TFY4125 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til øving 8.

Oppgave 1.

a) **C**

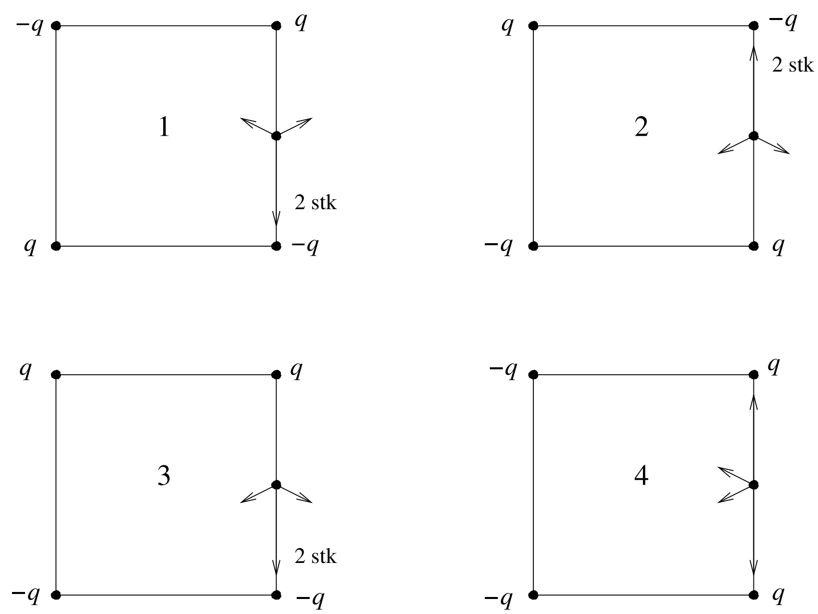
$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} = m\boldsymbol{a}$$

Newtons 2. lov. Her er $q = -e$, så elektronets akselerasjon blir

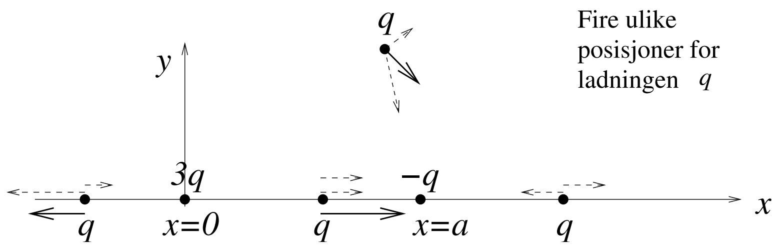
$$\boldsymbol{a} = -\frac{e}{m}\boldsymbol{E}$$

altså mot venstre.

b) **C**
Totalt elektrisk felt i P er vektorsummen av bidragene fra de fire punktladningene. Konfigurasjonen i figur 3 gir den største feltstyrken. (Ingen feltbidrag har her komponent oppover.)



Oppgave 2



a) Punktladningen q er i likevekt dersom kraften på den er lik null. Her virker det to krefter, en frastøtende fra $3q$ og en tiltrekkende fra $-q$, og disse to kan bare kansellere hverandre dersom de har eksakt motsatt retning. Det er ikke mulig dersom q er plassert utenfor x-aksen, f.eks. som i figuren over. (Her er de to enkeltkomponentene av kraften angitt med stiplede piler og totalkraften med heltrukken pil.) Derfor må eventuelle likevektsposisjoner være på x-aksen.

b) Vi har fått oppgitt at det er *en* likevektsposisjon x_0 for q på x-aksen. Vi kan ikke ha x_0 mellom 0 og a, for på dette intervallet peker de to kraftkomponentene i samme retning. Vi kan heller ikke ha x_0 til venstre for $x = 0$, for da er avstanden mellom q og $3q$ alltid mindre enn avstanden mellom q og $-q$, og følgelig den frastøtende kraften $3q^2/4\pi\varepsilon_0 x_0^2$ alltid større enn den tiltrekkende kraften $q^2/4\pi\varepsilon_0(a-x_0)^2$. Altså må $x_0 > a$. Vi bestemmer x_0 ved å sette total kraft lik null:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 x_0^2}\hat{x} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(x_0-a)^2}\hat{x} \\
&\Rightarrow \frac{3}{x_0^2} = \frac{1}{(x_0-a)^2} \\
&\Rightarrow 3x_0^2 - 6ax_0 + 3a^2 = x_0^2 \\
&\Rightarrow 2x_0^2 - 6ax_0 + 3a^2 = 0 \\
&\Rightarrow x_0 = \frac{6a}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{36a^2 - 24a^2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}a \simeq 2.37a
\end{aligned}$$

Da forutsetningen var $x_0 > a$, er løsningen med negativt fortegn foran kvadratroten ikke en aktuell løsning. (Den tilsvarer $x \simeq 0.63a$, hvor begge kraftkomponenter er like store og har *samme* retning.)

Stabiliteten av likevektsposisjonen x_0 bestemmes kanskje enklest ved å se på nettokraften når $x \gg x_0$. Da "ser" punktladningen q tilnærmet en punktladning $3q - q = 2q$ og må følgelig erfare en netto frastøtende kraft. Vi vet at kraften er null bare i $x = x_0$. Da må kraften peke mot høyre for alle $x > x_0$, også for en liten forflytning til høyre for x_0, mens den må peke mot venstre for en liten forflytning til venstre for x_0. Dermed er likevekten ustabil mhp en forflytning langs x-aksen.

Alternativt, med litt regning: La oss først forenkle notasjonen ved å innføre funksjonen $f(x)$:

$$\boldsymbol{F}(x) = F(x)\hat{x} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(x-a)^2}\right)\hat{x} \equiv \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}f(x)\hat{x}$$

Deretter bestemmer vi df/dx i $x = x_0$:

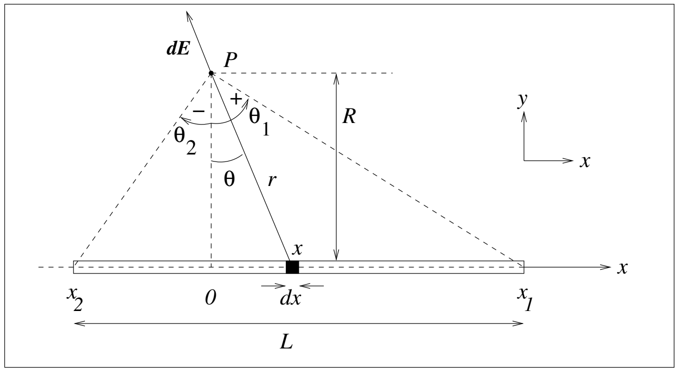
$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} = -\frac{6}{x_0^3} + \frac{2}{(x_0-a)^3} \simeq -\frac{6}{(2.37a)^3} + \frac{2}{(1.37a)^3} \simeq \frac{0.33}{a^3} > 0$$

Da $f(x_0) = 0$ og $f'(x_0) > 0$, er likevekten ustabil.

Oppgave 3

a) Med "linjeladning" (dvs: ladning pr lengdeenhet) λ må ladningene dq og Q på henholdsvis en liten lengde dx og på hele staven bli

$$dq = \lambda\, dx \qquad Q = \lambda L$$



b) Elektrisk felt fra lengdeelement dx i posisjon x:

$$d\boldsymbol{E} = \frac{\lambda\, dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = A\frac{dx}{r^2}\hat{r}$$

der vi har innført $A = \lambda/4\pi\varepsilon_0$. Fra figuren ser vi at denne vektoren har komponentene

$$dE_x = -dE\sin\theta = -\frac{A\, dx}{r^2}\sin\theta \qquad dE_y = dE\cos\theta = \frac{A\, dx}{r^2}\cos\theta$$

Her har vi valgt $x = 0$ når $\theta = 0$, og fortegnet stemmer med oppgaveteksten, dvs $\theta > 0$ når $x > 0$. Vi bruker tipset i oppgaven og uttrykker dx og $1/r^2$ ved vinkelen θ:

$$\begin{aligned} x &= R\tan\theta \;\Rightarrow\; dx = \frac{Rd\theta}{\cos^2\theta} \\ r &= \frac{R}{\cos\theta} \;\Rightarrow\; \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\theta}{R^2} \\ \Rightarrow \frac{dx}{r^2} &= \frac{d\theta}{R} \end{aligned}$$

De søkte komponentene E_x og E_y av feltet $\boldsymbol{E}$ i punktet P fra hele staven får vi ved å integrere dE_x og dE_y:

$$\begin{aligned} E_x &= \int dE_x = -\frac{A}{R}\int_{\theta_2}^{\theta_1}\sin\theta d\theta = \frac{A}{R}\Big|_{\theta_2}^{\theta_1}\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \\ E_y &= \int dE_y = \frac{A}{R}\int_{\theta_2}^{\theta_1}\cos\theta d\theta = \frac{A}{R}\Big|_{\theta_2}^{\theta_1}\sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2) \end{aligned}$$

Kommentar: Her kunne en ha vært "uheldig" og startet med sammenhengen $x = r\sin\theta$, som gir $dx = r\cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, dr$, ettersom både θ og r varierer med x. Men det går bra likevel: Vi har $\cos\theta = R/r$, dvs $r = R/\cos\theta$, og dermed

$$dr = -R\frac{1}{\cos^2\theta}(-\sin\theta)\, d\theta$$

slik at

$$\begin{aligned} \frac{dx}{r^2} &= \frac{r\cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, dr}{r^2} \\ &= \frac{\cos\theta\, d\theta\cdot\cos\theta}{R} + \frac{\sin\theta\cdot R\sin\theta\, d\theta}{R^2} \\ &= \frac{d\theta}{R}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = \frac{d\theta}{R} \end{aligned}$$

c) Med P like langt fra stavens to ender er $\theta_1 = -\theta_2$ og følgelig $\cos\theta_1 - \cos\theta_2 = 0$ og $\sin\theta_1 - \sin\theta_2 = 2\sin\theta_1 = L/\sqrt{R^2 + L^2/4}$. Dermed:

$$E_x = 0$$

og

$$E = E_y = \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 R\sqrt{R^2 + L^2/4}}$$

Langt unna staven, dvs $R \gg L$: Vi kan nå erstatte kvadratroten med R, idet vi kan neglisjere $L^2/4$ i forhold til R^2. Vi får da:

$$E \simeq \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Dette er det samme som feltet fra en punktladning Q i avstand R. Ikke uventet: Langt unna ser staven essensielt ut som en punktladning med total ladning $Q = \lambda L$.

d) En uendelig lang stav oppnår vi ved å la $\theta_2 \to -\pi/2$ og $\theta_1 \to \pi/2$. Da blir igjen $E_x = 0$ og følgelig

$$E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

Med andre ord: Feltet fra en uendelig lang linjeladning faller av som en over avstanden R.

Oppgave 4

a) Arealet av en tynn ring med radius R og bredde dR er $dA = 2\pi R\, dR$, slik at ladningen på en slik ring blir

$$dq = \sigma\, dA = 2\pi\sigma R\, dR$$

Arealet av skiva er $A = \pi R_0^2$, så skivas totale ladning blir

$$Q = \sigma A = \pi\sigma R_0^2$$

Hvis en ikke husker hva arealet av ei sirkelformet skive er (!), kan en selvsagt bestemme totalladningen Q ved å integrere dq:

$$Q = \int dq = \int_0^{R_0} 2\pi\sigma R\, dR = 2\pi\sigma \Big|_0^{R_0} \frac{R^2}{2} = \pi\sigma R_0^2$$

Og om en heller ikke husker hva omkretsen av en ring er (!), kan ladningen på den tynne ringen bestemmes ved å starte med en liten vinkel $d\phi$ og arealet avgrenset mellom R og $R + dR$. Dette arealet er $Rd\phi \cdot dR$, og integrerer vi dette uttrykket over ϕ fra 0 til 2π, får vi nettopp $2\pi R\, dR$ som blir arealet av den tynne ringen med radius R og bredde dR.

b) Vi deler skiva opp i tynne ringer med bredde dR (se figur nedenfor). Alle punkter på ringen ligger i samme avstand r fra punktet på z-aksen. Diametralt motsatte punkter (evt arealer dA) fører til at $x-$ og y-komponentene til feltet forsvinner (jfr eksemplet fra forelesningene). z-komponenten blir

$$dE_z = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cos\theta$$

Da r er konstant rundt hele ringen, kan en la dQ være ladningen på hele den tynne ringen:

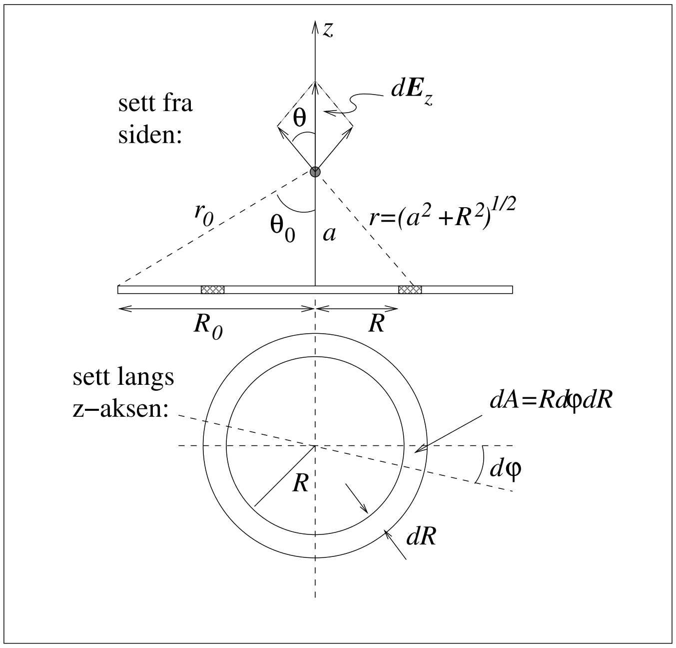
$$dQ = \sigma R\, dR \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi\sigma R\, dR$$

Dermed blir feltet fra hele skiva

$$E_z = \int dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{R_0} \frac{2\pi\sigma Ra\, dR}{(a^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0} \Big|_0^{R_0} \frac{(-1)}{\sqrt{a^2 + R^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R_0^2}}\right)$$

Her har vi benyttet at

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$$



Et alternativ ville ha vært å bruke vinkelen θ som integrasjonsvariabel:

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{R}{a} \quad\Rightarrow\quad d(\tan\theta) = \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{dR}{a} \\
r &= \frac{a}{\cos\theta} \\
\int_0^{R_0} \frac{R\,dR}{r^2}\cos\theta &= \int_0^{\theta_0} \left(\frac{\cos\theta}{a}\right)^2 a\tan\theta \frac{a\,d\theta}{\cos^2\theta}\cos\theta = \int_0^{\theta_0} \sin\theta\,d\theta \\
&= 1-\cos\theta_0 = 1-\frac{a}{r_0} = 1-\frac{a}{\sqrt{a^2+R_0^2}}
\end{aligned}$$

der r_0 og θ_0 er definert i figuren over.

c) Når $a \gg R_0$, kunne en i første omgang (som i oppgave 1c) tenke seg å erstatte $\sqrt{a^2+R_0^2}$ med a. Da får vi imidlertid bare den "trivielle" løsningen $E_z = 0$, mens vi er interessert i det dominerende ikke-forsvinnende bidraget til E_z. Det betyr at vi må rekkeutvikle $\sqrt{a^2+R_0^2}$ og ta med så mange ledd at vi alt i alt ender opp med noe som er forskjellig fra null:

$$\begin{aligned}
E_z &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{a}{a\sqrt{1+\frac{R_0^2}{a^2}}}\right) \\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\left(1-\frac{R_0^2}{2a^2}+\cdots\right)\right) \\
&\simeq \frac{\sigma R_0^2}{4\varepsilon_0 a^2} \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}
\end{aligned}$$

Her har vi brukt tilnærmelsen som var gitt i oppgaveteksten, $(1+\alpha)^{-1/2} \simeq 1-\alpha/2$, med $\alpha = R_0^2/a^2 \ll 1$. Dette er feltet i avstand a fra en punktladning $Q = \sigma A$, der $A = \pi R_0^2$ er arealet av sirkelskiva. Som forventet: Er vi tilstrekkelig langt borte, ser vi ikke forskjell på ei ladet skive og en punktladning.

I den motsatte grensen, $R_0 \gg a$, kan vi neglisjere leddet $a/\sqrt{a^2+R_0^2}$ i forhold til 1. Vi får da

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Altså et uniformt elektrisk felt som verken avhenger av avstanden a eller skivas utstrekning R_0. Dermed må dette være feltet utenfor et *uendelig stort plan* med ladningstetthet σ. Det er kanskje ikke umiddelbart opplagt at feltet da blir *uavhengig av avstanden* til planet, men slik er det altså! Selv om vi i praksis ikke har uendelig store flater til rådighet, er dette et viktig resultat: Med et stort ladet plan genererer vi et tilnærmet uniformt elektrisk felt i nærheten av planet, så lenge vi ikke kommer for nær planets ytterkanter. Vi skal bruke dette resultatet flere ganger senere, ikke minst i tilknytning til kondensatorer.