masse $3m$. Før kollisjonen har klossen med masse $2m$ hastighet v_0 mens klossen med masse $3m$ ligger i ro. Etter kollisjonen har klossene felles hastighet v. Hvor mye mekanisk energi har gått tapt i kollisjonen?

A $mv_0^2/3$ B $2mv_0^2/5$
C $3mv_0^2/5$ D mv_0^2