

MEKANIKK (DYNAMIKK)

①

[YF 1-11, 14 ; LL 1-7, 9]

Størrelser og enheter [YF1]

Eks: Masse, $m = 79.5$ kg
↑ ↑ ↑ ↖
størrelse symbol tallverdi enhet

Notasjon: $[m] = \text{kg}$ ("enhet til masse er kilogram")

SI-systemet:

Lengde: $[d] = \text{m}$ (meter)

Masse: $[m] = \text{kg}$ (kilogram)

Tid: $[t] = \text{s}$ (sekund)

Strømstyrke: $[I] = \text{A}$ (ampere)

Temperatur: $[T] = \text{K}$ (kelvin)

Stoffmengde: $[n] = \text{mol}$

} Grunnenheter

Hastighet: $[v] = \text{m/s}$

Akselerasjon: $[a] = \text{m/s}^2$

Impuls: $[p] = \text{kg m/s}$

} Sammensatte enheter

Kraft: $[F] = \text{kg m/s}^2 = \text{N}$ (newton)

Energi: $[W] = \text{Nm} = \text{J}$ (joule)

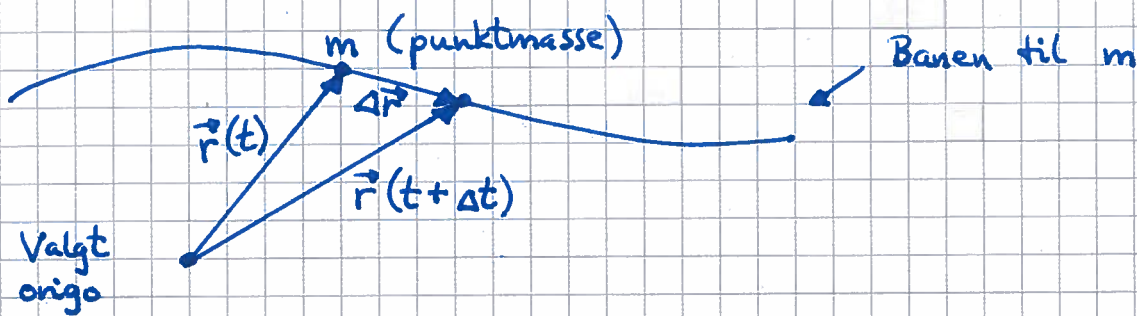
Effekt: $[P] = \text{J/s} = \text{W}$ (watt)

} Avledete enheter

Kinematikk

[YF 2,3 ; LL 1]

②



$\vec{r}(t)$ = posisjonen til m ved tid t

$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ = forflytningen i løpet av Δt

Hastighet (fart) $\stackrel{\text{def}}{=} \text{forflytning pr tidsenhet}$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (\text{tangent til banen; } \vec{v} \parallel \Delta \vec{r})$$

Akseleksjon $\stackrel{\text{def}}{=} \text{fartsendring pr tidsenhet}$

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (\vec{a} \parallel \Delta \vec{v})$$

Dekomponering :

Enhetsvektorer: $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ (evt. $\vec{e}_x, \vec{i}, \dots$)

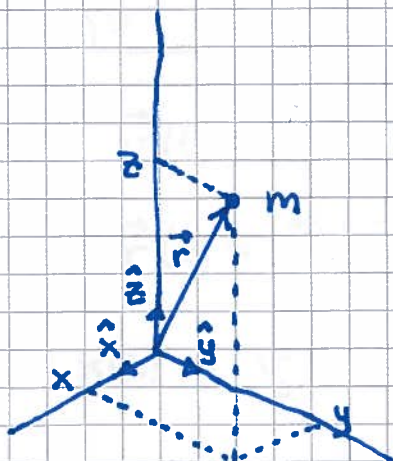
$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \quad (\text{dimensjonsløse})$$

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$$

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \dots = 0$$

(Senere: $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ osv.)



$$\Rightarrow \vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z} \quad (3)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z} ; \frac{dx}{dt} = v_x = \dot{x} \text{ osv.}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{x} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{y} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{z} ; \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = \dot{v}_x \text{ osv.}$$

Integrasjon gir \vec{r} og \vec{v} fra hhv \vec{v} og \vec{a} :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt \Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

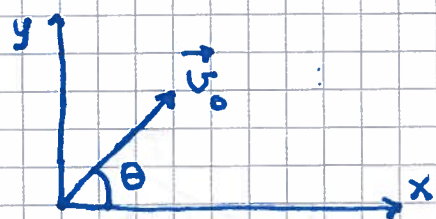
$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a} dt \Rightarrow \dots \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t) dt$$

Komponentvis: $x(t) = x(0) + \int_0^t v_x(t) dt \text{ osv.}$

$$v_z(t) = v_z(0) + \int_0^t a_z(t) dt \text{ osv.}$$

Eks: Skrått kast (i tyngdefeltet)



$$\vec{a} = -g\hat{y} ; \text{ anta } \vec{r}(0) = 0 \text{ og } \vec{v}(0) = \vec{v}_0$$

Finn $\vec{r}(t)$ og banen $y(x)$.

$$\text{Løsn: } \vec{v}(t) = \vec{v}_0 - g\hat{y} \int_0^t dt = \vec{v}_0 - gt\hat{y}$$

$$\vec{r}(t) = \int_0^t \{ \vec{v}_0 - gt\hat{y} \} dt = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \hat{y}$$

$$\Rightarrow x(t) = v_0 t \cos \theta, \quad y(t) = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} gt^2$$

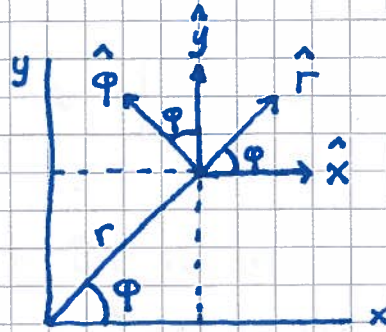
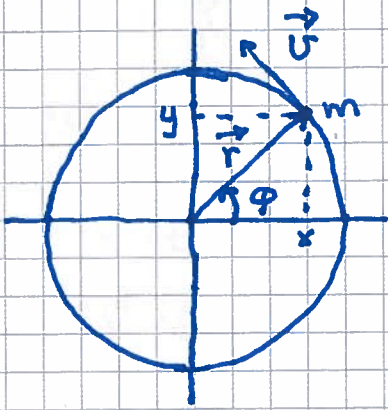
$$\text{Banen: } t(x) = x / v_0 \cos \theta \Rightarrow y = v_0 \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right) \sin \theta - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2$$

(dvs parabel)

Sirkelbevægelse

[YF 3.4 ; LL 1.7, 1.8]

(4)



Polarkoordinater:

r = afstand fra origo, φ = vinkel mellem \hat{x} og \hat{r} (positiv mod klokka)

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

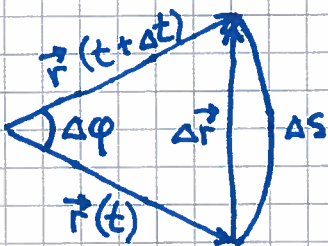
$$\vec{r} = \hat{x} r \cos \varphi + \hat{y} r \sin \varphi = r \hat{r}$$

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi, \quad \hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$$

Vinkelhastighed $\stackrel{\text{def}}{=} \text{omløpt vinkel pr tidsenhed:}$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}; \quad [\omega] = s^{-1}$$

Vinkel $\stackrel{\text{def}}{=} \text{buelængde / radius: } \Delta\varphi = \Delta s / r$



Når $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\Delta\varphi \rightarrow 0, \quad \Delta r = |\Delta\vec{r}| \rightarrow \Delta s = r \Delta\varphi$$

$$\Delta\vec{r} \perp \vec{r}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \Delta\varphi}{\Delta t} = r \frac{d\varphi}{dt} = r \omega$$

$$\vec{v} \parallel \Delta\vec{r} \perp \vec{r} \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{r} \quad (\text{som vi ser fra figuren})$$

$$\Rightarrow \vec{v} = v \hat{\varphi} = r \omega \hat{\varphi}$$

5

Uniform sirkelberegelse : ω og v konstante

Anta $\Rightarrow \varphi(0) = 0$

$$\int_0^t d\varphi = \omega \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi(t) = \omega t}$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \hat{x} r \cos \omega t + \hat{y} r \sin \omega t$$

$$\vec{v}(t) = -\hat{x} r \omega \sin \omega t + \hat{y} r \omega \cos \omega t$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{a}_\perp(t) &= -\hat{x} r \omega^2 \cos \omega t - \hat{y} r \omega^2 \sin \omega t \\ &= -\omega^2 \vec{r} = -\omega^2 r \hat{r} = (-v^2/r) \hat{r} \end{aligned}$$

som kalles sentripetalakselerasjonen, rettet inn mot sirkelens sentrum

Hvis v og ω endrer seg :

$$a_\parallel = \dot{v} = r \dot{\omega} = \text{baneakselerasjonen}$$

Vinkelakselerasjon: $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$; $[\alpha] = s^{-2}$

Total akselerasjon: $\vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel = -r\omega^2 \hat{r} + r\dot{\omega} \hat{\varphi}$

Periode: $T = \text{omløpstid}$; $[T] = s$

Frekvens: $f = \text{antall runder (omløp) pr tidsenhet}$;
 $[f] = s^{-1} = \text{Hz (herz)}$

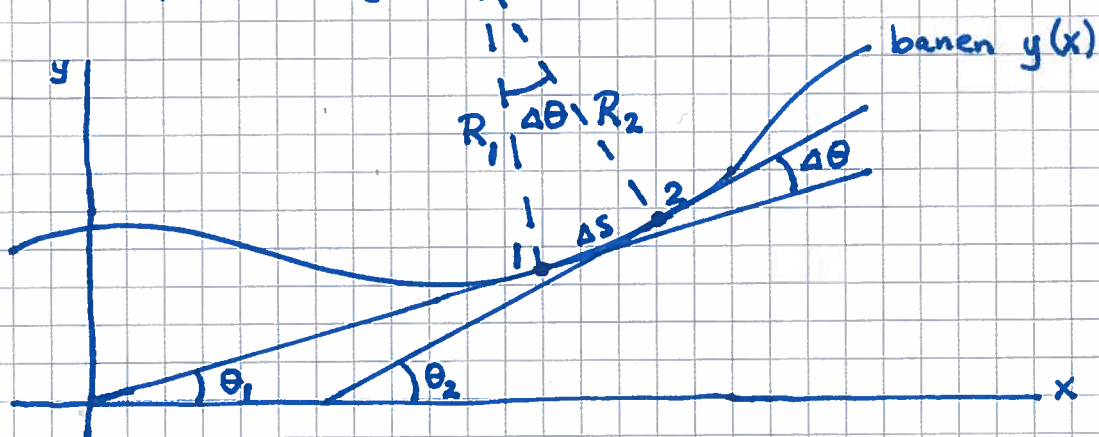
Dir. sammenhenger:

$$v = 2\pi r / T \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi r / v = 2\pi / \omega$$

$$f = 1/T = \omega / 2\pi$$

Krumlinjet beregelse

6



$$\vec{a} = \underbrace{\dot{v} \hat{r}_{\parallel}}_{\text{baneaks.}} + \underbrace{\frac{v^2}{R} \hat{r}_{\perp}}_{\text{sentripetalaks.}}$$

R = radius i tenkt sirkel som "best" tangerer partikkelens bane
 = krumningsradien

$v = \Delta s / \Delta t$; når $\Delta t \rightarrow 0$ er $R_1 \approx R_2 \approx R$, og
 $\Delta s \approx R \Delta \theta$ = sirkelbuens lengde fra 1 til 2

$$\Rightarrow R = \Delta s / \Delta \theta ; \frac{1}{R} = \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \text{banens krumning}$$

$\rightarrow ds/d\theta \qquad \qquad \qquad \rightarrow d\theta/ds$

Pythagoras: $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \Rightarrow ds = dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

Kjernerregel: $\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}$

Fra figur: $\tan \theta = dy/dx \Rightarrow \theta = \arctan(dy/dx)$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{1 + (dy/dx)^2} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y / dx^2}{1 + (dy/dx)^2}$$

Dermed:

$$\frac{1}{R} = \frac{|d^2 y / dx^2|}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}} ; \quad R = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2 y / dx^2|}$$

Newtons Lover

[YF 4, 5 ; LL 2, 3]

(7)

m, \vec{v}, \vec{a} = legemets masse, hastighet, akselerasjon

\vec{F} = netto ytre kraft på legemet

N1: $\vec{F} = 0 \iff \vec{v} = \text{konst.}$

N2: $\vec{F} = m\vec{a}$

N3: $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

Krefter er vekselvirkning mellom legemer.

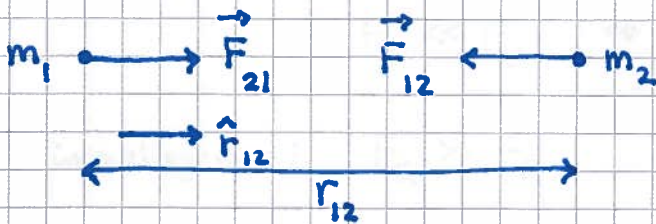
Hvis A påvirker B med kraft \vec{F}_{AB} , påvirker B legeme A med $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$.

$[F] = \text{kgm/s}^2 = \text{N}$ (newton)

Fundamentale naturkrefter [YF 5.5 ; LL 2.1]

- Gravitasjon: Svak tiltrekning mellom masser

Newtons gravitasjonslov:

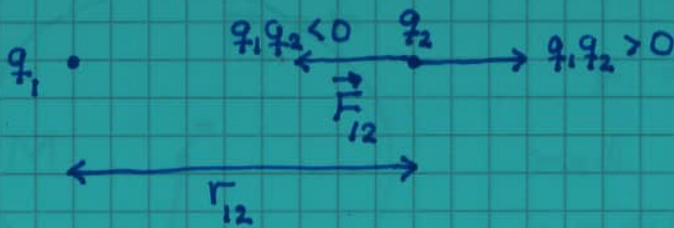


$$\vec{F}_{21} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Gravitasjonskonstanten: $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$

- Elektromagnetisk v.v: Tiltrekning / frastøtning pga ledning (8)

Coulombs lov:



$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

$$[q] = C \text{ (coulomb)}$$

$$\text{Vakuumpemittiviteten: } \epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/C^2$$

- Svake og sterke kjemiskefter. Kort rekkenidde (hvr ca 10^{-18} m og 10^{-15} m). Relevant for hvr radioaktivitet og stabilitet av atomkjerner.

To elektroner: $m = m_e \sim 10^{-30}$ kg, $q = -e \sim -10^{-19}$ C
 $\Rightarrow F_G \ll F_E \Rightarrow F_G$ neglsjerbar

To himmellegemer: $F_G \gg F_E$

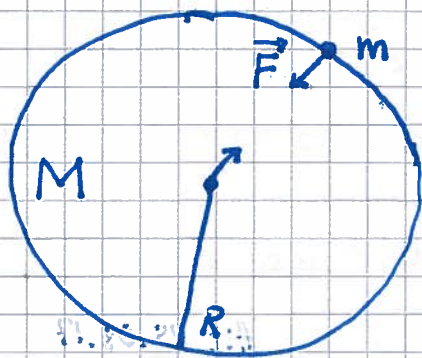
To hverdagslige legemer: $F_E \gg F_G$

~~142~~ ~~143~~

Tyngde

[YF 4.4 ; LL 2.5]

⑨



Gravitasjonskraft på m fra M (jorda):

$$F = G \frac{mM}{R^2} = mg$$

med

$$g = GM/R^2 \approx 9.81 \text{ m/s}^2$$

= tyngdens akselerasjon

(ved jordas overflate)

$$M \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$R \approx 6370 \text{ km}$$

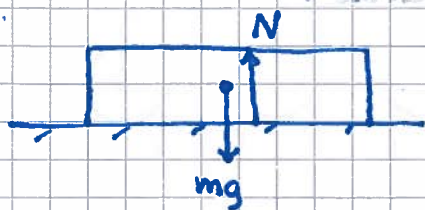
Fritt fall: Når tyngden er eneste kraft på m:

$$mg = ma \Rightarrow \underline{a = g}$$

Kontaktkrefter

[YF 4.1 ; LL 3]

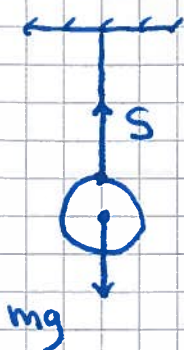
Normalkraft:



N = netto frastøtende coulombkraft fra
bordet på klossen

Hvis kloss i ro: $N = mg$ (pga N1)

Snorkraft:



S = netto tiltrekkende coulombkraft fra
snora på kula

Hvis kula i ro: $S = mg$ (pga N1)

[Hva er "N3-motkreftene" til mg, N og S?]

Inni snora virker snordraget begge veier, på hver snorbit: (10)

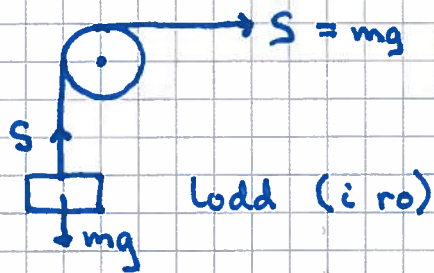


$$N2: \vec{S}(x) + \vec{S}(x+\Delta x) + \Delta m \cdot \vec{g} = \Delta m \cdot \vec{a}$$

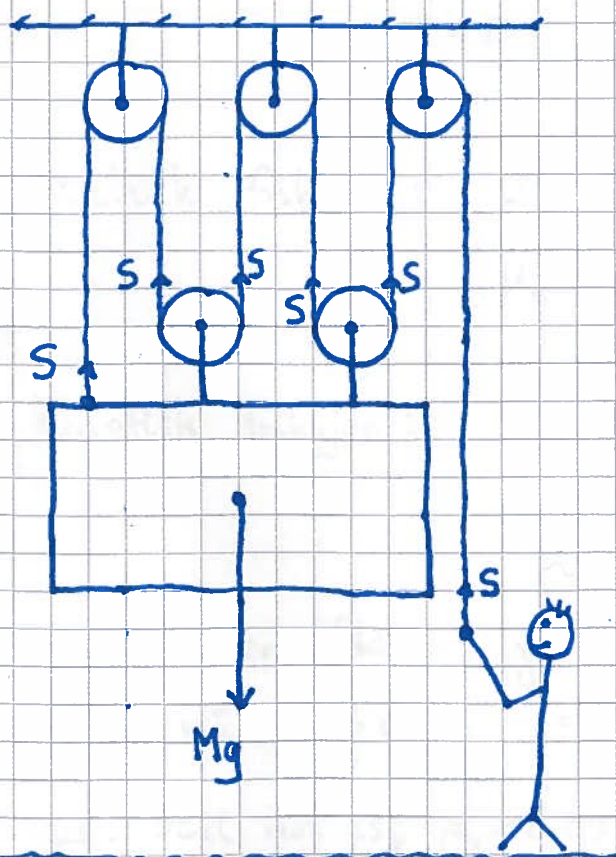
Hvis $\Delta m \approx 0$ ("masseløs snor"), er $\vec{S}(x) \approx -\vec{S}(x+\Delta x)$

\Rightarrow Konstant S ($= |\vec{S}|$) langs hele snora.

Trinse (friksjonsfri) endrer kun retningen på \vec{S} :



Talje gjør deg sterk:



N1 for kassa:

$$5 \cdot S = mg$$

$$\Rightarrow \underline{S = mg/5}$$

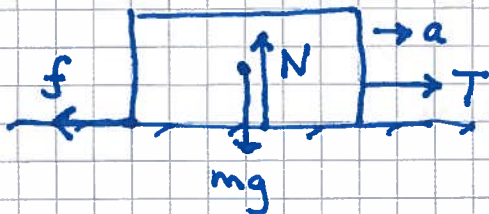
Friksjonskrefter

[YF S.3; LL 3.1]

(11)

= tangentiell komponent av kontaktkraften, rettet mot relativ bevegelse (evt: som ville oppstå uten friksjon)

Tørre friksjon:



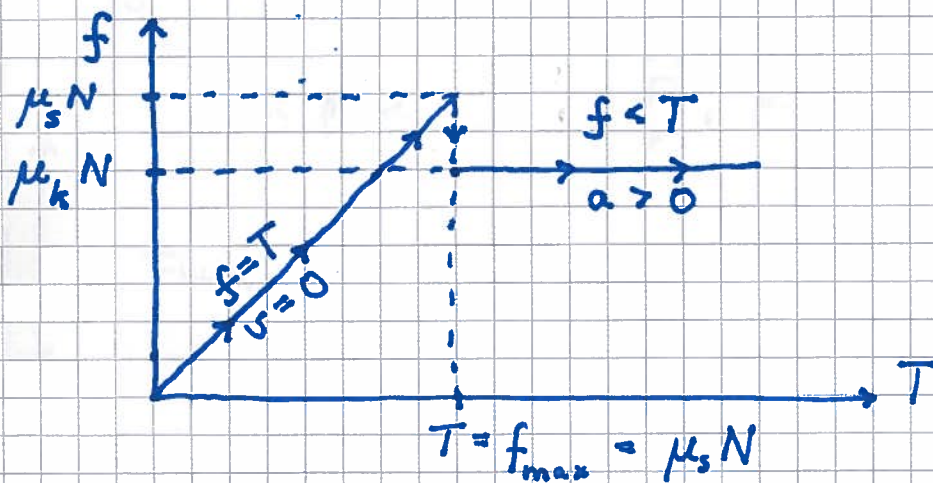
Trekk-kraft T

Normalkraft N ($\approx mg$)

Friksjonskraft f

$N \perp$ horisontalt: $T - f = ma$

Forsøk med økende T gir:



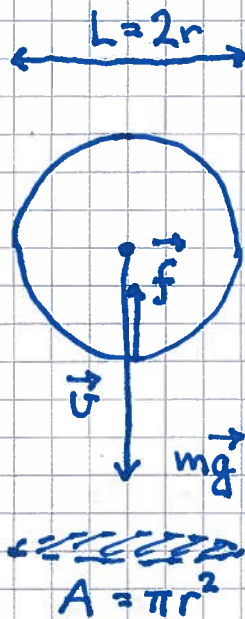
- Statisk friksjon: $v = 0$, $f = T$, $f_{\max} = \mu_s N$
 μ_s = statisk friksjonskoeffisient
- Kinetisk friksjon: $v > 0$, $f = \mu_k N$, $\mu_k < \mu_s$
 μ_k = kinetisk friksjonskoeffisient
- Ujevne grenseflater gir best grep når $v = 0$; flyter oppå når $v > 0$ $\Rightarrow \mu_k < \mu_s$
- Eks: stål mot is; $\mu_s \approx 0.03$ Tre mot tre; $\mu_s \approx 0.5$

Friksjon i fluider

[YF 5.3 ; LL 8]

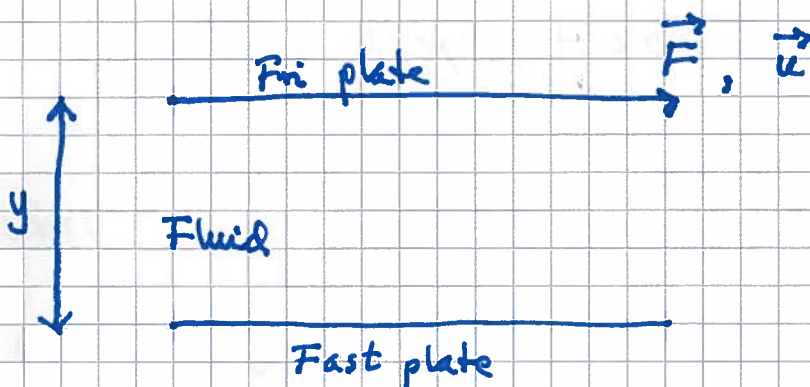
(12)

Symmetrisk legeme med lineær utstrekning L



Omgivende fluid med massefettthet ρ og dynamisk viskositet μ

Måling av μ :



- Må trekke fri plate med kraft \vec{F} for å holde konstant platehastighet \vec{u} , pga friksjon mellom fluidlagene.
- Lineær hastighetsprofil i fluidet hvis \vec{u} er liten nok.
- Exp. gir F prop. med platenes areal A og hastighet u , omvendt prop. med plateavstanden y :

$$F = \mu \cdot A \cdot u / y$$

der μ = fluidets dynamiske viskositet ; $[\mu] = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$

Reynoldstallet: $Re = \rho v L / \mu$ (dimensjonsløs) (13)

Laminær ("pen", lagdelt) strømning av fluid omkring symmetrisk legeme når $Re \lesssim 2000$ (Liten nok v)

$$\vec{f} = -k \vec{v}$$

Kule med radius r : $k = 6\pi \mu r$ (Stokes' lov)

Turbulent (uordnet, med virvler) strømning når $Re \gtrsim 4000$

$$\vec{f} = -D v^2 \hat{v}$$

$$D = \frac{1}{2} \rho A C_d$$

C_d = drag-koeffisienten (≈ 0.5 for kule)

Eks: Bilen "Revolve" ved 60 km/h

$$\rho \approx 1.2 \text{ kg/m}^3 \text{ (luft)} ; A \approx 1.1 \text{ m}^2 ; C_d \approx 1.35$$

$$\Rightarrow f \approx \frac{1}{2} \cdot 1.2 \cdot 1.1 \cdot 1.35 \cdot \left(\frac{60}{3.6}\right)^2 \text{ N} \approx \underline{250 \text{ N}}$$

Eks: Pingpongball i (tørr) luft

$$\rho \approx 1.2 \text{ kg/m}^3, \mu \approx 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}, L = 2r \approx 40 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Rightarrow \rho L / \mu \approx 2.7 \cdot 10^3 \text{ s/m}$$

$$\Rightarrow Re > 4000 \text{ når } v \gtrsim 1.5 \text{ m/s}$$

\Rightarrow "alltid" turbulent strømning (i ballidretter)
(oftest!)

Newtons lover; problemløsning

[YFS; LL3]

(14)

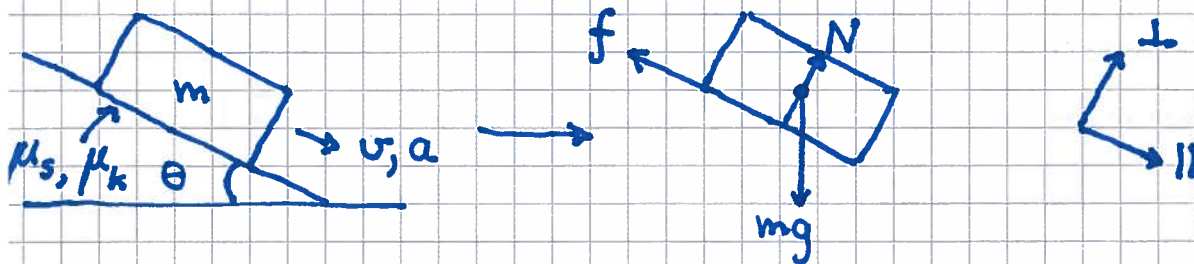
Finn alle ytre krefter \vec{F}_i på legemet og tegn fritt-legema-diagram, ders erstatt omgivelsene med krefter på legemet.

Velg koordinatsystem og dekomponér.

Bruk N2 ($\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i / m$) eller N1 ($\sum_i \vec{F}_i = 0$)



Eks: Kloss på skråplan



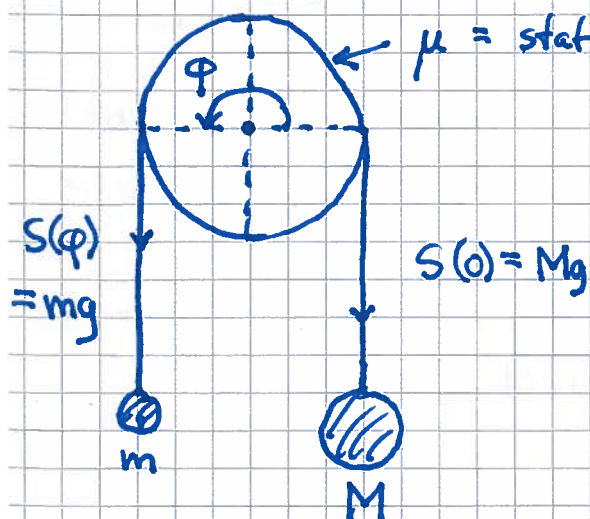
N1 \perp : $N = mg \cos \theta$

N2 \parallel : $mg \sin \theta - f = ma$

$v = 0 \Rightarrow f \leq \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta \Rightarrow \tan \theta_{\max} = \mu_s$

$v > 0 \Rightarrow f = \mu_k N = \mu_k mg \cos \theta \Rightarrow a = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$

Eks: Snorfriksjon [Youtube: A.Wahl, Med livet som innsats]

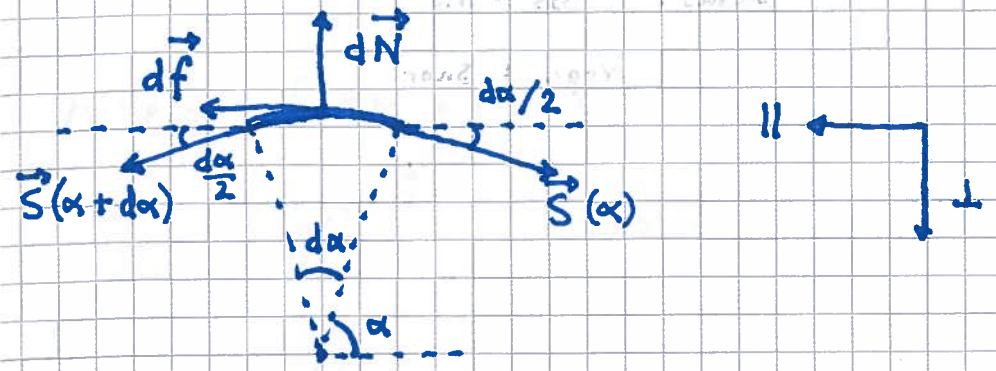


μ = statisk friksjonskoeff. mellom ror og snor

φ = kontaktvinkel mellom ror og snor

Bestem minste m som holder M oppe! ($m < M$)

Løsning: $N \perp$ på snorbit over vinkel $d\alpha$



$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{S}(\alpha + d\alpha) + \vec{S}(\alpha) + d\vec{N} + d\vec{f} = 0$$

der \vec{S} = snordrag (fra resten av snora)

$d\vec{N}$ = normalkraft fra røret

$d\vec{f}$ = friksjonskraft \leftarrow " \rightarrow ; minimal m når $df = df_{max} = \mu dN$

Tangentielt: $S(\alpha + d\alpha) \cdot \cos \frac{d\alpha}{2} - S(\alpha) \cdot \cos \frac{d\alpha}{2} + \mu dN = 0$

Normalt på: $S(\alpha + d\alpha) \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} + S(\alpha) \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} - dN = 0$

Liten $d\alpha \Rightarrow \cos \frac{d\alpha}{2} \approx 1, \sin \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$

Dessuten: $S(\alpha + d\alpha) - S(\alpha) = dS, S(\alpha + d\alpha) + S(\alpha) = 2S$

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} dS = -\mu dN \\ S d\alpha = dN \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{dS}{S} = -\mu d\alpha \Rightarrow \int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = -\mu \int_0^\varphi d\alpha$$

$\Rightarrow S(\varphi) = S(0) e^{-\mu\varphi}$

Tallverdier (plastsnor, nylonenor): $\mu \approx 0.17$

$M = 500g, \varphi = 7\pi \Rightarrow m = M \cdot \exp(-0.17 \cdot 7\pi) = 12g$

Omvendt: Minimum kraft for å heise M opp: $S(\varphi) = S(0) e^{\mu\varphi}$

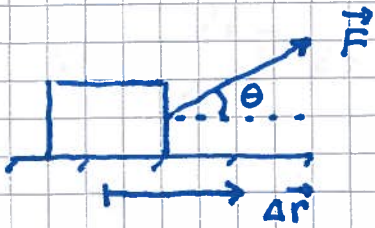
$\Rightarrow m = M \cdot \exp(+0.17 \cdot 7\pi) \approx 21 kg$

Arbeid og energi

[YF 6,7 ; LL 4]

16

Arbeid [YF 6.1-6.3 ; LL 4.1]



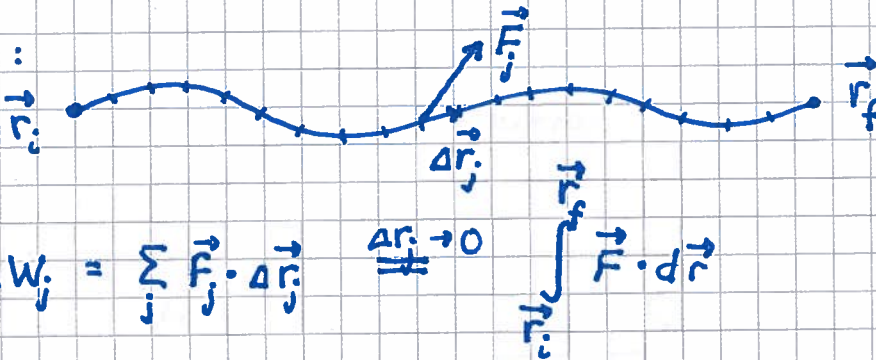
arbeid $\stackrel{\text{def}}{=} \text{kraft} \times \text{forflytning}$

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta$$

= arbeid utført av ytre kraft \vec{F}

$$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J} \text{ (joule)}$$

Generelt:



$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j$$

$$\Delta \vec{r}_i \rightarrow 0$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arbeidet utført av \vec{F} ved forflytning fra \vec{r}_i til \vec{r}_f

Effekt [YF 6.4 ; LL 4.1]

effekt $\stackrel{\text{def}}{=} \text{arbeid (ert energi) pr tidsenhet}$


$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$[P] = \text{J/s} = \text{W (watt)}$$

$$1 \text{ kWh} = 1 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 3600 \text{ s} = 3.6 \cdot 10^6 \text{ J} = 3.6 \text{ MJ}$$

Kinetisk energi [YF 6.2 ; LL 4.2]

(17)


$$W = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int_{v_i}^{v_f} \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{v} \cdot d\vec{v} + d\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} dv^2$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \int_{v_i}^{v_f} dv^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2 = \text{kinetisk energi}$$

Dermed:

$$W = K_f - K_i = \Delta K$$

Arbeidet W utført på legemet tilsværer endringen ΔK i legemets kinetiske energi.

Konservativ kraft [YF 7.3 ; LL 4.4]

Anta at $\vec{r}_f = \vec{r}_i$ (dvs lukket kurve).

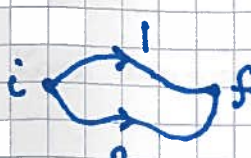


Anta at $K_f = K_i$.

Da er $W = \Delta K = 0$.

$$\Rightarrow \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Da er \vec{F} en konservativ kraft, og W er vei-uavhengig:


$$0 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left(\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right)_1 + \left(\int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} \right)_2 = W_1 - W_2$$

$$\Rightarrow \underline{W_1 = W_2}$$

Potensiell energi [YF 7.1-7.4; LL 4.3-4.4]

(18)

Definisjon:

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{konservativ } \vec{F})$$

= pot. energi i posisjon \vec{r} , der vi har valgt $U(\vec{r}_0) = 0$.

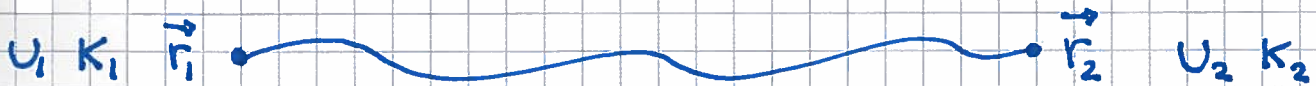
Dvs: Bare forskjeller i pot. energi har fysisk betydning.

[Kommentar: Fra Matte 2

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \nabla \times \vec{F} = 0; \quad U = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \Leftrightarrow \vec{F} = -\nabla U]$$

Bevarelse av mekanisk energi [YF 7.1-7.3; LL 4.5]

La oss "regne ut" ΔU og ΔK i et konservativt system:



Fra før: $\Delta K = K_2 - K_1 = W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_{\text{netto}} \cdot d\vec{r}$

$$U_2 - U_1 = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \left[- \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right] = \int_{r_2}^{r_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W$$

$$\Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

Dvs: I kons. system er total mekanisk energi $E = K + U$ bevart

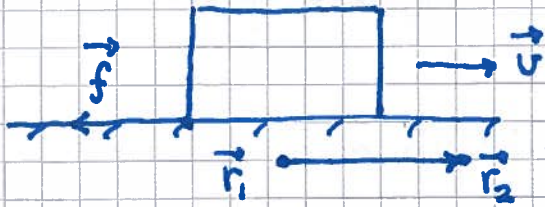
Kons. krefter: Tyngdekraft, Coulombkraft

Ikke-kons. kraft: Friksjon

Frksjonsarbeid

[YF 7.3; LL 4.5]

19



$$W_f = \int_{r_1}^{r_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \quad \text{fordi } \vec{f} \text{ alltid er rettet mot } d\vec{r}$$

⇒ Mek. energi "tapes" som varme, lyd osv.

$$\vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \Rightarrow \oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \Rightarrow \vec{f} \text{ er ikke konservativ}$$

Eks: Terminalhastighet for bordtennisball ($m = 2.7g$, $r = 20 \text{ mm}$)



Anta at ballen slippes med null starthastighet. I starten er

$f \ll mg \Rightarrow$ mek. energi $E = K + U$ er bevart

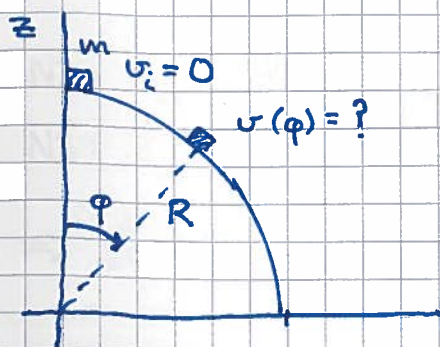
⇒ hastighet etter å ha falt høyde h :

$$v = \left\{ \frac{2}{m} \cdot \Delta U \right\}^{1/2} = \sqrt{2gh} \quad \text{da } \Delta U = mg \cdot h$$

Når $v \gtrsim 1.5 \text{ m/s}$, er luftmotstanden $f = \left(\frac{1}{2} \rho A C_d \right) v^2$, med $\rho \approx 1.2 \text{ kg/m}^3$, $A = \pi \cdot (0.020 \text{ m})^2$ og $C_d \approx 0.5$. Terminalhastighet, v_t , oppnådd når $\sum \vec{F} = 0$, dvs $f = mg$, dvs

$$v_t = \left\{ \frac{2mg}{\rho A C_d} \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{2 \cdot 0.0027 \cdot 9.81}{1.2 \cdot \pi \cdot 0.020^2 \cdot 0.5} \right\}^{1/2} \approx \underline{9.4 \text{ m/s}}$$

Eks: Vertikal sirkelbane



Anta null frksjon; velg $U = 0$ ved $z = 0$.

$$E = mgR$$

$$\frac{1}{2} m v(\varphi)^2 + mgz(\varphi) = mgR; \quad z(\varphi) = R \cos \varphi$$

$$\underline{v(\varphi) = \sqrt{2gR(1 - \cos \varphi)}}$$

Impuls [YF 8 ; LL 5]

= bevegelsesmengde = linear momentum

N2: $\vec{F} = m \, d\vec{v} / dt = \frac{d}{dt} (m\vec{v})$ når $m = \text{konst.}$

Impuls $\stackrel{\text{def}}{=} \text{masse} \times \text{hastighet}$

$\vec{p} = m\vec{v}$; $[p] = \text{kg m/s}$

Dersom $\sum \vec{F}_{\text{ytre}} = 0$, er legemets (systemets) impuls bevart

Kollisjoner (Støt) [YF 8.3, 8.4 ; LL 5.3]

Elastisk støt dersom mekanisk energi er bevart ($\Delta K = 0$)

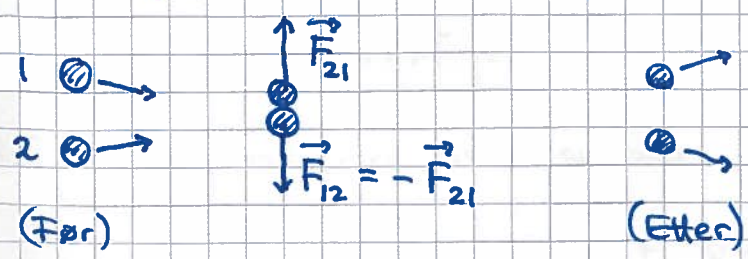
Uelastisk ————— " ————— ikke bevart ($\Delta K < 0$)

Fullstendig uelastisk støt: Legemene henger sammen etter kollisjonen med felles hastighet. Gir maksimal $|\Delta K|$.

Her typisk kartvanige kollisjoner $\Rightarrow \Delta U \approx 0$ i kollisjonen

Tapt kin. energi \rightarrow deformasjon, lyd, varme

Indre krefter endrer ikke systemets totale impuls:



N2: $\vec{F}_{21} = d\vec{p}_1 / dt$, $\vec{F}_{12} = d\vec{p}_2 / dt$

N3: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -d\vec{p}_1 / dt$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} \{ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konstant}$

Sentralt støt [YF 8.2-8.4 ; LL 5.3]

(21)

(= kollisjon i én dimensjon)

Før: $m \rightarrow v$

$V \leftarrow M$

$\rightarrow +$

Etter: $v' \leftarrow m$

$M \rightarrow V'$

[$\Rightarrow V$ og v' negative i figuren]

Ingen ytre krefter (evt. neglisjerbare i den korte kollisjonen)

$$\Rightarrow \Delta p = 0 \Rightarrow mv + MV = mv' + MV'$$

(a) Fullstendig uelastisk: $v' = V' = \frac{mv + MV}{m+M}$

(b) Delvis uelastisk: En ligning, to ukjente \Rightarrow Må ha en opplysning ekstra

(c) Elastisk kollisjon: $\Delta K = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2$

Skriver om ligningene for impulsbevarelse ($\Delta p = 0$) og energi bevarelse ($\Delta K = 0$):

$$m(v - v') = M(V' - V) \quad (1)$$

$$m(v - v')(v + v') = M(V' - V)(V' + V) \quad (2)$$

Dividerer (2) med (1):

$$v + v' = V' + V \quad (3)$$

Mult. (3) med M og trekk fra (1); dette fjerner V' ; løser mhp v' :

$$v' = \frac{M}{m+M} \left\{ 2V + v \cdot \frac{m-M}{M} \right\}$$

Ombytte av alle små med store symboler må gi samme løsning. Dermed:

$$v' = \frac{m}{M+m} \left\{ 2v + V \cdot \frac{M-m}{m} \right\}$$

Eks: To like tunge legemer, $m = M$.

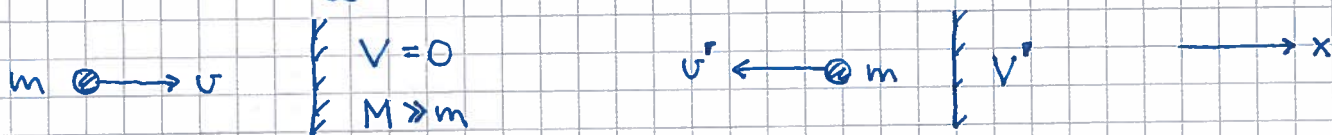
Ser uten videre at $v' = V$ og $V' = v$,

dvs "byter hastighet"!

Kjent fra leketsy:



Eks: Ball mot vegg (elastisk)



$$\left. \begin{aligned} v' &= \frac{M}{m+M} \cdot \left\{ 0 + v \cdot \frac{m-M}{M} \right\} \approx \frac{M}{M} \cdot v \cdot \left(\frac{-M}{M} \right) = -v \\ V' &= \frac{m}{M+m} \cdot \left\{ 2v + 0 \right\} \approx \frac{m}{M} \cdot 2v \approx 0 \end{aligned} \right\} \text{OK!}$$

Vi sjekker impuls- og energibevarelse:

$p = mv, \quad P = MV = 0$

$p' = mv' = -mv, \quad P' = MV' \approx M \cdot \frac{m}{M} \cdot 2v = 2mv$

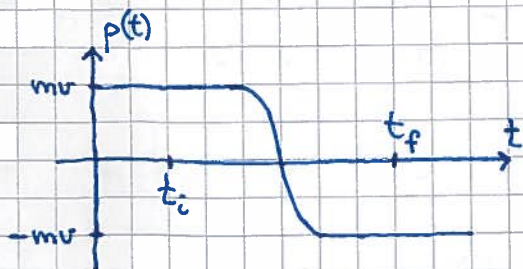
$\Rightarrow p_{\text{for}} = mv; \quad p_{\text{etter}} = -mv + 2mv = mv \Rightarrow \Delta p = 0, \text{ OK!}$

$K_m = \frac{1}{2}mv^2, \quad K_M = \frac{1}{2}MV^2 = 0$

$K_m' = \frac{1}{2}mv'^2, \quad K_M' = \frac{1}{2}MV'^2 = \frac{1}{2}M \cdot \left(\frac{2mv}{M} \right)^2 = 2mv \cdot \frac{m}{M} \approx 0$

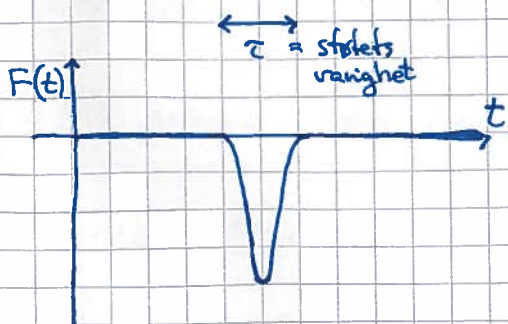
$\Rightarrow K_{\text{for}} = K_{\text{etter}} = \frac{1}{2}mv^2; \quad \Delta K = 0, \text{ OK!}$

Ballens impulsendring Δp_{ball} skyldes kraft $F(t)$ fra vegg:



$\Delta \vec{p}_{\text{ball}} = -2mv \hat{x}$

N2: $\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}_{\text{ball}}}{dt}$



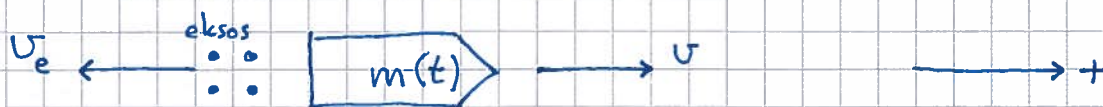
$\Delta \vec{p}_{\text{ball}} = \int d\vec{p}_{\text{ball}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt$

Her er $\tau \sim 2 \text{ ms}$ og $\Delta v \sim 50 \text{ m/s}$
 (bordtennis) $\Rightarrow \langle a \rangle \sim 25 \text{ km/s} \gg g$
 \Rightarrow Kan nealiciere tunaden ma i støtet!

Rakettprinsipp

[YF 8.6 ; LL 5.4]

23



Mått i fast referansesystem :

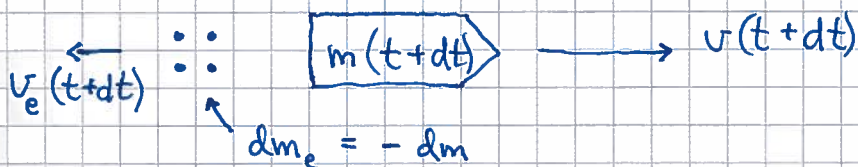
v = rakettenes fart ; v_e = eksosens fart ($v_e < 0$ i figuren)

$\Rightarrow u = v_e - v$ = eksosens fart relativt raketten ; antas konstant
($u < 0$, $v > 0$)

Drivstoff-forbruk pr tidsenhet : $\frac{dm}{dt} < 0$

Anta i første omgang $F_{ytre} = 0$ ("outer space") $\Rightarrow \frac{dp}{dt} = 0$

Beregner rakettenes fartsøkning mellom t og $t + dt$:



$$p(t+dt) = m(t+dt) v(t+dt) + dm_e \cdot v_e(t+dt)$$

$$= [m(t) + dm] \cdot [v(t) + dv] - dm \cdot [u + v(t) + dv]$$

$$= m(t)v(t) + m dv - u dm$$

$$\Rightarrow m dv = u dm$$

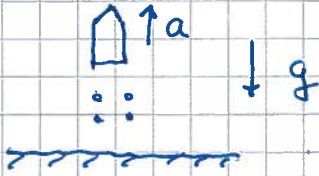
$$\Rightarrow m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt}$$

På samme form som N2, $m \cdot a = F_{skjv}$,

med skjvraft ("rekyl") $F_{skjv} = u \cdot \dot{m} > 0$

(siden både $u < 0$ og $\dot{m} < 0$)

Eneste ending i tyngdefellet er at $F_{\text{ytre}} = -mg$ kommer i tillegg: (24)



N2 for ("rest"-)raketten blir

$$F = ma$$

med total kraft

$$F = F_{\text{ytre}} + F_{\text{skyv}} = -mg + u\dot{m}$$

Øving: $-mg + u \frac{dm}{dt} = m \frac{dv}{dt}$

$$\Rightarrow -g dt + u \frac{dm}{m} = dv$$

som enkelt kan integreres!

Til nå: Punktmasser; ren translasjon av stive legemer

Neste ca 3 uker: Partikkelsystemer.

Stive legemer.

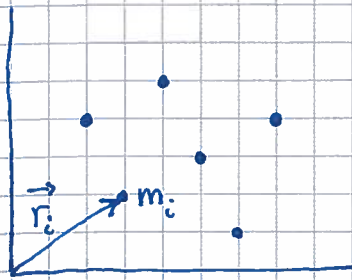
Rotasjon.

Partikkelssystem. Stive legemer. Rotasjonsdynamikk

(25)

Massecenter

[YF 8.5 + oppg. 8.115 og 116 ; LL 5.6, 5.8, 6.1]



Massecenter (CM) for N punktmasser

m_1, m_2, \dots, m_N i pos. $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i ; \quad M = \sum_i m_i = \text{total masse}$$

Hvis kontinuerlig massefordeling: $m_i \rightarrow dm$; $\sum_i \rightarrow \int$

$$\Rightarrow \vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm ; \quad M = \int dm$$

$$3D : dm = \rho \cdot dV$$

$$2D : dm = \sigma \cdot dA$$

$$1D : dm = \lambda \cdot dl$$

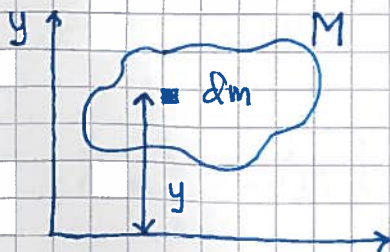
der

ρ, σ, λ = masse pr hhv volum-, flate- og lengdeenhet

dV, dA, dl = hhv volum-, flate- og lengdeelement

Nyttig tips: Hvis massefordelingen er uniform, er $\frac{dm}{M} = \frac{dV}{V}$ osv

Potensiell energi i tyngdefeltet ; tyngdepunkt



Velger $U(0) = 0$. Da er :

$$U = \int dU = \int g \cdot y \cdot dm$$

Som regel er g konstant i hele systemet ;

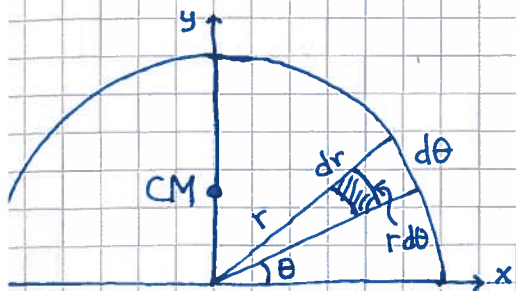
da blir $U = g \int y dm = g \cdot M \cdot Y_{cm}$, dvs total pot. energi, som om hele massen M var samlet i høyden Y_{cm} (f.eks. i \vec{R}_{cm}).

Da er tyngdepunktet ("center of gravity" ; der legemet vil balansere uten å rotere) samme sted som massecenteret.

Beregning av \vec{R}_{CM} ; et par eksempler.

(26)

Eks 1: Halvparten av tynn skive med radius R .



$$\vec{R}_{CM} = Y_{CM} \hat{y} \quad (X_{CM} = 0 \text{ pga symmetri})$$

med

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{A} \int y dA$$

(Husk: $dm/M = dA/A$; uniform massefordeling)

$$A = \frac{1}{2} \cdot \pi R^2; \quad dA = dr \cdot r d\theta; \quad y = r \sin \theta$$

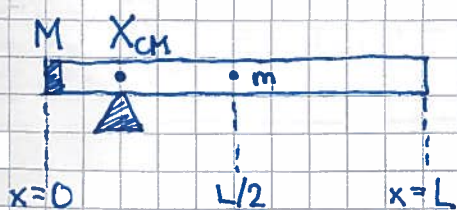
Integrasjonsgrenser: $0 < r < R$; $0 < \theta < \pi$

(for å få med hele skiva!)

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y_{CM} &= \frac{2}{\pi R^2} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} r \sin \theta \cdot dr \cdot r d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{2}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{3} R^3 \cdot \int_0^{\pi} (-\cos \theta) = \frac{4R}{3\pi} \approx 0.42R \end{aligned}$$

[Vis at, for "halv ring": $Y_{CM} = \frac{2R}{\pi}$; for komplett halvkule: $Y_{CM} = \frac{3R}{8}$]

Eks 2: Rør med lodd i enden



$$m = 165 \text{ g}, \quad M = 305 \text{ g}$$

$$X_{CM} = \frac{1}{m+M} \left\{ M \cdot 0 + \underbrace{\int_0^L x \cdot \frac{dm}{L}}_{= \frac{1}{2} mL} \right\} = \frac{mL}{2(m+M)} \approx 0.18L$$

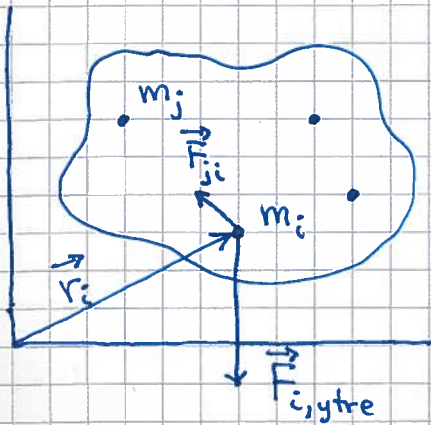
N2 for \vec{R}_{CM}

[YF 8.5 ; LL 5.8]

(27)

Kastforsøk med plastrør antyder at CM beveger seg som om hele massen M var samlet i CM. [Parabelbane, se s. 3]

Bevis:



N2 for m_i :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\vec{F}_{i,ytre}}_{\text{Total ytre kraft p\aa } m_i} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{\text{Total indre kraft p\aa } m_i}$$

Legg sammen N2 for alle $i = 1, 2, \dots, N$:

Venstre side:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \sum_i m_i \vec{r}_i \right\} = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ M \vec{R}_{CM} \right\} = M \ddot{\vec{R}}_{CM}$$

Høyre side:

$$\sum_i \vec{F}_{i,ytre} = \vec{F}_{ytre} = \text{Total ytre kraft p\aa hele systemet}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} + \dots + \vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N} = 0; \text{ pga N3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{ytre} = M \ddot{\vec{R}}_{CM}}$$

Dvs: Tyngdepunktets bevegelse blir som om hele massen M var samlet i \vec{R}_{CM} og ble utsatt for summen av alle ytre krefter \vec{F}_{ytre} !

I tillegg, for stive legemer: Rotasjon om CM.

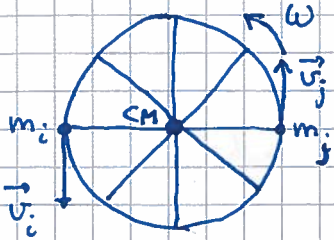
Dessuten, for "ikke helt stive legemer": Vibrasjon om CM.

Rotasjon [YF 9, 10 ; LL 6 (5)]

(28)

Innledende observasjoner med "sykkelhjul" :

- Ren rotasjon



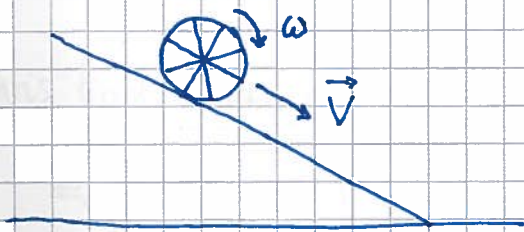
$$\text{CM i ro: } K_{\text{trans}} = \frac{1}{2} M (\dot{\vec{R}}_{\text{CM}})^2 = 0$$

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0$$

$$\text{Men: } K_{\text{rot}} \neq 0$$

$$\vec{L} \neq 0 \quad (\text{Dreieimpuls; kommer!})$$

- Rulling = translasjon av CM + rotasjon om CM

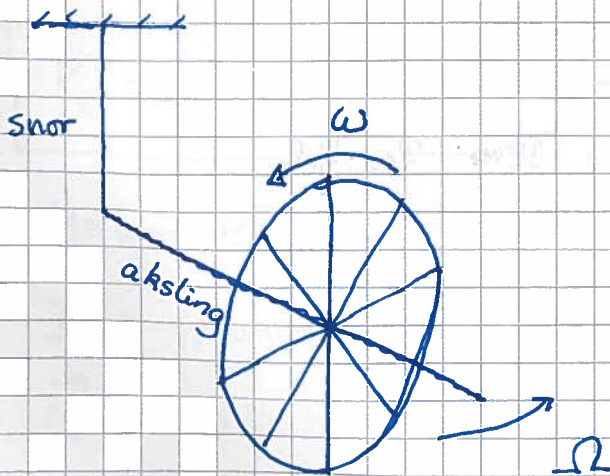


$$\text{Krefter} \parallel \text{skråplanet} \Rightarrow \dot{v} > 0$$

$$\text{Dreiemoment} \llcorner \text{mhp CM} \Rightarrow \dot{\omega} > 0$$

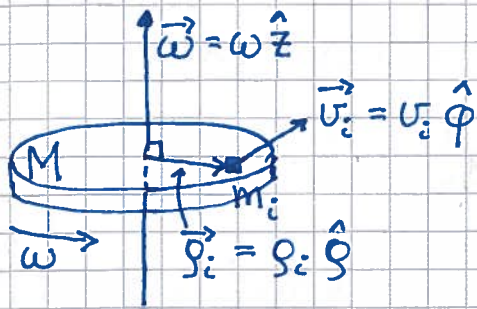
(kommer!)

- Kompleks dynamikk



Preesjon (gyroskop)

Rotasjonsenergi ; Tregghetsmoment [YF 9.4; LL 6.4, 6.3] (29)



$\vec{\omega}$ peker langs rotasjonsaksen

ρ_i = avstand fra rot.aksen til m_i

$v_i = \rho_i \omega$ (fra før)

$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$ (fra figur)
(+ høyrehandsregel)

[Sylinderkoordinater = Polarkoord. (ρ, φ) og z]

$$K = K_{\text{rot}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \rho_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

med $I \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i \rho_i^2 =$ legemets tregghetsmoment mhp valgt (gitt) akse

Hvis kontinuerlig massefordeling: $m_i \rightarrow dm, \sum \rightarrow \int$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int \rho^2 dm}$$

der $\rho =$ avstand fra akse til dm

Total kin. energi for stivt legeme [YF 10.3; LL 6.6]

Fra $K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ utledes generelt [Se notat; ikke pensum]

$$\boxed{K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2}$$

med $M =$ legemets masse; $\vec{V} = \vec{v}_{\text{CM}} =$ hastigheten til CM;

$I_0 =$ tregghetsmoment mhp rot.aksen gjennom CM;

$\vec{\omega} =$ vinkelhastigheten om " " " "

Eks (Lab 1): Rullende ring



"Ren rulling": $V = \omega R$

I_0 for noen objekter

[YF 9.6; LL 6.3]

(30)

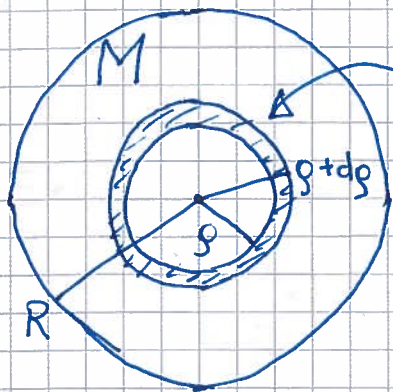
- Ring; Hal sylinder



$$I_0 = \int r^2 dm = R^2 \int dm = \underline{MR^2}$$

[Oppgis ikke til eksamen]

- Skive; Kompakt sylinder

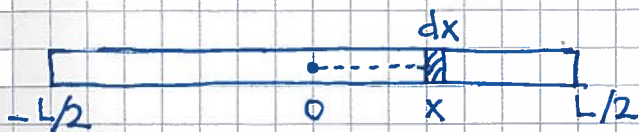


$$\begin{aligned} dI_0 &= r^2 dm = r^2 M \frac{dA}{A} \\ &= r^2 M \frac{2\pi r dr}{\pi R^2} = \frac{2M}{R^2} r^3 dr \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_0 = \int dI_0 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} MR^2$$

[Oppgis]

- Tynn stang, akse \perp stanga og gjennom CM

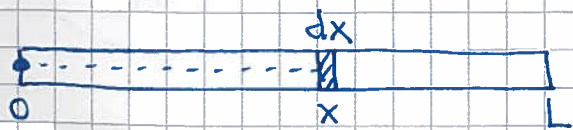


$$r = x, \quad dm = M \cdot \frac{dx}{L}$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 M dx / L = \frac{M}{L} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-L/2}^{L/2} = \underline{\frac{1}{12} ML^2}$$

[Oppgis]

- Tynn stang, akse gjennom stangas ende



$$I = \int_0^L x^2 M dx / L = \underline{\frac{1}{3} ML^2}$$

[Oppgis ikke]
[Se s. 31]

- Kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$

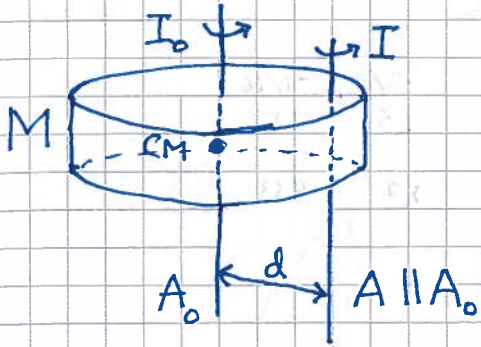
- Kule (kompakt): $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

[Oppgis]

Steiners sats

[YF 9.5 ; LL 6.3]

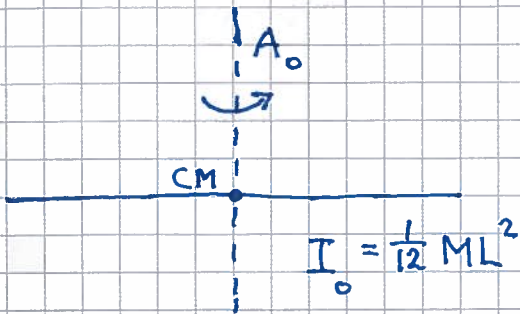
(=parallelakseteoremet)



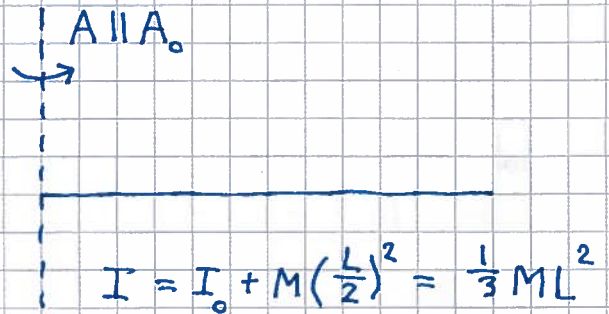
$$I = I_0 + Md^2$$

[Se notat for utledning]

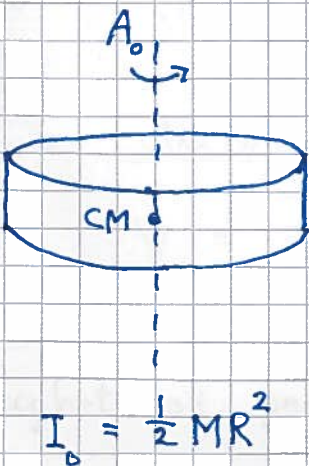
Eks 1 : Tynn stang (se s. 30)



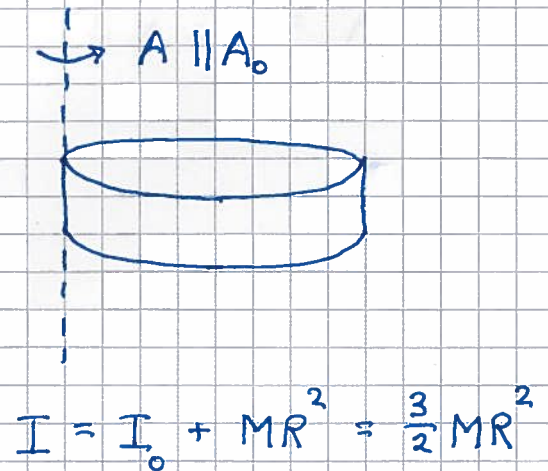
$$d = L/2 \Rightarrow$$



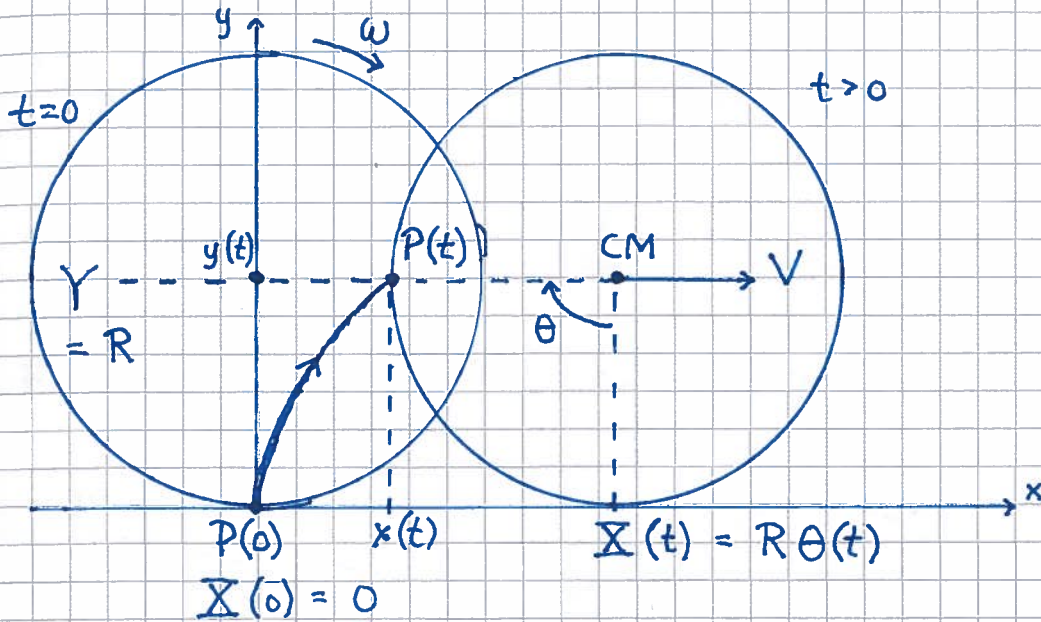
Eks 2 : Kompakt skive



$$d = R \Rightarrow$$



Ren rulling [YF 10.3 ; LL 6.7]



$P(t) = (x(t), y(t))$
 = punkt på
 periferien

$P(0) = (0, 0)$

Ser fra figur: $x(t) = X(t) - R \sin \theta(t) = R[\theta - \sin \theta]$
 $y(t) = Y(t) - R \cos \theta(t) = R[1 - \cos \theta]$ } sykkloide

Bevægelsen til CM:

$$\begin{aligned} \vec{R}_{cm} &= X \hat{x} + Y \hat{y} = R\theta \hat{x} + R \hat{y} \\ \vec{V} &= \dot{\vec{R}}_{cm} = R\dot{\theta} \hat{x} = R\omega \hat{x} = V \hat{x} \\ \vec{A} &= \dot{\vec{V}} = R\ddot{\theta} \hat{x} = R\dot{\omega} \hat{x} = R\alpha \hat{x} = A \hat{x} \end{aligned}$$

Som er rullebetingelsene:

$V = R\omega, \quad A = R\alpha$

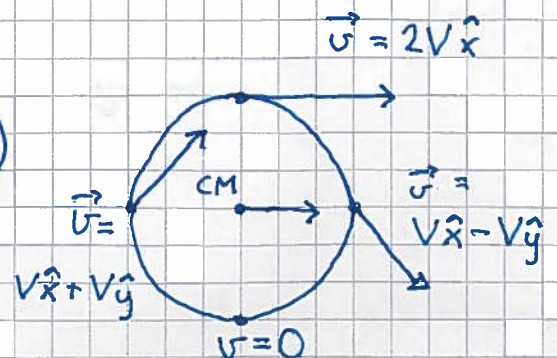
Hastighet på periferien:

$$\vec{U} = \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y}$$

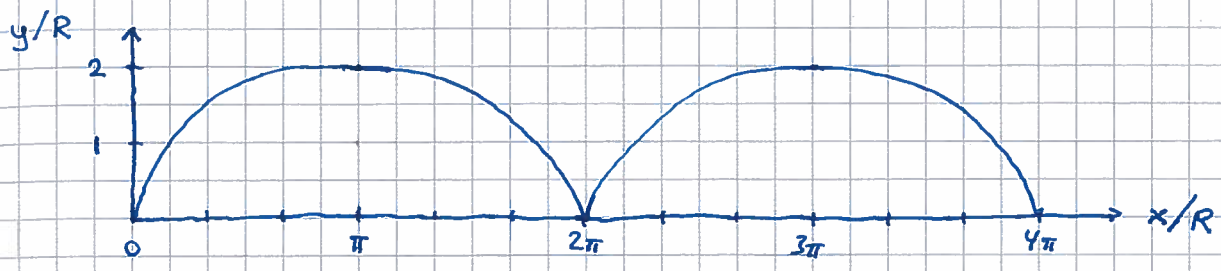
med

$$\dot{x} = R\dot{\theta} - R\dot{\theta} \cos \theta = V(1 - \cos \theta)$$

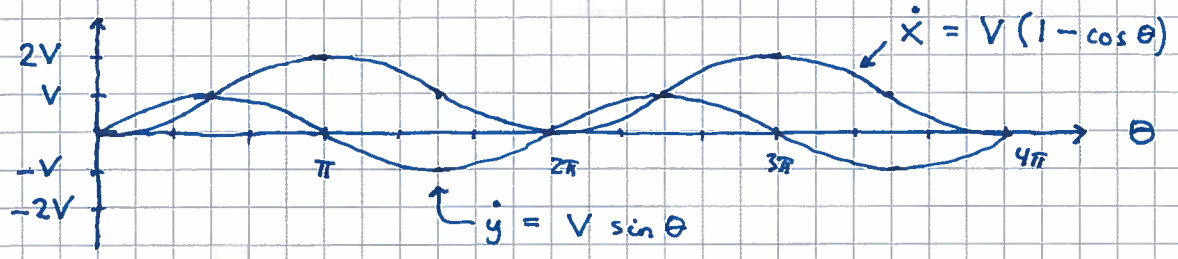
$$\dot{y} = R\dot{\theta} \sin \theta = V \sin \theta$$



Banen til P : $x = R(\theta - \sin\theta)$, $y = R(1 - \cos\theta)$



Fartskomponentene til P (der vi antar $V = \text{konst.}$) :



Vi ser at $v = 0$ når $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$
 dvs når P er i kontakt med underlaget

$$\Rightarrow P_f = dW_f / dt = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$$

\Rightarrow Null tap av mekanisk energi ved ren rulling, selv om $f \neq 0$.

Vi har her statisk friksjon : $f_s \leq \mu_s \cdot N$

Rullefriksjon : Litt tap av mekanisk energi ved ren rulling, pga deformasjon (kompresjon, ekspansjon, kompresjon, ...) av rullende objekt og underlag i kontaktflaten.

Vi neglisjerer som regel rullefriksjonen i oppgaver med ren rulling.

På laben : Tap av mek. energi pga luftmotstand og rullefriksjon, og ert. skning, hvis banen blir for bratt.

Kin. energi ved ren rulling: [YF 10.3; LL 6.6, 6.7]

34

$$K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

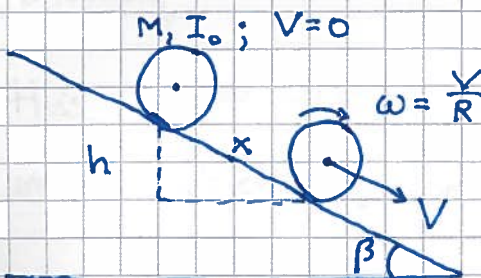
$$I_0 = c \cdot M R^2 \quad \text{med } c=1 \text{ for ring, } \frac{2}{5} \text{ for kompakt kule osv}$$

$$\omega = V/R \quad (\text{rullebetingelsen})$$

$$\Rightarrow \boxed{K = (1+c) \cdot \frac{1}{2} M V^2}$$

Rulling på skråplan

[YF 10.3; LL 6.8]



Bestem: V , \dot{V} , friksjonskraften f ,
og minste μ_s (evt. største β)
som gir ren rulling.

$$(I_0 = c \cdot M R^2)$$

$$\text{Exp: } V_{\text{kule}} > V_{\text{skive}} > V_{\text{kuleskall}} > V_{\text{hul-sylinder}}$$

$$\text{Ren rulling} \Rightarrow K = (1+c) \frac{1}{2} M V^2 = -\Delta U = Mgh = Mg x \sin \beta$$

$$\Rightarrow V(x) = \sqrt{\frac{2gx \sin \beta}{1+c}}$$

Dvs: Størst V og \dot{V} for objekt med minst c , som observert!

Akselerasjon:

$$\dot{V} = dV/dt = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2g \sin \beta}{1+c}} \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} \cdot V = \underline{\underline{\frac{g \sin \beta}{1+c}}}$$

Uten friksjon ville $\vec{F}_{\parallel} = Mg \sin \beta$, dvs $\dot{V} = g \sin \beta$.

Dvs: Friksjon f har retning oppover skråplanet og gir $\dot{V} < g \sin \beta$.

$$N_2 \parallel \text{skråplan: } Mg \sin \beta - f = M \dot{V}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f = \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta}}$$

Ren rulling forutsetter at $f \leq f_{\max} = \mu_s \cdot N = \mu_s \cdot Mg \cos \beta$ (35)

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mu_s \geq \frac{c}{1+c} \tan \beta}}$$

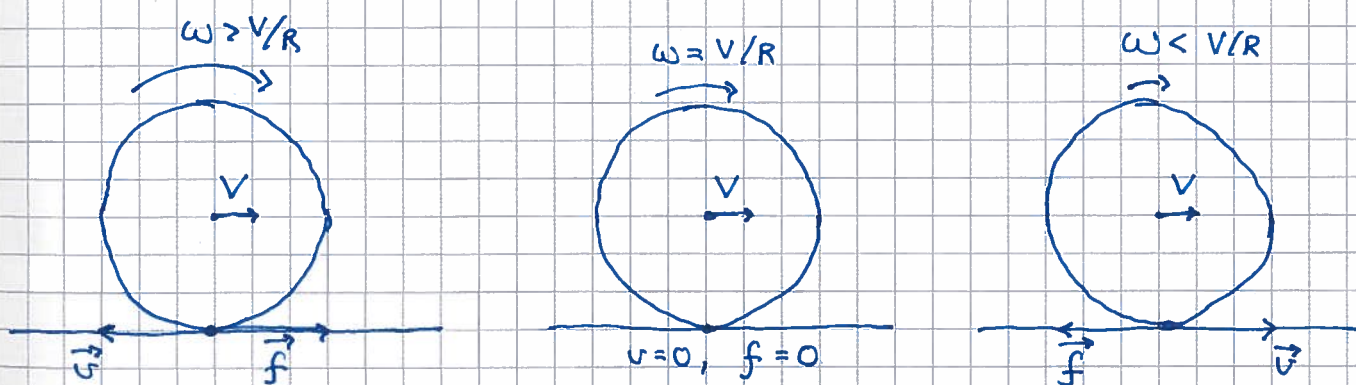
Stål mot plast gir $\mu_s \sim 0.2$ (litt avhengig av typen plast).

\Rightarrow Stålkule (på kb) vil bare rulle rent dersom

$$\beta \leq \arctan \left\{ \mu_s \cdot \frac{1+c}{c} \right\} = \arctan \left\{ 0.2 \cdot \frac{7/5}{2/5} \right\} = \arctan(0.7) = \underline{\underline{35^\circ}}$$

Sluring [LL 6.7]

Hvis $\omega \neq v/R$, blir det en relativ hastighet $v = v - \omega R$ mellom objekt og underlag i kontaktpunktet:



Her har vi kinetisk friksjon: $f = \mu_k \cdot N$

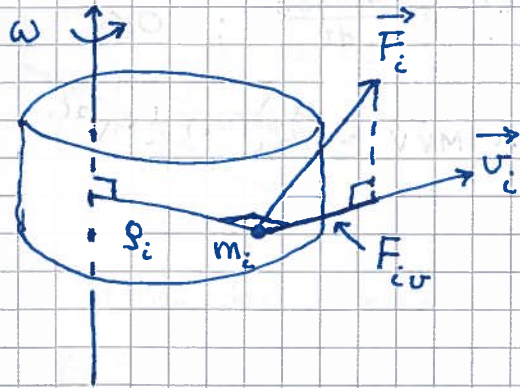
Tapt mek. energi pr tidsenhet: $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$

Rotasjonsdynamikk

(36)

Akse med fast orientering

- Dekker svært mange problemstillinger [F.eks. labprosjektet]
- Er i realiteten et endimensjonalt problem
- Beskriver rotasjonsdelen av legemets totale bevegelse



$$v_i = \rho_i \omega$$

$F_{i,rot}$ = komponenten av ytre kraft \vec{F}_i på m_i , langs \vec{v}_i

Triks: Regn ut tilført effekt, $P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$, på to måter!

(1) Bruker N2:

$$\begin{aligned} P &= \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i \quad (\text{ses.17}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} I \frac{d\omega^2}{dt} = \frac{1}{2} I \cdot 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dt} = \underline{I \omega \dot{\omega}} \end{aligned}$$

(2) Bruker (kun) $v_i = \rho_i \omega$:

$$P = \sum_i F_{i,rot} v_i = \left\{ \sum_i F_{i,rot} \rho_i \right\} \omega = \underline{\tau \omega}$$

Dette gir N2 for rotasjon om akse med fast orientering,

$$\boxed{\tau = I \dot{\omega}}$$

[Jf. N2 for translasjon: $\vec{F} = m\vec{v}$]

med

$$\tau = \sum_i F_{i,rot} \rho_i = \text{ytre dreiemoment på legemet, mhp rot.aksen}$$

$$I = \sum_i m_i \rho_i^2 = \text{legemets tregheitsmoment, mhp rot.aksen}$$

Arbeid utført av dreiemomentet

[YF 10.4; LL 6.4]

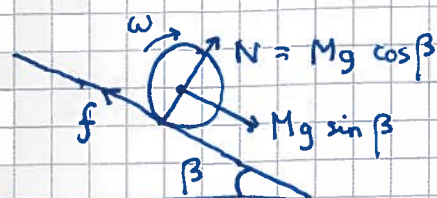
(37)

Fra $\mathcal{P} = \tau \omega = \tau \frac{d\phi}{dt}$ og $\mathcal{P} = \frac{dW}{dt}$ følger direkte

$$\boxed{dW = \tau d\phi}$$

[Jf. translasjon: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$]

Eks 1: Rulling på skrånning (se s. 34)



$$\omega = v/R, \quad \dot{\omega} = \dot{v}/R \quad (\text{rullebetingelser})$$

$$I_0 = c \cdot MR^2$$

N2 for rot. om akse gjennom CM: $\tau = I_0 \dot{\omega}$; $\tau = f \cdot R$

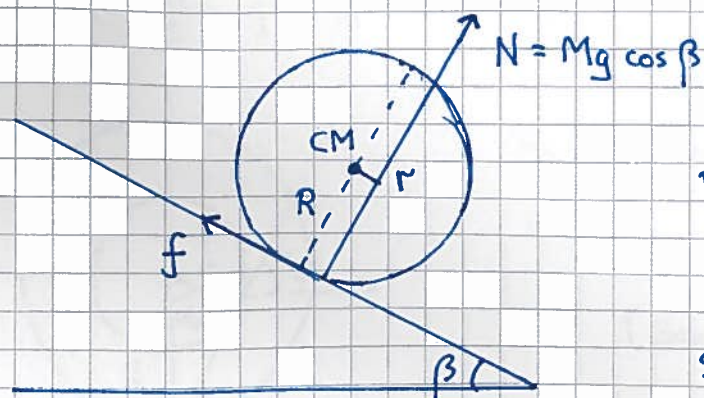
$$\Rightarrow f \cdot R = c MR^2 \cdot \dot{v}/R \Rightarrow f = c M \dot{v}$$

N2 for transl. langs skrånningen: $Mg \sin \beta - f = M \dot{v}$

Innsetning av $f = c M \dot{v}$ og løsn. mhp \dot{v} gir $\dot{v} = g \sin \beta / (1+c)$, som s. 34

Labprosjektet (uavhengig av valgt problemstilling):

- Varierende helningsvinkel $\beta(x)$
- Reprodusere målt bevegelse med numerisk løsning av $\dot{v} = \sum F_{||} / M$
 \Rightarrow må (trolig) ta hensyn til rullefriksjon og/eller luftmotstand
- Rullefriksjon hvis N ikke passerer gjennom CM:



Dreiemoment mhp akse gjennom CM:

$$\tau = f \cdot R - N \cdot r \quad ; \quad \frac{r}{R} \ll 1$$

Stål mot plast: $r/R \sim 10^{-2}$ (?)

NB: f er "ordincær" friksjon; statisk ved ren rulling

rullefriksjonen "representeres" ved normalkraftens dreiemoment $N \cdot r$

• Numerisk modellering:

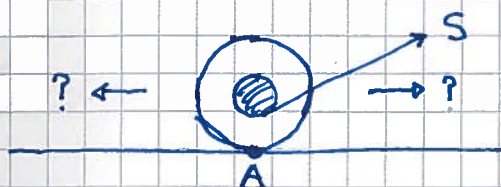
$$\frac{dV}{dt} = \frac{\Sigma F_{\parallel}}{M} \longrightarrow \Delta V = \frac{\Sigma F_{\parallel}}{M} \cdot \Delta t$$

Med rullefiksjon blir $f = c M \dot{V} + \frac{r}{R} Mg \cos \beta$ (vis dette!)

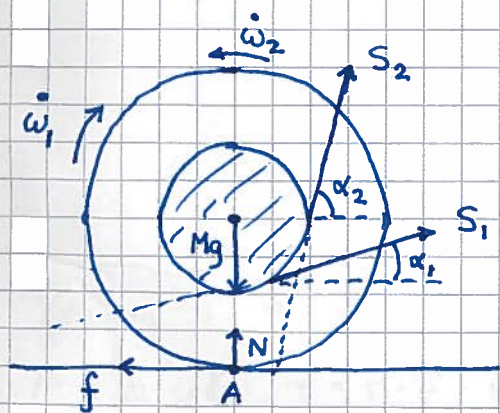
Inkluderes i tillegg luftmotstand f_L , på formen $k \cdot V$ (lave hastigheter; $Re < 2000$) eller DV^2 ($Re > 4000$), se s. 12-13, blir

$$\Sigma F_{\parallel} = \frac{Mg}{1+c} \left\{ \sin \beta - \frac{r}{R} \cos \beta \right\} - \frac{f_L}{1+c} \quad (\text{vis dette!})$$

Eks 2: Snelle; hvilken vei ruller den?



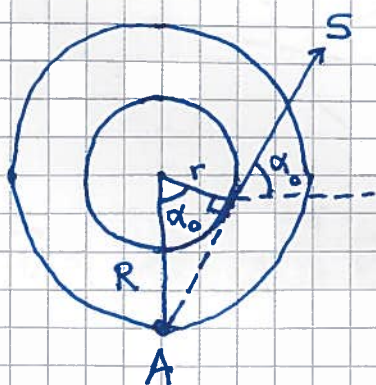
Triks: Velg kontaktlinja mellom snelle og underlag som referanseakse A.



Mg , N og f har null arm mhp aksen A
 \Rightarrow Kun snordraget S kan ha dreiemoment mhp aksen A.

- (1) Liten α : Ruller mot høyre
- (2) Stor α : —" — venstre

Hvis \vec{S} også går gjennom A, har vi statisk likevekt: $\Sigma \tau_A = 0$



Fra fig. ser vi: $\cos \alpha_0 = \frac{r}{R}$

[Ekstraspm: Vis at snella glir dersom

$$S > \frac{\mu_s Mg}{\cos \alpha_0 + \mu_s \sin \alpha_0}]$$

Rotasjonsdynamikk med vektorstørrelser

Innledende merknad:

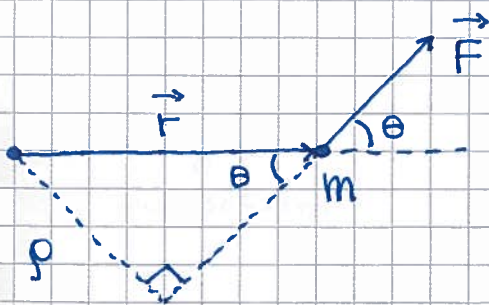
Dreiemoment $\vec{\tau}$ og dreieimpuls \vec{L} beregnes relativt et fritt valgt referansepunkt \vec{r}_0 . (Jf. pot. energi U .)

Vi velger origo som ref. punkt, dvs $\vec{r}_0 = 0$.

Posisjonen til en punktmasse relativt ref.punktet blir da \vec{r} .

Med et annet valg for \vec{r}_0 blir massens posisjon relativt ref.punktet $\vec{r} - \vec{r}_0$.

Dreiemoment [YF 10.1 ; LL 5.5, 6.4]



Kraften \vec{F} sitt dreiemoment på m:

$$\vec{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{F}$$

Retning: $\vec{\tau} \perp \vec{r}$ og $\vec{\tau} \perp \vec{F}$ (Her: $\vec{\tau}$ ut av planet)

Absoluttverdi: $\tau = r \cdot F \cdot \sin \theta = F \cdot \rho$ ("kraft ganger arm", som s. 36)

For partikkelsystem (f.eks. et stivt legeme):

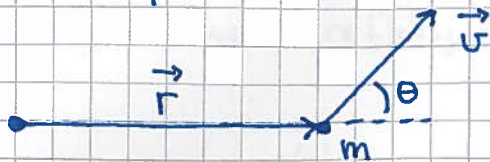


$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{F} = \text{totalt dreiemoment p\u00e5 systemet}$$

Dreieimpuls [YF 10.5 ; LL 6.6]

(alias spinn)

(40)



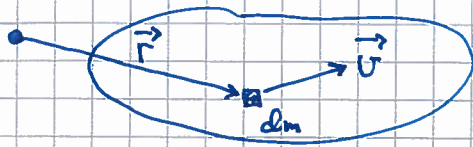
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Dreieimpulsen til m :

$$\vec{L} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{p}$$

Retning: $\vec{L} \perp \vec{r}$ og $\vec{L} \perp \vec{p}$. Abs.verdi: $L = r p \sin \theta = p r \sin \theta$ (se s.39)

For partikkelsystem (f.eks. stjern (egema)) :



$$d\vec{p} = \vec{v} dm$$

$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} dm = \text{systemets totale dreieimpuls}$$

N2 for rotasjon [YF 10.5 ; LL 6.6]

(alias spinnsatsen)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \{ \vec{r} \times m\vec{v} \} = m \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}}_{=\vec{v} \times \vec{v} = 0} + m \vec{r} \times \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{=\vec{a}}$$

$$\stackrel{N2}{=} \vec{r} \times \vec{F} \stackrel{\text{(def)}}{=} \vec{\tau}$$

[Tilsv. bevis for partikkelsystem]

Dvs:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

med $\vec{\tau}$ = netto ytre dreiemoment på systemet

\vec{L} = systemets totale dreieimpuls

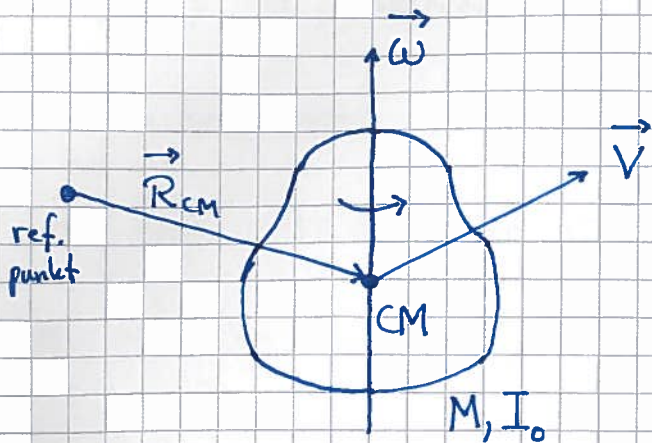
[Jf. $\vec{F} = d\vec{p}/dt$; N2 for translasjon]

\vec{L} for stivt legeme

[YF 10.5 ; LL 6.6]

(41)

Antar legeme med refleksjonssymmetri om rotasjonsaksen :



Fra definisjonen,

$$\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} dm,$$

via et litt kronglete bevis (se notat!)

følger et overraskende enkelt

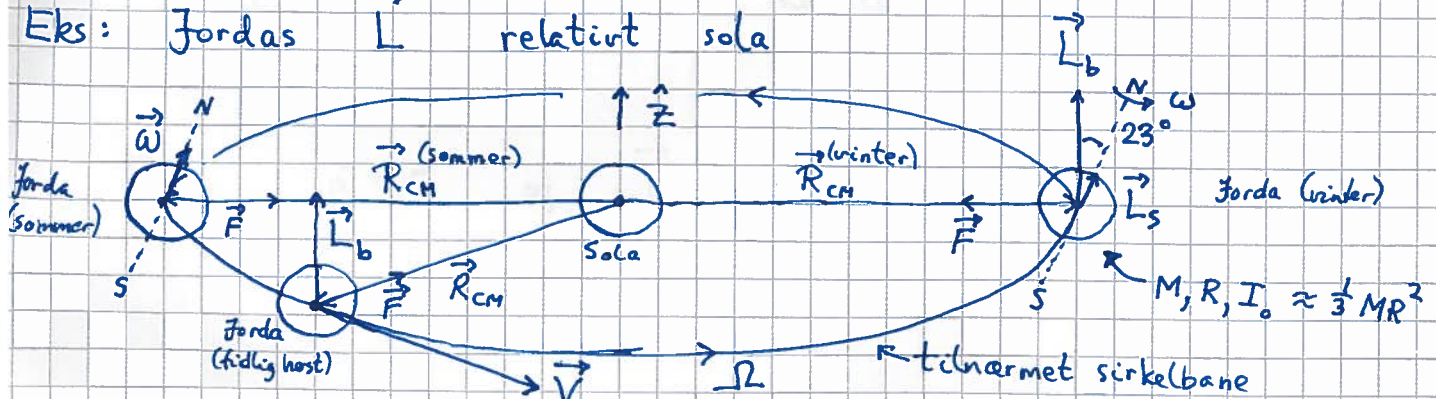
resultat! (Jf. $K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}}$)

$$\vec{L} = \vec{R}_{\text{CM}} \times M \vec{V} + I_0 \vec{\omega}$$

Banedreieimpuls: $\vec{L}_b = \vec{R}_{\text{CM}} \times M \vec{V}$ (som om hele M var i posisjon \vec{R}_{CM} med hastighet $\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{\text{CM}}$)

Indre dreieimpuls: $\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega}$ (uavh. av valg av ref.pkt.)
(spinn)

Eks: Jordas \vec{L} relativt sola



$$\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \vec{R}_{\text{CM}} \times M \vec{V} + I_0 \vec{\omega} = R_{\text{CM}} M V \hat{z} + I_0 \vec{\omega} \quad (\text{= konstant; } (\hat{z} \approx 0))$$

$$R_{\text{CM}} \sim 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}, \quad M \sim 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad V = R_{\text{CM}} \Omega, \quad \Omega = 2\pi \text{ pr år}$$

$$R \sim 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad \omega = 2\pi \text{ pr døgn}$$

$$\Rightarrow L_b \sim 2.7 \cdot 10^{40} \text{ Js}, \quad L_s \sim 6 \cdot 10^{33} \text{ Js} \quad (\ll L_b)$$

Bevaringslover oppsummert

(42)

- I et isolert system (ingen ytre krefter) er total energi E , impuls \vec{p} og dreieimpuls \vec{L} bevart
- I et konservativt system er mekanisk energi $K + U$ bevart
- Hvis netto ytre kraft på et system er null, er total impuls \vec{p} bevart
- Hvis netto ytre dreiemoment på et system er null, er total dreieimpuls \vec{L} bevart

Statisk likevekt [YF 11.1-11.3; LL 7.1]

Et stivt legeme forblir i ro ($\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$)

bare når netto ytre kraft og netto ytre dreiemoment er null:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{konstant}$$

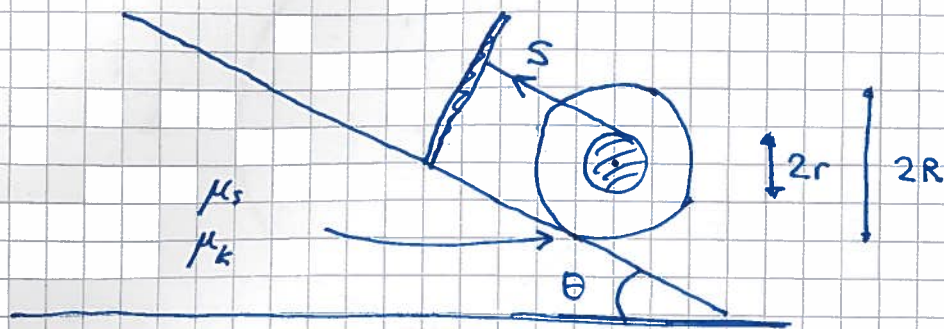
$$\sum_i \vec{\tau}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{konstant}$$

f. eks. $\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$

Eksempler, rotasjonsdynamikk

(43)

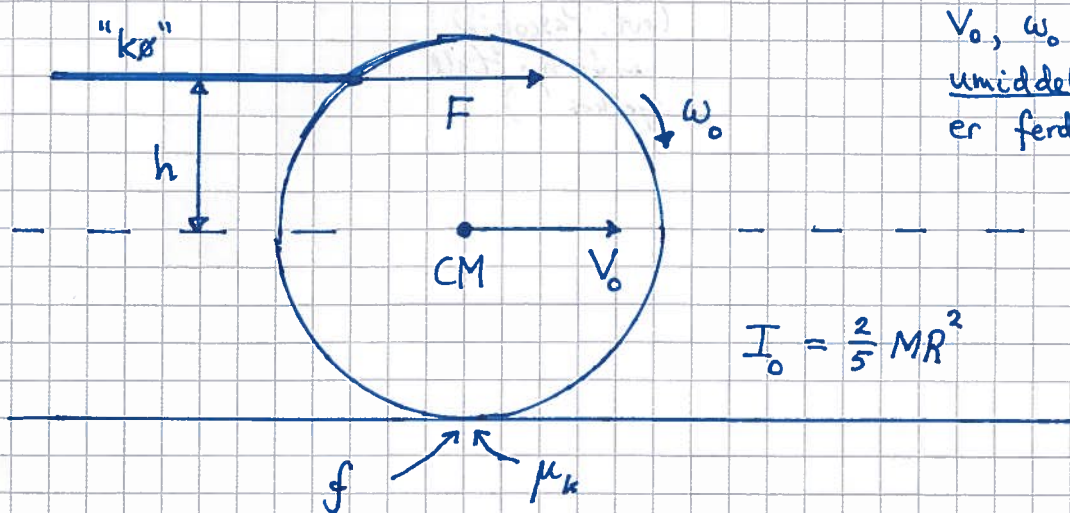
Eks 1: Snelle på skrånplan [Øving 6]



- Max vinkel θ_0 uten at snella sluren "baklengs" nedover skrånplanet?
- Hvis $\theta > \theta_0$, hva er snordraget S og akselerasjonen a ?

Tips:

- $N_1 \parallel$ skrånplan, N_1 for rot. om CM, $f = f_{\max} = \mu_s N$
 $\Rightarrow \theta_0$
- $N_2 \parallel$ skrånplan, N_2 for rot. om CM, $f = \mu_k N$
 $\Rightarrow S$ og a



V_0, ω_0 : Hastighet, vinkelhast.
umiddelbart etter at støtet
 er ferdig. Støtets varighet: Δt

$$I_0 = \frac{2}{5} MR^2$$

Bestem kulas bevegelse!

Anta kortvarig støt i høyde h over senterlinja (evt. under; $h < 0$).

Anta at friksjonskrafta f kan neglisjeres i selve støtet ($F \gg f$).

Tips:

N2 for transl. samt rotasjon om CM gir relasjon mellom V_0 og ω_0 .

$$F = \Delta p / \Delta t \Rightarrow F \cdot \Delta t = \Delta p = M V_0$$

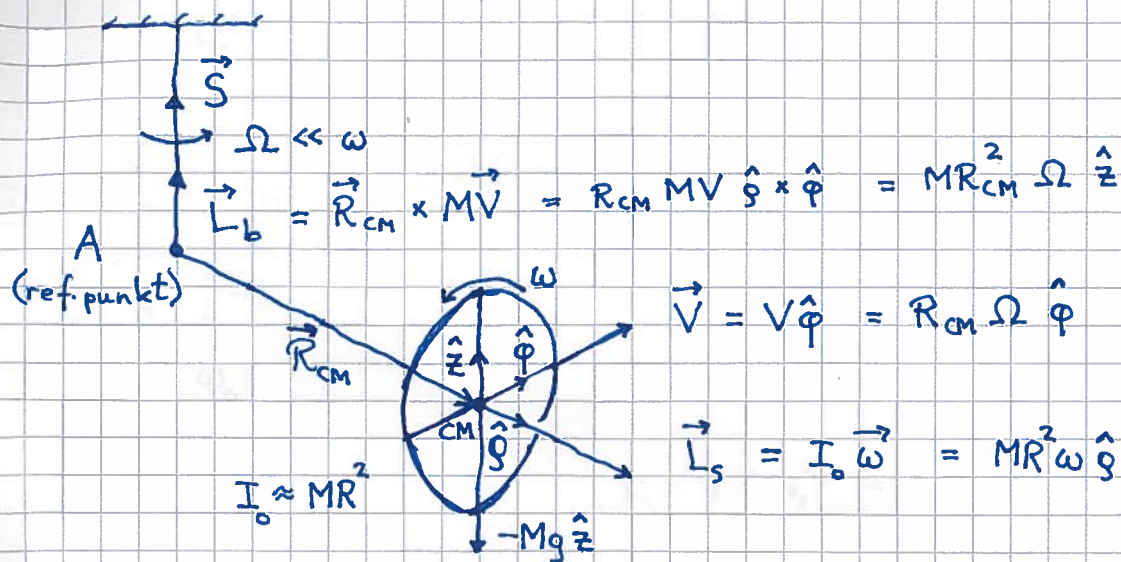
$$\tau = \Delta L / \Delta t \Rightarrow \tau \cdot \Delta t = \Delta L \Rightarrow F \cdot h \cdot \Delta t = I_0 \omega_0$$

Stor h : $\omega_0 > \frac{V_0}{R}$ ("topp-spinn") \Rightarrow skring og \vec{f} mot høyre
 (etter støtet)

Liten (evt. negativ) h : omvendt ("underskru")

"Passelig" $h = \dots \Rightarrow \omega_0 = V_0 / R$ og ren rulling fra start ($f=0$)

Vansett: ren rulling etter hvert!



Sykkelhjul: $M = 5 \text{ kg}$, $R = 0.3 \text{ m}$, $R_{CM} = 0.2 \text{ m}$, $T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} = \underline{\hspace{2cm}}$

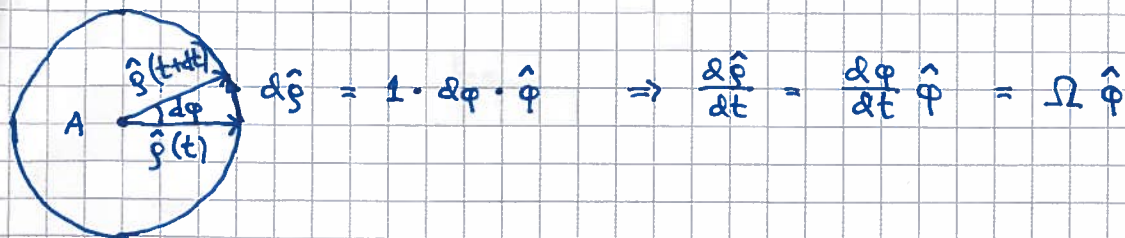
Finn $T_\omega = 2\pi/\omega$ uttrykt ved T_Ω (og øvrige størrelser).

Løsning: Bruker N2 for rotasjon relativt A, $\vec{\tau}_A = d\vec{L}_A/dt$.

$$\vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} = R_{CM} Mg [\hat{\phi} \times (-\hat{z})] = R_{CM} Mg \hat{\phi}$$

$$\vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s = MR_{CM}^2 \Omega \hat{z} + MR^2 \omega \hat{\phi} \stackrel{\omega \gg \Omega}{\approx} MR^2 \omega \hat{\phi}$$

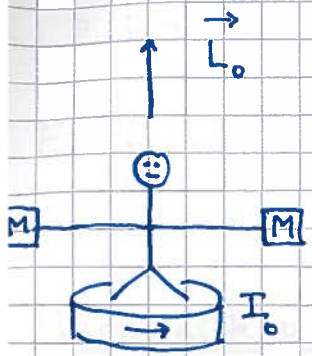
$$\Rightarrow d\vec{L}_A/dt = MR^2 \omega d\hat{\phi}/dt$$



$$\Rightarrow R_{CM} Mg \hat{\phi} = MR^2 \omega \Omega \hat{\phi} \Rightarrow \omega = \frac{R_{CM} g}{R^2 \Omega}$$

$$\Rightarrow \text{Hjulets omløpstid: } T_\omega = \frac{(2\pi R)^2}{R_{CM} g T_\Omega} \approx \frac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10 \cdot T_\Omega} \approx \frac{2 \text{ s}^2}{T_\Omega} \approx \underline{\underline{\hspace{2cm} \text{s}}}$$

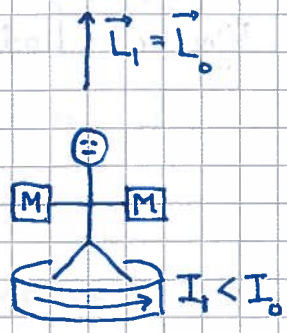
Eks 4: Piruett [YF 10.6; LL 6.5]



$$L_0 = I_0 \omega_0$$

$$K_0 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2$$

$\tau_{ytre} = 0$



$$L_1 = I_1 \omega_1$$

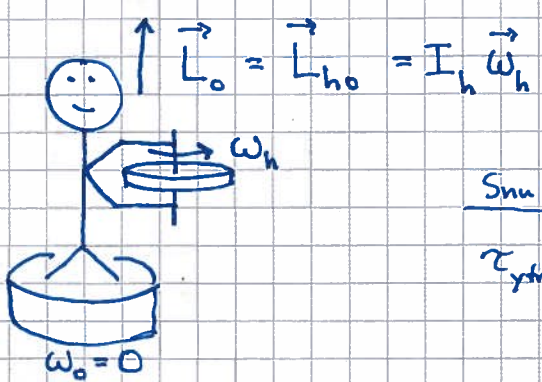
$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0 \omega_1 = K_0 \frac{I_0}{I_1} > K_0$$

$$I_1 \omega_1 = I_0 \omega_0$$

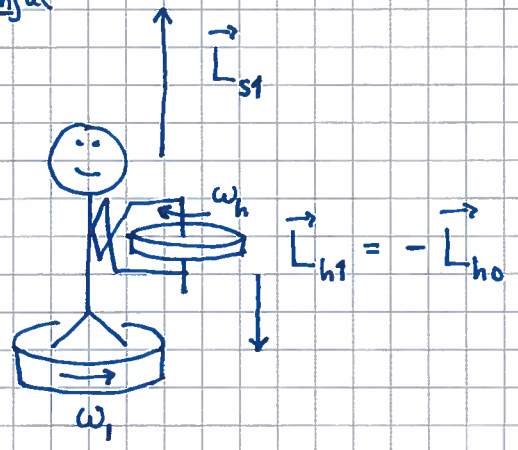
$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{I_0}{I_1} \omega_0 > \omega_0$$

Arbeid utføres av musklene (kjemisk energi).

Eks 5: Roterende student med roterende hjul



Snu hjulet
 $\tau_{ytre} = 0$



$$\vec{L}_0 = \vec{L}_{s1} + \vec{L}_{h1} = \vec{L}_{s1} - \vec{L}_{ho}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_{s1} = 2 \vec{L}_{ho}$$

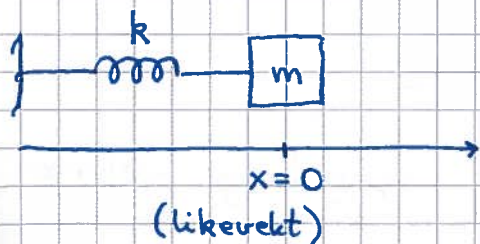
Svingninger [YF 14 ; LL 9]

(47)

= periodisk oppførsel omkring likevekt = oscillasjoner

Eksempler: Masse/fjær, Pendler, Fiolinstring, Atomer i molekyler,

Harmonisk oscillator [YF 14.2 ; LL 9.1-9.3]



x = posisjonen til m = fjæras forlengelse ($x > 0$),
evt. sammenpressing ($x < 0$)

Hookes lov: $\vec{F} = -kx \hat{x}$; dvs kraften fra fjæra på m

er proporsjonal med fjæras forlengelse/sammenpressing.

k = fjærkonstanten ; $[k] = \text{N/m}$

N2 for m : $-kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Dvs: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ Harmonisk oscillator i 1D; her med $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

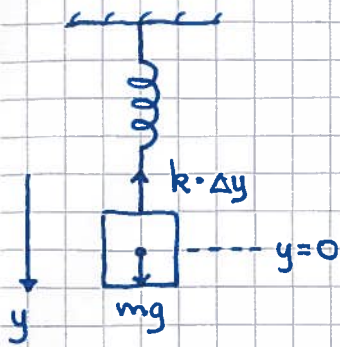
Generell løsning:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{evt.} \quad x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t$$

A og φ , evt. B og C , fastlegges med to initialbetingelser,

f. eks. $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$

Vertikalt i tyngdefeltet:



Fjæra er nå strukket en lengde Δy

når m er i likevekt $\Rightarrow mg = k \Delta y$

$$\Rightarrow \Delta y = mg/k$$

Anta $y=0$ for m i "strukket likevekt"

$$\Rightarrow \Sigma F = mg - k(\Delta y + y) = -ky$$

$$\stackrel{N2}{\Rightarrow} -ky = m\ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad \text{med } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Dvs: Samme ligning, samme (vinkel-)frekvens!

Størrelser og begreper knyttet til harmoniske svingninger:

$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ = oscillatorens utsving (posisjon) ved tid t

A = amplitude = max utsving fra likevekt; $[A] = [x]$

ω_0 = vinkel frekvens; $[\omega_0] = s^{-1}$

$T = 2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr hele svingning; $[T] = s$

$f = 1/T$ = frekvens = antall svingninger pr tidsenhet; $[f] = \frac{1}{s} = \text{Hz}$

$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

φ = fasekonstant; $[\varphi] = 1$

Anta $\varphi = 0$, dvs $x = A \cos \omega_0 t$. Da er

hastigheten: $\dot{x} = -\omega_0 A \sin \omega_0 t = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \pi/2)$

akselerasjonen: $\ddot{x} = -\omega_0^2 A \cos \omega_0 t = -\omega_0^2 x$

$$= \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \pi)$$

Dvs: Faseforskjell $\pi/2$ mellom x og \dot{x}

— || — π mellom x og \ddot{x} (i motfase)

Energi i en harmonisk oscilator [YF 14.3 ; LL 9.4]

Anta $\varphi = 0$ og $x = A \cos \omega_0 t$. Da er

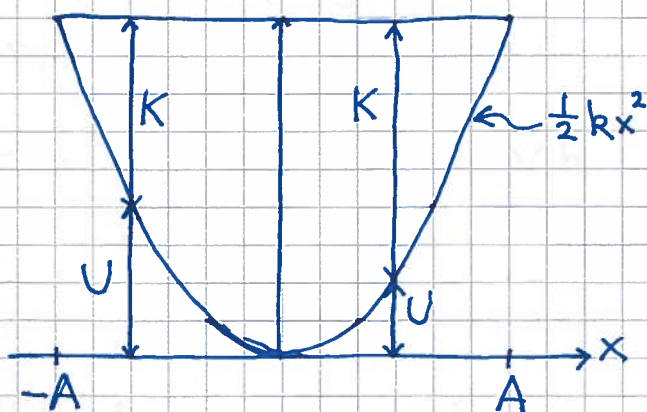
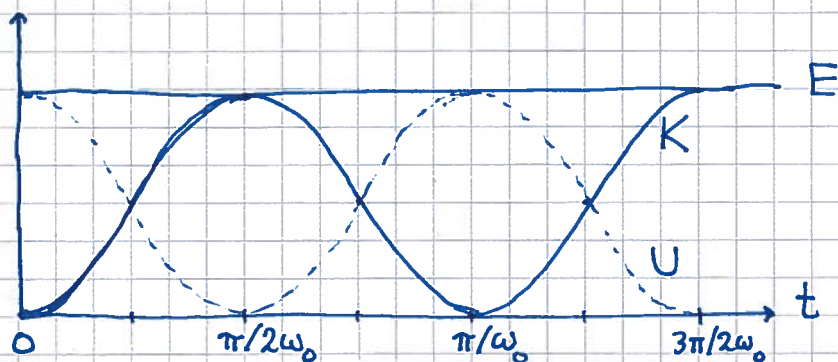
$$K(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$U = - \int_0^x F(x) dx = - \int_0^x (-kx) \cdot dx = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\Rightarrow U(t) = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 \omega_0 t$$

\Rightarrow Total mekanisk energi er bevart ; systemet er konservativt :

$$E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 = \text{konstant}$$

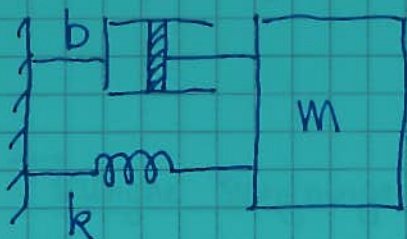


Dempet fri svingning [YF 14.7; LL 9.7]

50

Langsom bevegelse i fluid: $f = -b\dot{x}$; antas her.

[Rask bevegelse i fluid: $f = -D\dot{x}^2$. Tørr friksjon: $f = \mu_k N$]



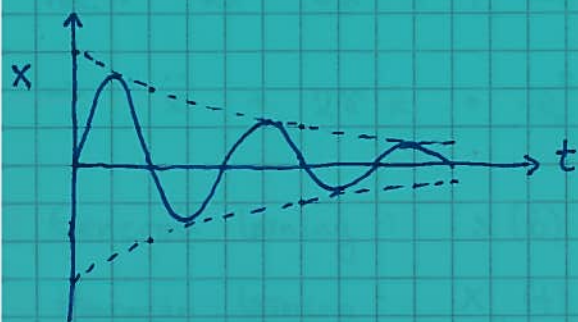
$$N2: -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\text{der } \gamma = b/2m, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Underkritisk demping, $\gamma < \omega_0$:

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi); \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



----- $\pm A e^{-\gamma t}$ (omhyllingskurve)

Dvs: Dempede svingninger med eksponentielt avtagende amplitude, $A \cdot \exp(-\gamma t)$.

Etter en tid $\gamma^{-1} = 2m/b$ er amplituden redusert fra A til $A/e \approx 0.37 A$

Overkritisk demping, $\gamma > \omega_0$:

$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}$$

$$\text{med } \alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

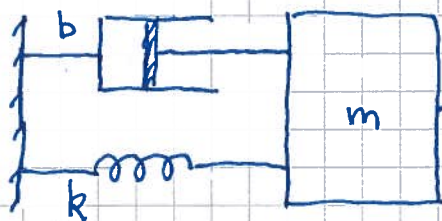
Dvs: Exp. avtagende $x(t)$, uten svingninger

Kritisk damping, $\gamma = \omega_0$:

$$x(t) = A e^{-\gamma t} + B t e^{-\gamma t}$$

Gir god kjørekomfort når støtdemperne har $\gamma \approx \omega_0$!

Tvingne svingninger og resonans [YF 14.8; LL 9.9]



$F(t) = F_0 \cos \omega t =$ ytre, harmonisk kraft

$$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad ; \quad 2\gamma = \frac{b}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Generell løsning : $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Homogen løsning : $x_h(t) \sim \exp(-\gamma t) \approx 0$ for $t \gg \gamma^{-1}$; bare relevant for innsvingningsforløpet, $0 < t \lesssim \gamma^{-1}$

Partikulærløsning : $x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$

Innsetting i $\ddot{x}_p + 2\gamma \dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$ gir

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2\}^{1/2}} \quad ; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left\{\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right\}$$

Resonans : Stor $A(\omega)$ hvis $\gamma \ll \omega_0$ (svak damping) og $\omega \approx \omega_0$:

$$A(\omega_0) = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{F_0}{k} \frac{\omega_0}{2\gamma} = A_0 \frac{\omega_0}{2\gamma} \gg A_0$$

(der $A_0 = A(0) = F_0/k = F_0/m\omega_0^2$)

Hvis $\gamma \rightarrow 0$: $A(\omega_0) \rightarrow \infty$ (Tacoma bridge 1940)

Eks / Exp: Vi ser på oscillatorens energi

52

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} ; E_0 = \frac{1}{2}kA_0^2 = \frac{F_0^2}{2k}$$

for en stav med ett messinglodd festet til ei fjær, svak demping.

• Fri svingning: $T_0 = 0.63 \text{ s}$; $f_0 = 1.55 \text{ Hz}$

• Måler A^2 som funksjon av f , omkring f_0

• Halvverdi-bredden til resonanskurven:

$$E(\omega_0) = E_{\max} ; E(\omega_1) = E(\omega_2) = \frac{1}{2}E_{\max} , \omega_1 = \omega_0 - \gamma , \omega_2 = \omega_0 + \gamma$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma = \text{halvverdi-bredden}$$

• Resonanskurvens Q -faktor ($Q = \text{Quality}$):

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\sqrt{k/m}}{b/m} = \frac{\sqrt{k \cdot m}}{b} ,$$

et dimensjonsløst mål for hvor skarp resonansstoppen er.

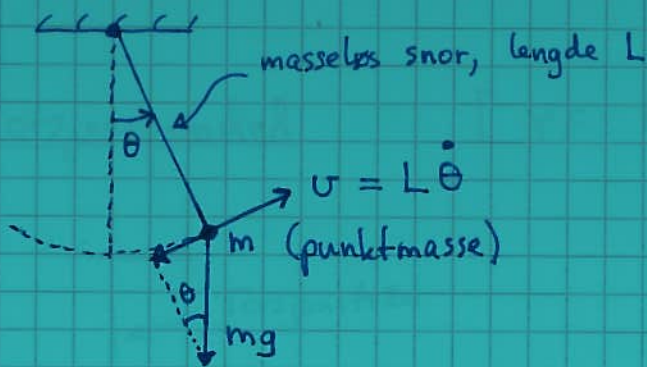
Liten demping $\gamma \Rightarrow$ Smal og høy resonansstopp

Pendler

53

Matematisk pendel

[YF 14.5; LL 9.6]



N2 || sirkelbanen:

$$F = ma, \text{ med}$$

$$F = -mg \sin \theta \text{ og}$$

$$a = \dot{v} = L \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow -mg \sin \theta = mL \ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

Anta små utsving fra likevekt, $|\theta| \ll 1$, slik at $\sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0; \quad \omega_0^2 = g/L$$

Dvs, harmonisk oscillator, med løsning $\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_0 t$

Fysisk pendel

[YF 14.6; LL 9.6]



Stivt legeme, masse M , treghetsmoment I mhp
aksen A , $\vec{R}_{CM} = \vec{L}$. N2 for rotasjon om A :

$$\tau = I \ddot{\theta}$$

$$\text{med } |\vec{\tau}| = |\vec{L} \times M\vec{g}| = MgL \sin \theta.$$

Fortegn: $\vec{\tau}$ virker med klokka når $\theta > 0$ (som i fig.)

$$\Rightarrow \tau = -MgL \sin \theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + (MgL/I) \sin \theta = 0$$

Anta små utsving $\Rightarrow \sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0; \quad \omega_0^2 = \frac{MgL}{I}$$

Harmonisk osc.
igjen!

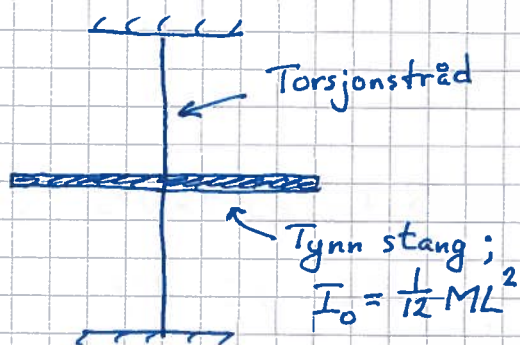
• Matematisk pendel : $I = ML^2 \Rightarrow \omega_0^2 = g/L$; OK

(54)

• Hvis A i CM : $L = 0 \Rightarrow \omega_0 = 0$; OK

Torsjionspendel

[YF K.4 ; LL 9.6]



Hookes lov : Torsjonstråden (typisk en metalltråd) motsetter seg vridning og virker på stanga med et dreiemoment som er proporsjonalt med vridningsvinkelen,
 $\tau = -\mathcal{K} \theta$,
med torsjonsstivhet \mathcal{K} .
($[\mathcal{K}] = [\tau] = \text{Nm}$)

N2 for rotasjon om trådens akse :

$$\tau = I_0 \ddot{\theta} \Rightarrow -\mathcal{K} \theta = I_0 \ddot{\theta} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ; \omega_0^2 = \frac{\mathcal{K}}{I_0}}$$

Harm. osc, nok en gang.

Eks/Exp: $M = 50\text{g}$, $L = 11\text{cm}$.

Mål $T = 2\pi/\omega_0$ og beregn \mathcal{K} !

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \omega_0^2 I_0 = 4\pi^2 I_0 / T^2 = \pi^2 ML^2 / 3T^2 \\ &= \pi^2 \cdot 0.050\text{ kg} \cdot (0.11\text{ m})^2 / 3 \cdot (0.8\text{ s})^2 \approx \underline{\underline{0.003\text{ Nm}}} \end{aligned}$$

[Torsjonsstivheten \mathcal{K} er prop. med trådens skjærmodul (G) og trådens diameter i fjerde potens (d^4), samt omvendt prop. med trådens lengde (l) : $\mathcal{K} \approx \pi G \cdot d^4 / l \cdot 32$]

ELEKTRISITET OG MAGNETISME

Alle

Kun TFY4104

YF 21-26 ; LHL 19-22

(Magnetisme for MTPETR og MTTEKGEO i TPG 4100.)

YF 27-31 ; LHL 23-27

I. Elektrostatikk. Ledere, isolatorer.

YF 21-24 ; LHL 19-20

II. Strøm. DC-kretser.

YF 25-26 ; LHL 21-22

Alle

III. Magnetostatikk. Magnetisme

YF 27-28 ; LHL 23, 26

TFY4104

IV. Elektromagnetisk induksjon. AC-kretser.

YF 29-31 ; LHL 24, 25, 27

TFY4102 (ca) uke 44 - 47:

Bølgefysikk

Termisk fysikk

Man 8-10 og Ons 10-12 i rom D5-106.

I. Elektrostatikk [YF 21-24 ; LHL 19-20]

56

Elektrisk ladning [YF 21.1 ; LHL 19.1]

Materie = atomer

Atom = kjerne + elektroner

Kjerne = protoner + nøytroner = kjernepartikler

Kjernepartikkel = 3 kvarker

Elementærpartikler = udelelige byggeklosser i naturen
(elektron, kvarker, foton, nøytrinoer, Higgs-partikkelen osv.)

Noen av disse har elektrisk ladning, positiv eller negativ, og noen er elektrisk nøytrale.

Ladningen er kvantisert:

<u>Partikkel</u>	<u>Ladning</u>
Elektron (e)	$-e$
Opp-kvark (u)	$+2e/3$
Ned-kvark (d)	$-e/3$
Elektron-nøytrino (ν_e)	0
Foton (γ)	0

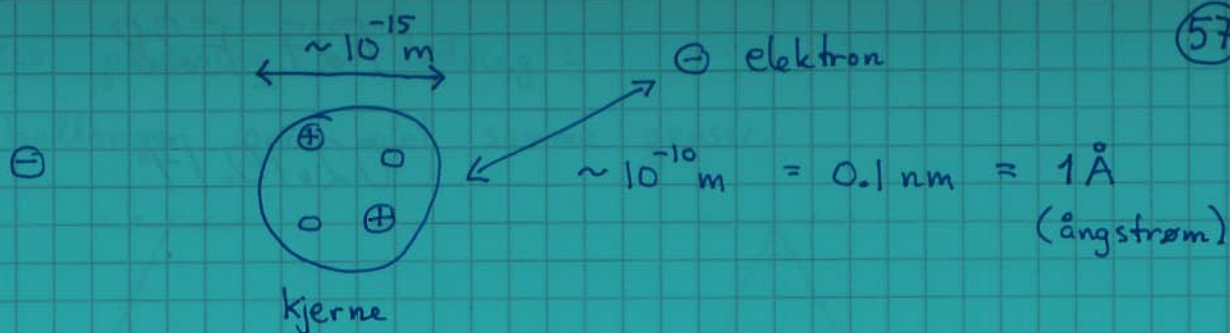
e = elementærladningen; påvist av R. Millikan med små ladede oljedråper i 1909 (NP 1923 ; NP = Nobelpris)

$$\text{Nøytron } (n) = 1u + 2d \Rightarrow q_n = 0$$

$$\text{Proton } (p) = 2u + 1d \Rightarrow q_p = e$$

Symbol for el. ladning: q og Q ("quantity of electricity")

Atom:



$$m_e \approx 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_n \approx m_p \approx 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

} \Rightarrow Praktisk talt hele atommassen i kjernen.

Nøytralt atom med atomnummer Z :

$$Z \text{ protoner og } Z \text{ elektroner} \Rightarrow Q = Z \cdot e - Z \cdot e = 0$$

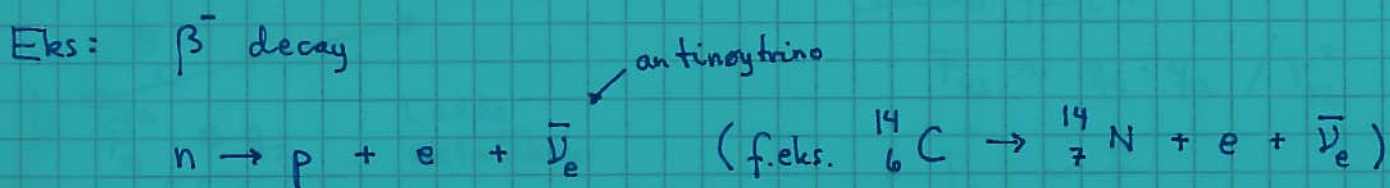
Ioner: Atomer og molekyler med flere eller færre elektroner enn protoner.

Eks: O^{2-} = oksygenatom med 10 elektroner ($Z=8$); $q = -2e$

O_2^- = oksygenmolekyl med 17 elektroner; $q = -e$

Ladningsbevarelse: Netto ladning i et lukket system er konstant.

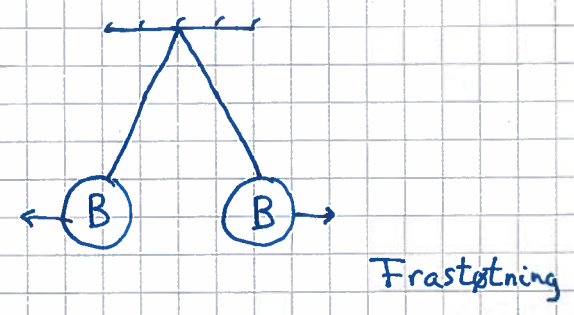
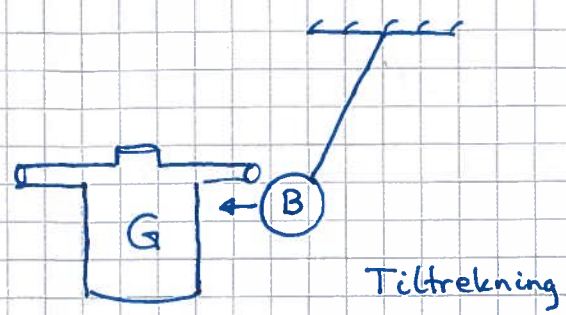
Eks: β^- decay



$$\text{Ladning: } \underline{0} \rightarrow e - e + 0 = \underline{0}$$

Kvalitativ påvisning av ladning :

2 like ballonger gnis mot samme genser.



Konklusjon:

Like ladninger frastøter hverandre, ulike ladn. tiltrekker hverandre.

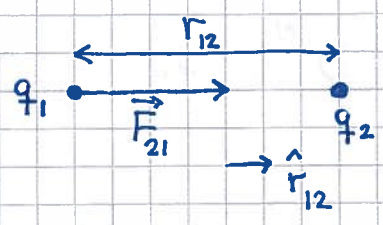
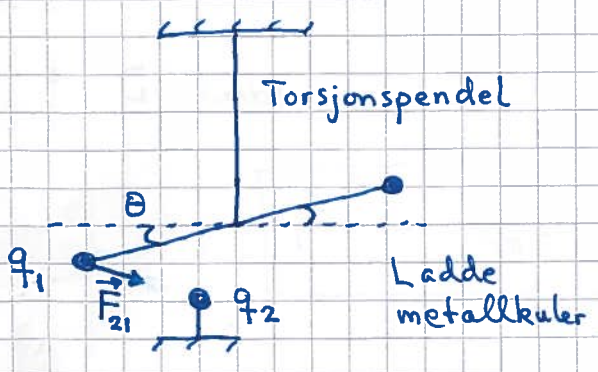
Naturlig å kalle de to ladningstypene positiv og negativ.



Coulombs lov

[YF 21.3 ; LHL 19.3]

Exp. ca 1785 :



Coulomb fant:

- $F_{21} \sim q_1 \cdot q_2 / r_{12}^2$
- $\vec{F}_{21} \sim \hat{r}_{12}$

$$\Rightarrow \vec{F}_{21} = K_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad \text{Coulombs lov}$$

Samme form som Newtons gravitasjonslov.

$$N3: \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$[q] = C \quad (\text{coulomb})$$

- $1 C = 1 A \cdot s =$ mengden ladning som passerer tverrsnitt av en leder pr sekund hvis strømstyrken er $1 A$ (ampere)
- $1 C =$ ladningen til hver av to like legemer som i innbyrdes avstand $1 m$ frastøter hverandre med en kraft $8.98755... \cdot 10^9 N$

Dvs:

$$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.98755... \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

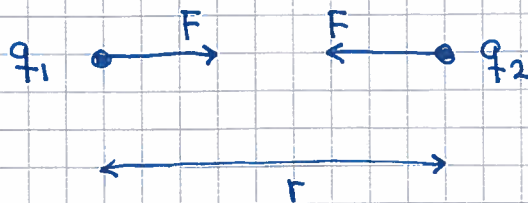
$$\epsilon_0 = 8.854... \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} = \text{permittiviteten til vakuüm}$$

- Med denne definisjonen av $1 C$ blir

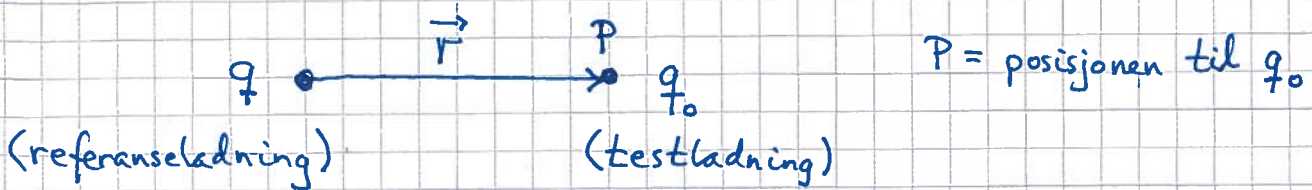
$$e = 1.602... \cdot 10^{-19} C \approx 1.6 \cdot 10^{-19} C$$

- Coulombs lov:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$



Elektrisk felt [YF 21.3-21.5 ; LHL 19.3-19.5]



Kraft på q_0 fra q : $\vec{F} = \frac{q \cdot q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$

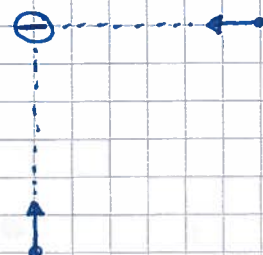
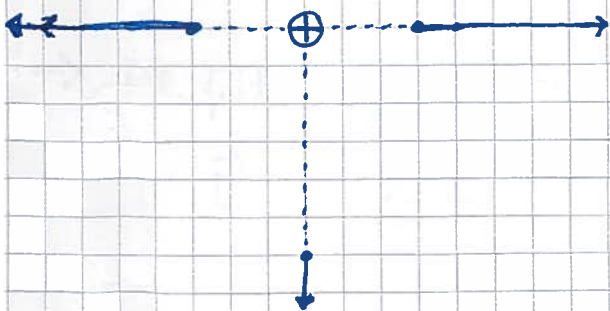
Elektrisk felt $\stackrel{\text{def}}{=} \text{El. kraft pr ladningsenhet}$

$\Rightarrow \vec{E} = \vec{F} / q_0 ; [E] = \text{N/C}$

\Rightarrow (Referanse-)ladningen q omgir seg med et elektrisk felt, som i avstand r er :

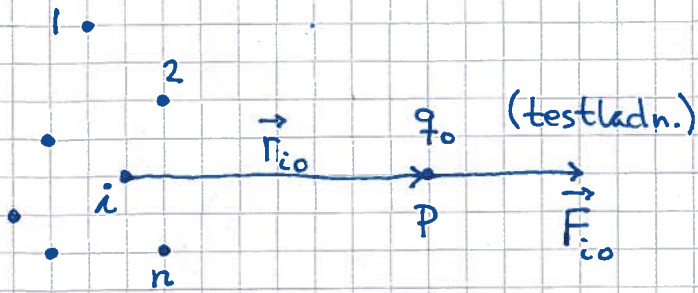
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

ders med retning radielt bort fra positiv ladning og " " inn mot negativ " " :



El. kraft og felt fra flere ladninger:

(61)



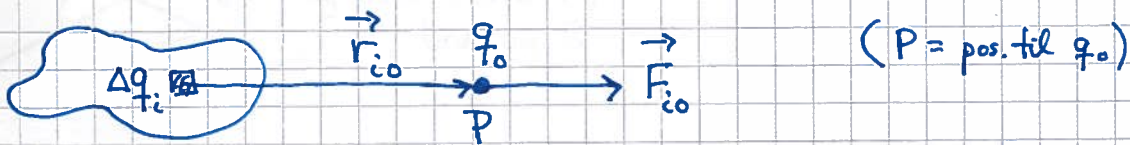
(P = pos. til q_0)

n ref. ldn.
 $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$

Superposisjonsprinsippet (SPP): $\vec{F}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i0} = \text{total kraft}$
 på q_0 fra $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$

$$\Rightarrow \vec{F}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i q_0}{r_{i0}^2} \hat{r}_{i0}$$

Hvis vi har en kontinuerlig fordeling av ref. ladninger:

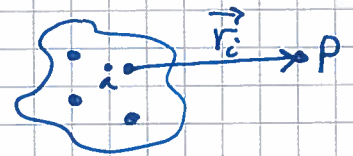


(P = pos. til q_0)

$$\vec{F}_0 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_{i0}^2} \hat{r}_{i0} \xrightarrow{\Delta q_i \rightarrow 0} \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{r} dq}{r^2}$$

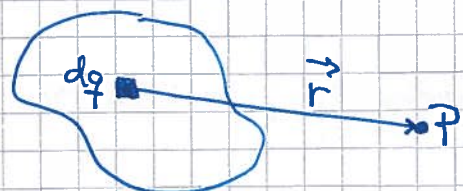
\Rightarrow El. felt fra flere ladninger:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{q_i \hat{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}$$

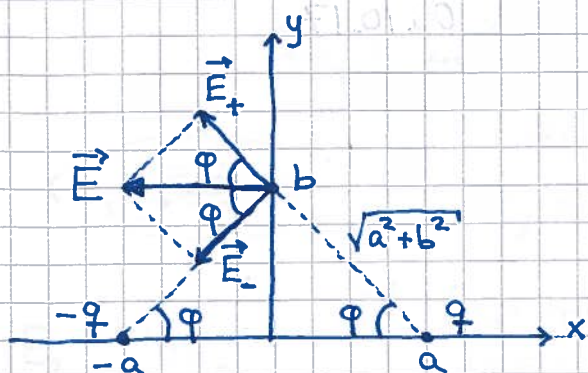


Fra kontinuerlig ldn. fordeling:

$$\vec{E} = \int \frac{\hat{r} dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



Eks 1: $\pm q$ i $x = \pm a$; bestem \vec{E} i $y=b$, på y-aksen. (62)

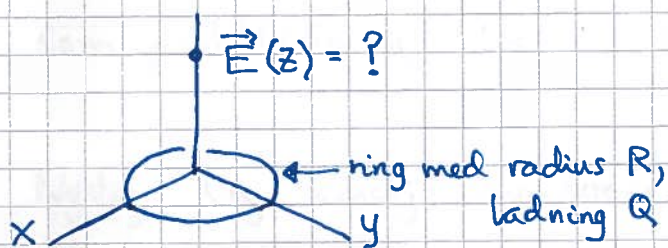


- $E_+ = E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(a^2+b^2)}$
- Pga symmetrien er $E_y = 0$, dvs $E = E_x$
- $E_x = E_+^x + E_-^x$
- $E_+^x = E_-^x = E_+ \cos\phi$; $\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

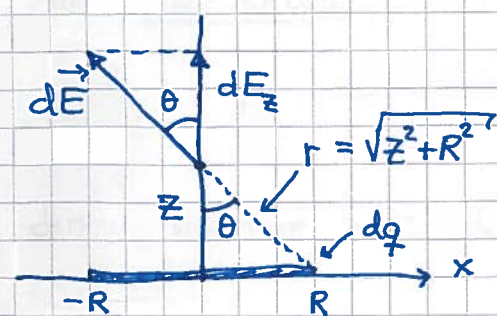
Dermed:
$$\vec{E} = -\hat{x} \cdot \frac{2qa}{4\pi\epsilon_0(a^2+b^2)^{3/2}}$$

[Dette er en elektrisk dipol. Langt unna, når $b \gg a$, avtar E som $\frac{1}{b^3}$.]

Eks 2: \vec{E} på aksen til en jevnt ladet ring (sentrum i origo)



- Pga symmetrien er $E_x = E_y = 0$,
dvs $\vec{E}(z) = E_z(z)\hat{z}$



$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

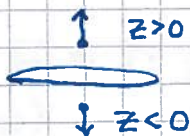
$$dE_z = dE \cos\theta; \cos\theta = \frac{z}{r}$$

$$\Rightarrow E_z = \int dE_z = \frac{z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int dq = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Svaret er fornuftig:

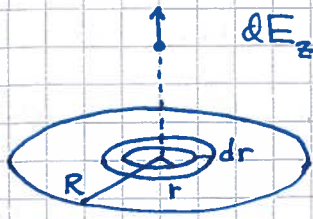
- $[E_z] = [Q/\epsilon_0 z^2]$; OK
- $E_z(0) = 0$; OK
- $E_z \approx Q/4\pi\epsilon_0 z^2$ når $z \gg R$; OK, ser ut som punktledning i origo fra langt unna

- $E_z(z) = -E_z(-z)$; OK:



Eks 3: \vec{E} på aksen til jevnt ladet sirkulær skive

(63)



$$dE_z = \frac{dq \cdot z}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}} = \text{bidrag til } E_z \text{ fra tynn ring med radius } r, \text{ bredde } dr \text{ og ladning } dq = Q \cdot dA/A = Q \cdot 2\pi r dr / \pi R^2$$

$$\Rightarrow E_z = \int dE_z = \int_{r=0}^R \frac{(Q \cdot 2\pi r dr / \pi R^2) \cdot z}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^R \left(-(z^2 + r^2)^{-1/2} \right)$$

$$= \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right\} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/z^2}} \right\}$$

Fornuftig svar for $z \gg R$:

$$\left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{R^2}{2z^2} \Rightarrow E_z \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}; \text{ OK, ser ut som punktladning } Q \text{ i origo fra langt unna.}$$

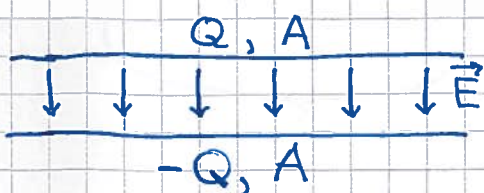
Nyttig (og kanskje noe overraskende?) resultat for $z \ll R$, dvs nær skiva, evt. for stor skive:

$$E_z \approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}; \quad \sigma = \frac{Q}{\pi R^2} = \text{skivas ladning pr flateenhet}$$

dvs: konstant feltstyrke, uavhengig av avstanden z .

Anvendelse i elektriske kretser:

Parallellplatekondensator; to parallelle metallplater som kan tilføres like stor ~~l~~ ladning med motsatt fortegn, $\pm Q$. Siden \vec{E} peker bort fra pos. plate (Q) og inn mot neg. plate ($-Q$) blir total elektrisk feltstyrke mellom



$$\text{platene } E = 2 \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

(mens $E=0$ utenfor)

Feltlinjer for \vec{E} [YF 21.6 ; LHL 19.6]

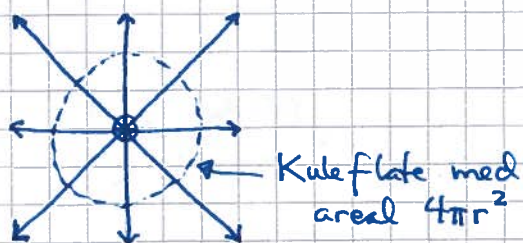
(64)

Gir en visuell framstilling av \vec{E} fra en eller flere ladninger i området omkring ladningen(e).

Retning: $\vec{E} \parallel$ feltlinjene

Feltstyrke: $E = |\vec{E}|$ prop. med feltlinjetettheten, dvs antall feltlinjer som krysser en flate, pr flateenhet

Eks 1: Punktladning



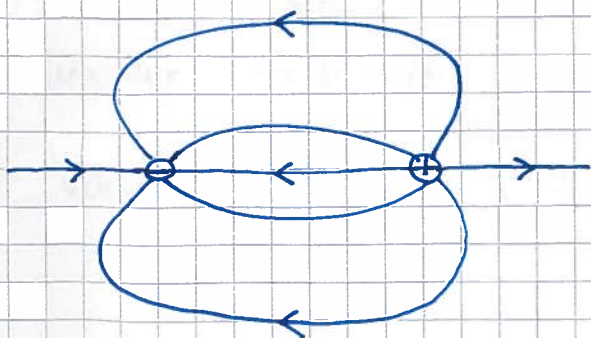
Anta N feltlinjer ut (inn) gjennom kuleflaten når $q > 0$ ($q < 0$)

Feltlinjetetthet på kuleflaten: $\frac{N}{A} = \frac{N}{4\pi r^2} \sim \frac{1}{r^2}$

El. feltstyrke ——— " ——— : $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sim \frac{1}{r^2}$

$\Rightarrow E \sim N/A$, som vi skulle ha.

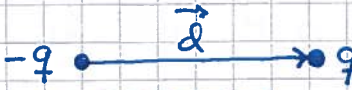
Eks 2: El. dipol



Ser at feltlinjer starter på pos. ladn. og ender på neg. ladn. (Evt. ∞ langt borte.)

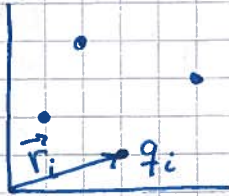
Elektrisk dipol og dipolmoment [YF 21.7 ; LHL 19.10]

(65)

Enkel dipol: 

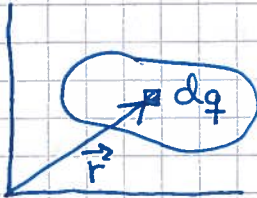
har dipolmoment $\vec{p} = q\vec{d}$ med SI-enhet $[p] = \text{C}\cdot\text{m}$

Generelt:



$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

Kontinuerlig ladningsfordeling:



$$\vec{p} = \int \vec{r} dq$$

NB: Netto ladning for elektrisk dipol er alltid nul, dvs

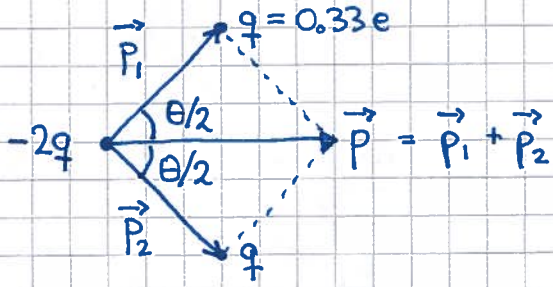
$$\sum_i q_i = 0, \quad \text{evt.} \quad \int dq = 0$$

Anvendelser:

- Mange molekyler er el. dipoler (H_2O , NH_3 , CO osv)
- Hvis ikke, blir de el. dipoler i et ytre el. felt. Gjelder gasser, væsker, faste stoffer og enkeltatomer. Stoffet polariseres i ytre felt.
- Viktig med tanke på å forstå materialers elektriske egenskaper.

Eks 1: Anta "punktladningsmodell" for vann, med ladninger $+0.33e$ og $-0.66e$ på hver H og O, og bestem dipolmomentet til H_2O . Bindingslengde og \angle er hver 0.96 \AA og 104.5° . (66)

Løsn:



$$P_1 = P_2 = q \cdot d$$

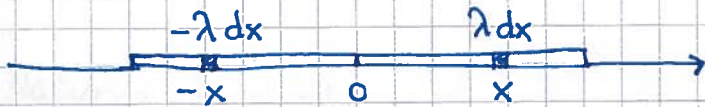
$$p = 2qd \cos \frac{\theta}{2} = 2 \cdot 0.33e \cdot 0.96 \text{ \AA} \cdot \cos 52.25^\circ$$

$$= 0.39 e \text{ \AA} = 6.2 \cdot 10^{-30} \text{ C m}$$

Eks 2: Stav med jevnt ladete halvdelar med motsatt ladning $\pm \lambda = \text{ladn. pr lengdeenhet} \text{ (} [\lambda] = \text{C/m)} \text{)}$



Løsn: Deler opp staven i enkle dipoler, dvs ladningspar $\pm dq = \pm \lambda dx$ i innbyrdes avstand $2x$:



$$\text{Dipolmoment: } d\vec{p} = \lambda dx \cdot 2x \cdot \hat{x}$$

Totalt dipolmoment:

$$\vec{p} = \int d\vec{p} = \int_0^{L/2} \lambda dx \cdot 2x \hat{x} = 2\lambda \hat{x} \int_0^{L/2} \frac{1}{2} x^2 = \underline{\underline{\frac{1}{4} \lambda L^2 \hat{x}}}$$

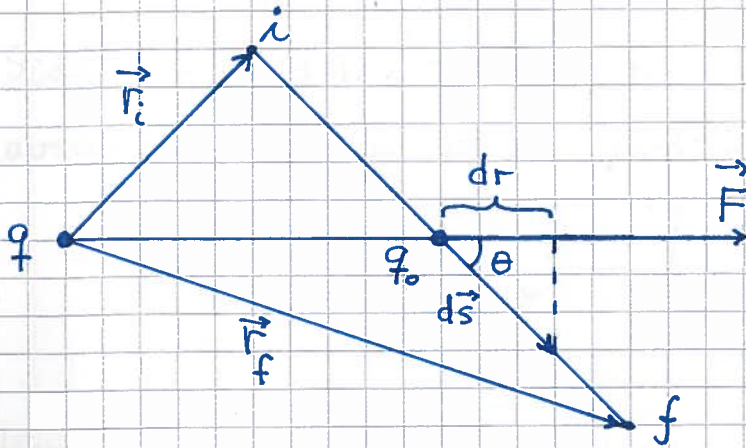
Fornuftig svar ?

- $[\lambda L^2] = \frac{C}{m} \cdot m^2 = C \cdot m$; OK

- Samme svar som for to punktladn. $\pm \lambda \cdot \frac{L}{2}$ plassert i innbyrdes avstand $L/2$; OK

Potensiell energi og elektrisk potensial [YF 23.1, 23.2; LHL 19.9, 20.3] (67)

Pot. energi for testladn. q_0 i \vec{E} -felt fra ref. ladn. q :



$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot ds \cdot \cos\theta = F \cdot dr$$

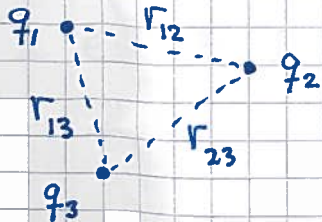
$$\begin{aligned} \Delta U = U_f - U_i &\stackrel{\text{def}}{=} - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{r_i}^{r_f} F \cdot dr = - \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r_f} - \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r_i} \end{aligned}$$

\Rightarrow Naturlig å velge $U = 0$ for $r \rightarrow \infty$

\Rightarrow Pot. energi for ladningspar q og q_0 i innbyrdes avstand r :

$$U(r) = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Med flere ladninger: Alle ladn. i systemet vekselvirker parvis.
Velger $U = 0$ når alle ladn. er uendelig langt fra hverandre



$$\begin{aligned} \Rightarrow U &= U_{12} + U_{13} + \dots + U_{1n} + U_{23} + \dots + U_{2n} + \dots + U_{n-1,n} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_{ij} = \sum_{i < j} U_{ij} = \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \end{aligned}$$

Elektrisk potensial $\stackrel{\text{def}}{=} \text{pot. energi pr ladningsenhet}$

(68)

$$V = U/q_0$$

Enhet: $[V] = \text{J/C} = \text{V (volt)}$

Siden $U = qq_0/4\pi\epsilon_0 r$ for ladningspar q og q_0 i innbyrdes avstand r , ser vi at en punktladning q omgir seg med potensialet

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Coulombpotensialet

Har nå: $\vec{E} = \vec{F}/q_0$, $V = U/q_0$ og $\Delta U = -\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s}$

Dermed:

$$\Delta V = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Pot.forskjell $\Delta V = V_f - V_i$ mellom posisjon f (final) og i (initial).

\Rightarrow Alternativ enhet for \vec{E} : $[E] = \text{V/m}$ (mer brukt enn N/C)

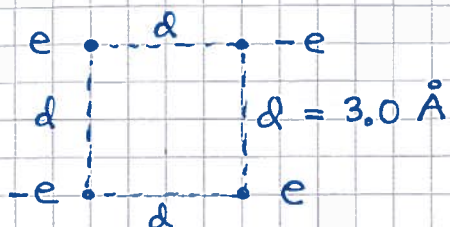
Alternativ energienhet:

1 eV (elektronvolt) = ΔU for elementarladning ($q=e$) som flyttes fra posisjon i med potensial V_i til posisjon f med potensial $V_f = V_i + 1\text{V}$; dvs $\Delta V = V_f - V_i = 1\text{V}$.

$$1 \text{ eV} = 1 \cdot \underbrace{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}_e \cdot \underbrace{1 \frac{\text{J}}{\text{C}}}_{1\text{V}} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Eks 1: Beregn U for systemet

(69)



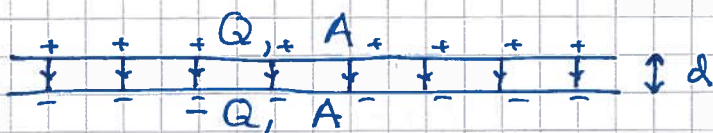
Løsn: Vi har her 6 ladningspar som bidrar til $U = \sum_{i < j} U_{ij}$

$$U = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \left\{ 4 \cdot (-1) + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \frac{(\sqrt{2} - 4)e^2}{4\pi\epsilon_0 d}$$

$$\approx 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(\sqrt{2} - 4) \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{3.0 \cdot 10^{-10}} \text{ eV} = 4.8 \cdot (\sqrt{2} - 4) \text{ eV} \approx \underline{\underline{-12 \text{ eV}}}$$

Eks 2: Beregn ΔV mellom to metallplater med jevnt fordelt ladning $\pm 5.5 \text{ nC}$, areal 200 cm^2 og plateavstand 1.0 mm .

Løsn:



$$\begin{aligned} Q &= 5.5 \cdot 10^{-9} \text{ C} \\ A &= 200 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \\ d &= 1.0 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

Fra eks s. 63: $E = \sigma/\epsilon_0 = Q/A\epsilon_0$ mellom platene

$$\Rightarrow \Delta V = - \int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{(+)}^{(-)} E \cdot ds = E \cdot d = \underline{\underline{\frac{Q \cdot d}{A \cdot \epsilon_0}}}$$

Tallverdi:

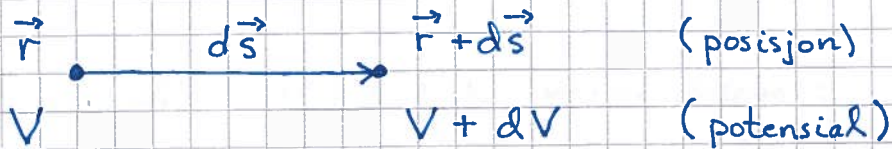
$$\Delta V = \frac{5.5 \cdot 10^{-9} \cdot 1.0 \cdot 10^{-3}}{200 \cdot 10^{-4} \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} \text{ V} = \underline{\underline{31 \text{ V}}}$$

Da \vec{E} har retning fra positiv mot negativ ladning, blir potensialet høyest på pos. ladet plate og lavest på neg. ladet plate.

Beregning av \vec{E} fra V

[YF 23.5 ; LHL 19.9]

(70)



$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \quad (\text{totalt differensial})$$

$$= \left(\hat{x} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz \right)$$

$$= \underbrace{\nabla V}_{\text{(gradienten til } V)} \cdot \underbrace{d\vec{s}}_{\text{(veielement)}}$$

Fra s. 68:

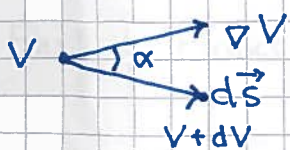
$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = \text{pot. forskjell mellom } \vec{r} + d\vec{s} \text{ og } \vec{r}$$

Dermed :

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

Og siden $\vec{E} = \vec{F}/q_0$ og $V = U/q_0$: $\vec{F} = -\nabla U$

Tolkning av ∇V :



$$dV = \nabla V \cdot d\vec{s} = |\nabla V| \cdot |d\vec{s}| \cdot \cos \alpha$$

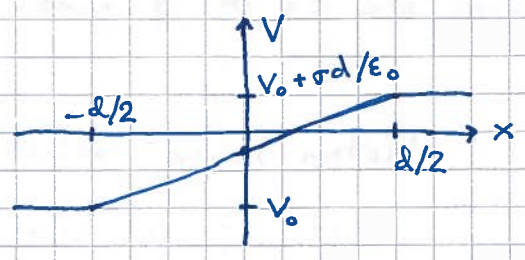
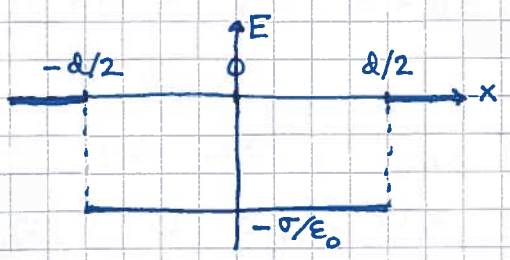
Dus: Max. pot.ending dV når forflytningen $d\vec{s}$ går i samme retning som ∇V ($\alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$)

Dus: ∇V er vektor i retning maksimalt økende V , med absoluttverdi lik endringen i V pr lengdeenhet, og lik den elektriske feltstyrken $|\vec{E}|$

Eks: Skisser $E(x)$ og $V(x)$ for to store metallplater i $x = \pm d/2$ med ladning $\pm \sigma$ pr flateenhet.

Løsn: Fra s.63 og s.69: $|\vec{E}| = \sigma/\epsilon_0$ mellom platene; $E=0$ utenfor
Retning fra pos. mot neg. ladet plate $\Rightarrow \vec{E}(x) = -\hat{x} \sigma/\epsilon_0$.

Siden $\vec{E} = -\nabla V$, må $V(x)$ her øke lineært fra $V(-d/2) = V_0$ til $V(d/2) = V_0 + \sigma d/\epsilon_0$, med konstant potensial utenfor platene.



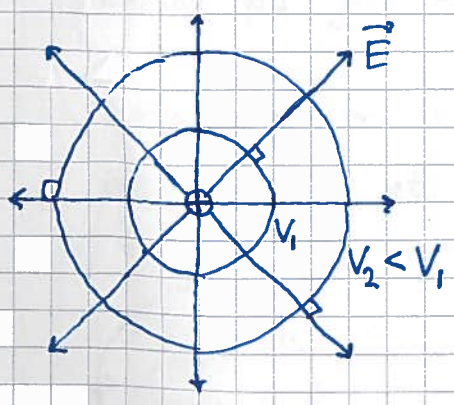
Ekvipotensialflater [YF 23.4; LHL 19.11]

...er flater i rommet (evt. kurver i 2D) med konstant V

Dvs: Med en forflytning $d\vec{s}$ på en ekvipotensialflate er $dV = 0$, dvs $\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$, dvs $\vec{E} \perp d\vec{s}$

$\Rightarrow \vec{E} \perp$ ekvipotensialflatene

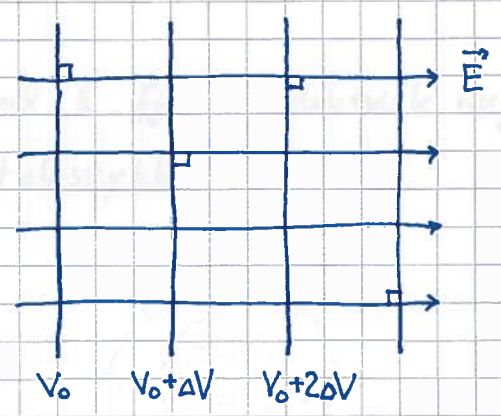
Eks 1: Punktladning



Radielt rettet \vec{E}

\Rightarrow Ekvipot.flatene er kuleskall

Eks 2: Uniformt \vec{E} -felt



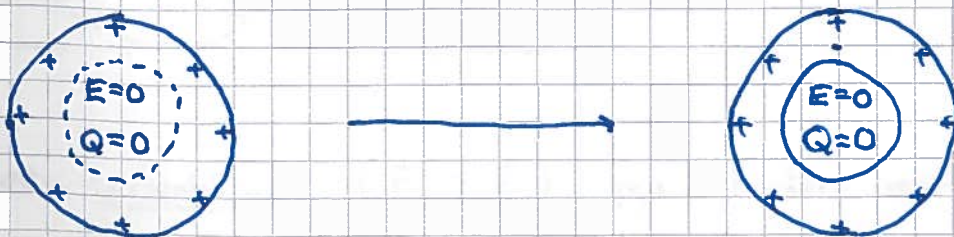
Ekvipot.flatene er plan $\perp \vec{E}$

Materialers elektriske egenskaper

Ledere (metaller) [YF 22.5 ; LHL 19.8]

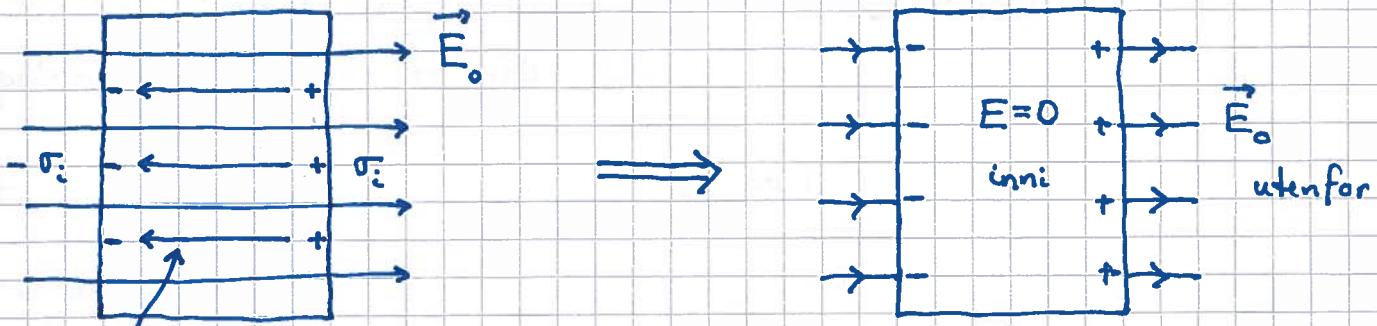
Metaller har frie (mobile) elektroner (1-2 pr atom) som vil bevege seg hvis de utsettes for krefter. Konsekvensen:

- $\vec{E} = 0$ inne i metall (i elektrostatisk likevekt)
[$\vec{E} \neq 0 \Rightarrow$ kraft $\vec{F} = q\vec{E}$ på fri ladning $q \Rightarrow$ har ikke likevekt]
- All netto ladning ligger på overflaten av et metall
[Skyldes at $F(r) \sim 1/r^2$; se "Gauss' lov"; ikke pensum]
- På metalloverflate: $\vec{E} \perp$ overflaten; $|\vec{E}| = \sigma/\epsilon_0$
[$E_{\parallel} \neq 0 \Rightarrow F_{\parallel} = qE_{\parallel} \neq 0 \Rightarrow$ ikke likevekt; $\sigma =$ overflateledning pr flateenhet]
- Metallbit i likevekt er et ekvipotensial
[Med $d\vec{s}$ i metallbiten er $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$, for inni er $E = 0$ og på overflaten er $\vec{E} \perp d\vec{s}$]
- Metall med hulrom har $E = 0$ i hulrommet og all netto-ladning på ytre overflate
[Bevis: Lager hulrommet ved å fjerne elektrisk nøytral bit inne i et kompakt metallstykke:



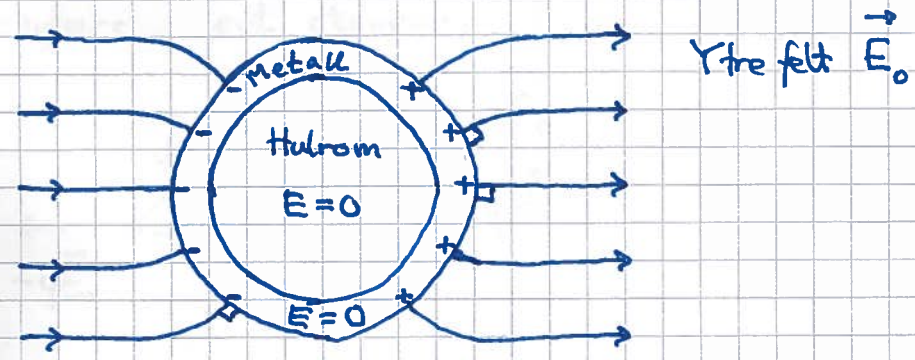
fordi ingenting har skjedd fra et elektrostatisk synspunkt!]

Metall i ytre felt \vec{E}_0 :

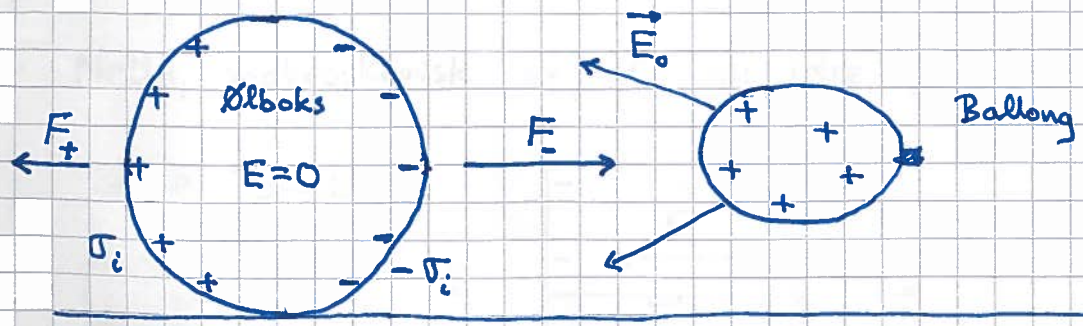


Indusert felt, $\vec{E}_i = -\vec{E}_0$, inni metallet pga induert overflate-
 ladning $\pm \sigma_i$, slik at $E=0$ inni metallet i likevekt.

Elektrostatisk skjerming (Faradaybur) :



Eks : Metallboks i inhomogent ytre felt

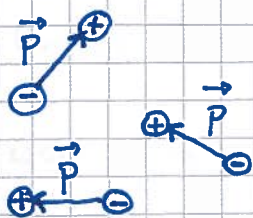


Netto tiltrekking ($F_- > F_+$) pga kortere avstand
 mellom ballongen og den negative induerte ladningen $-\sigma_i$

Dielektrika (isolatorer) [YF 24.4+5 ; LHL 20.5]

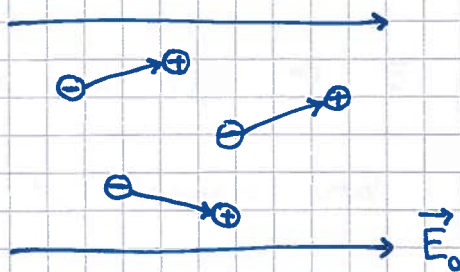
Har ikke frie ladninger, men har bundet ladning som polariseres i et ytre felt \vec{E}_0 :

$\vec{E}_0 = 0$:



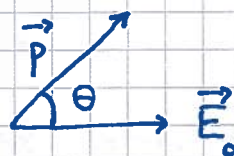
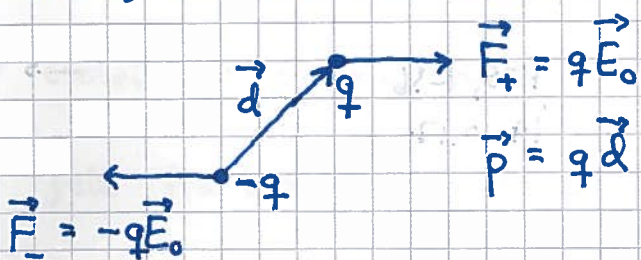
$\sum_i \vec{p}_i \approx 0$

$\vec{E}_0 \neq 0$:



$\sum_i \vec{p}_i \neq 0$

Molekylære (evt. atomære) dipoler rettes inn langs det ytre feltet \vec{E}_0 :

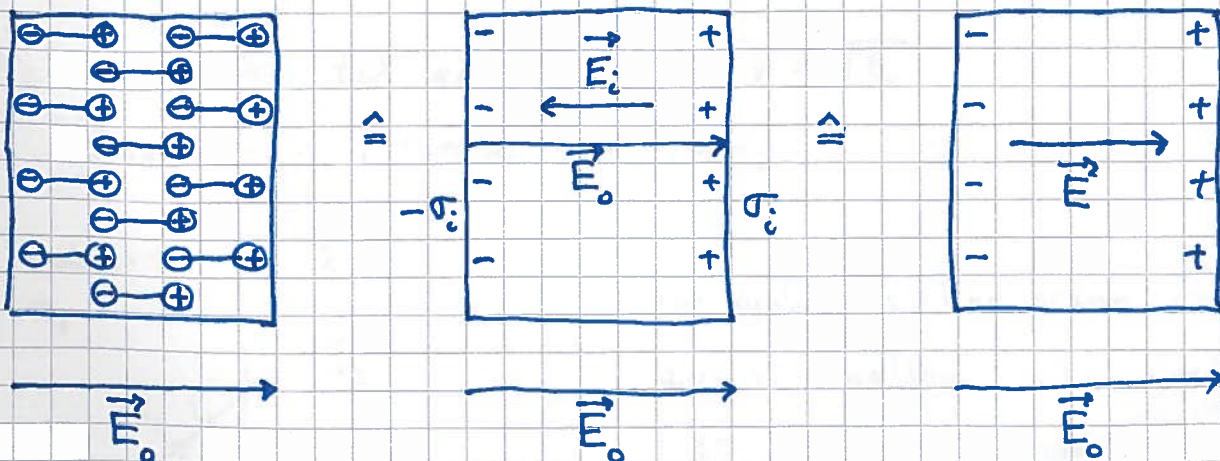


Ytre dreiemoment på dipolen :

$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \dots \text{ se øving 9, oppg 3} \dots = \vec{p} \times \vec{E}_0$

$|\vec{\tau}| = p E_0 \sin \theta$

Netto, makroskopisk effekt av ytre felt \vec{E}_0 :



- null netto ladning inni ; industert ladning pr flateenhet $\pm \sigma_i$ på overflaten
- industert felt \vec{E}_i inni ; svekket totalt felt inni :
 $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$; $|\vec{E}| = |\vec{E}_0| - |\vec{E}_i|$; $E_i = \sigma_i / \epsilon_0$
- linear respons: E_i proporsjonal med $E_0 \Rightarrow E$ prop. med E_0

isolatorens relative permittivitet ϵ_r defineres ved

$E = \frac{1}{\epsilon_r} E_0$

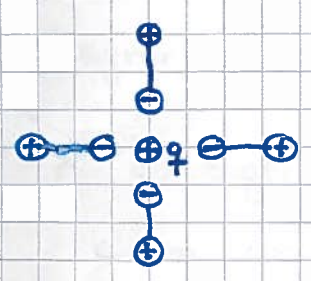
(enhet: $[\epsilon_r] = 1$)

tallverdier :

ϵ_r	Vakuum	Tørr luft	Plast	Rent vann	Perfekt metall
	1	1,00054	2-6	80	∞

isolatorens permittivitet : $E = \epsilon_r \cdot E_0$

felt fra ladning q inni isolator med perm. ϵ :

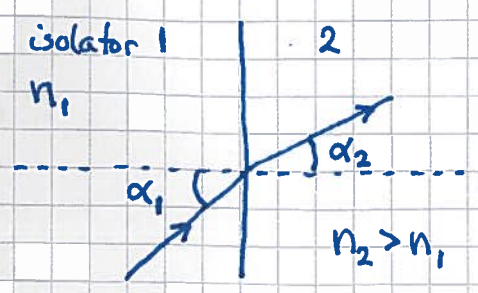


Polarisering av mediet svekker feltet med faktoren $1/\epsilon_r$:

$$E(r) = E_{vac}(r) / \epsilon_r = q / 4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2 = \underline{q / 4\pi \epsilon r^2}$$

lyshastigheten : $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s i vakuum (eksakt 299 792 458 m/s)
 $v = c / \sqrt{\epsilon_r} < c$ i en isolator

brytningsindeks til en isolator : $n = \sqrt{\epsilon_r}$
 Snells lov : $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$



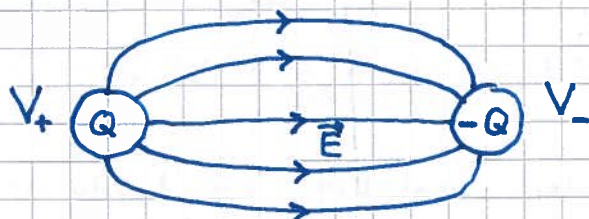
For synlig lys har vann verdier av n mellom 1.33 (rødt) og 1.35 (blått). Resulterer i f.eks. regnbuen!

Kondensator og kapasitans [YF 24 ; LHL 20]

76

(capacitor) (capacitance)

= to ledere, adskilt med isolerende materiale (luft, plast, ...)



$$V = V_+ - V_- = - \int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \text{er prop. med } Q$$

(fordi \vec{E} er prop. med Q , pga Coulombs lov)

Kondensatorens kapasitans er :

$$C \stackrel{\text{def}}{=} Q/V$$

- Enhet: $[C] = C/V = F$ (farad)
- Kretssymbol:
- Lagrer ladning og energi
- C afhænger af utforming (geometri) og type isolator mellem de to ledere
- Beregner C typisk slik:

Anta ladning $\pm Q$ på de to ledere

Regn ut V

Da er $C = Q/V$

Eks 1: Beregn C for luftfylt platekondensator med $d = 1.0 \text{ mm}$ og $A = 314 \text{ cm}^2$.

Løsn: $E = \sigma/\epsilon_0 = Q/A\epsilon_0$ mellom platen (når ldn. er $\pm Q$)
 $\Rightarrow V = Ed = Qd/A\epsilon_0 = \text{pot. forskjellen mellom platen}$
 $\Rightarrow C = Q/V = \underline{\underline{\epsilon_0 A/d}} = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 314 \cdot 10^{-4} / 10^{-3} = \underline{\underline{2.8 \cdot 10^{-10} \text{ F}}}$

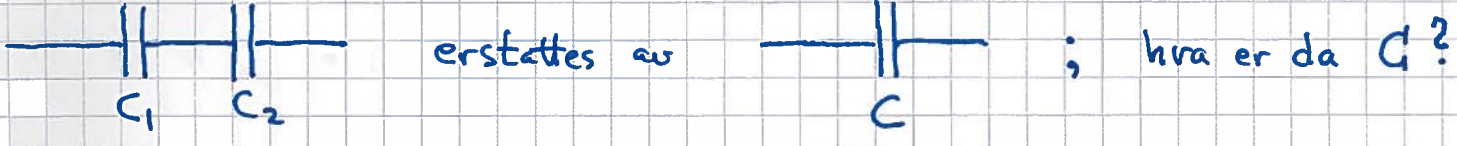
Eks 2: Som eks. 1, men fylt med dielektrikum med $\epsilon_r = 5.5$.

Løsn: $E = \sigma/\epsilon = \sigma/\epsilon_r \epsilon_0 = Q/A\epsilon_r \epsilon_0 \Rightarrow V = Qd/A\epsilon_r \epsilon_0$
 $\Rightarrow C = Q/V = \underline{\underline{\epsilon_r \epsilon_0 A/d}} = 5.5 \cdot 2.78 \cdot 10^{-10} \text{ F} = \underline{\underline{1.5 \text{ nF}}}$

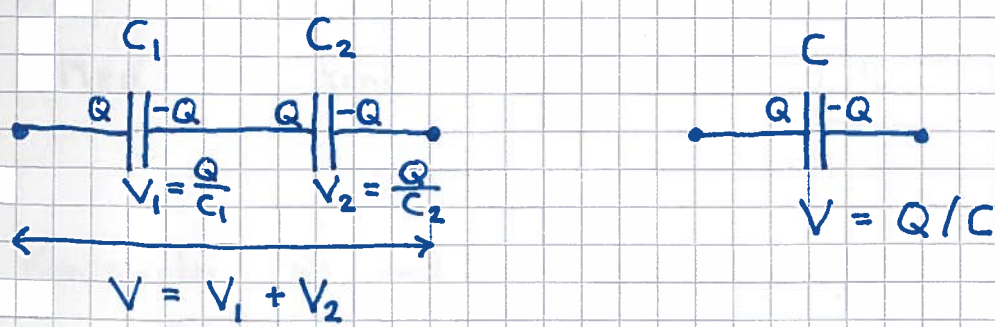
Vi ser at ~~ϵ_0~~ $[\epsilon_0] = [\epsilon] = [C \cdot d/A] = \underline{\underline{F/m}}$

Kobling av flere kapasitanser [YF 24.2; LHL 20.2]

Seniekobling:



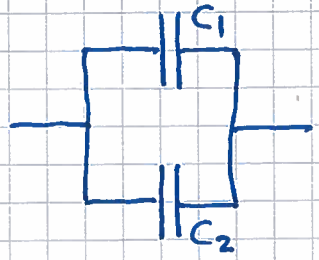
Har lik ladning $\pm Q$ på C_1 og C_2 :




$\Rightarrow \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$

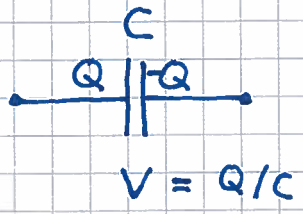
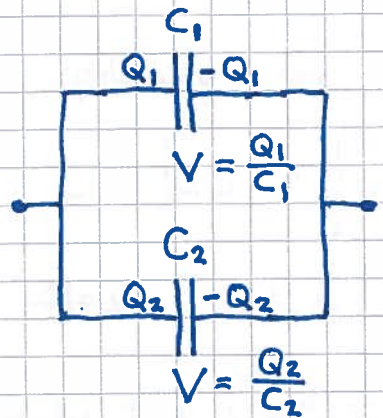
Med N kond. i serie: $\boxed{C^{-1} = \sum_{j=1}^N C_j^{-1}}$

Parallellkobling:



erstattes av  ; hva er da C?

Har lik potensialforskjell (spenning) V mellom platene i de to kondensatorene 1 og 2:

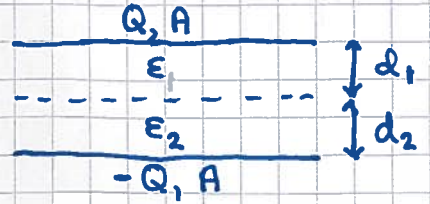


$$Q_1 + Q_2 = Q$$

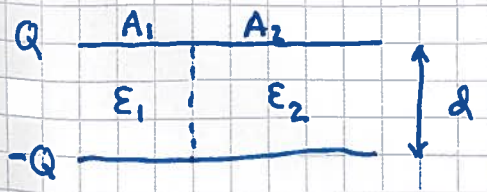
$$\Rightarrow C_1 V + C_2 V = C V \Rightarrow \boxed{C = C_1 + C_2}$$

Med N kond. i parallell: $\boxed{C = \sum_{j=1}^N C_j}$

Kondensator fylt med ulike dielektrika er essensielt som kobling av flere:



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\epsilon_1 A} + \frac{d_2}{\epsilon_2 A} \quad (\text{Serie})$$

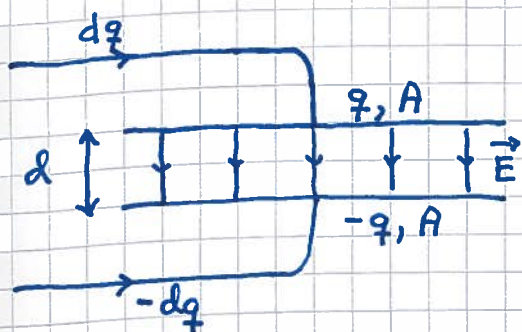


$$C = C_1 + C_2 = \epsilon_1 A_1 / d + \epsilon_2 A_2 / d \quad (\text{Parallell})$$

Energi i et elektrisk felt [YF 24.3; LHL 20.4]

(79)

Opplading av kondensator krever at det gjøres et arbeid W
 \Rightarrow Potensiell energi $U = W$ lagret i \vec{E} -feltet (mellom platene).



Økt ladning fra $\pm q$ til $\pm (q+dq)$
gir økt pot. energi:

$$dU = v(q) dq = \frac{q}{C} dq$$

\Rightarrow Opplading fra $q=0$ til $q=Q$ gir pot. energi:

$$U = \int dU = \int_0^Q q dq / C = Q^2 / 2C = (CV)^2 / 2C = \frac{1}{2} CV^2$$

Med $C = \epsilon_0 A / d$ og $V = Ed$ fås

$$U = \frac{1}{2} \cdot (\epsilon_0 A / d) \cdot (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot (Ad)$$

Her er $A \cdot d =$ volum mellom platene, der $E \neq 0$

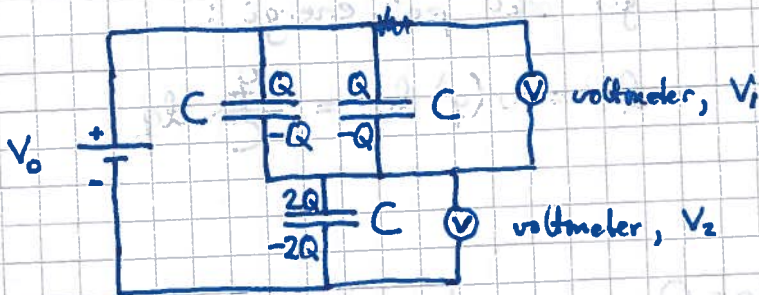
Dermed:

Energi pr volumenhet i et elektrisk felt er

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

(som gjelder generelt)

Innlede med demo som viser
både serie- og parallellkobling
av kondensatorer:

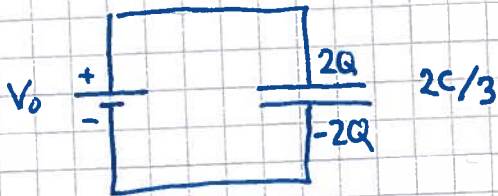


$$\left. \begin{aligned} V_1 &= Q/C, & V_2 &= 2Q/C = 2V_1 \\ V_0 &= V_1 + V_2 = 3V_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_1 = \frac{V_0}{3}, \quad V_2 = \frac{2V_0}{3}$$

Total kapasitans: $\left\{ \frac{1}{C} + \frac{1}{C+C} \right\}^{-1} = \left\{ \frac{3}{2C} \right\}^{-1} = \underline{\underline{\frac{2}{3}C}}$

Total ladning: $2Q = V_0 \cdot \frac{2}{3}C$
(ders $Q = V_0 C / 3$)

Ekvivalent krets:



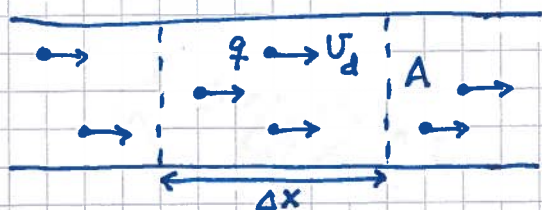
Elektrisk strøm

[YF 25, 26 ; LHL 21, 22]

80

Strøm og strømteethet

[YF 25.1 ; LHL 21.1]



Leder med n frie ledninger pr volumenet, med midlere driftshastighet v_d langs lederen.
(Nettoladning lik null.)

strøm $\stackrel{\text{def}}{=}$ mengde ladning som passerer tverrsnitt av lederen pr tidsenhet

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dQ}{dt} ; [I] = \frac{C}{s} = A \text{ (ampere)}$$

All fri ladning, $\Delta Q = q \cdot \Delta N = q \cdot n \cdot \Delta V$, i volumet $\Delta V = A \cdot \Delta x$ passerer tverrsnittet med areal A i løpet av $\Delta t = \Delta x / v_d$

$$\Rightarrow I = \frac{qn \Delta x A}{\Delta x / v_d} = nq v_d A$$

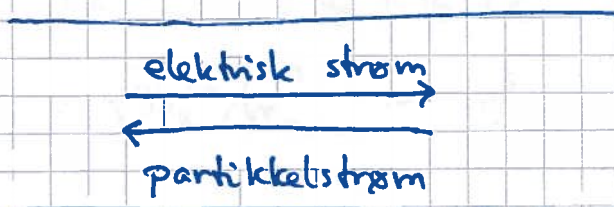
strømteethet $\stackrel{\text{def}}{=}$ strøm pr flateenhet

$$j = I/A ; [j] = A/m^2$$

$$\Rightarrow j = nq v_d ; \text{ evt. } \boxed{\vec{j} = nq \vec{v}_d}$$

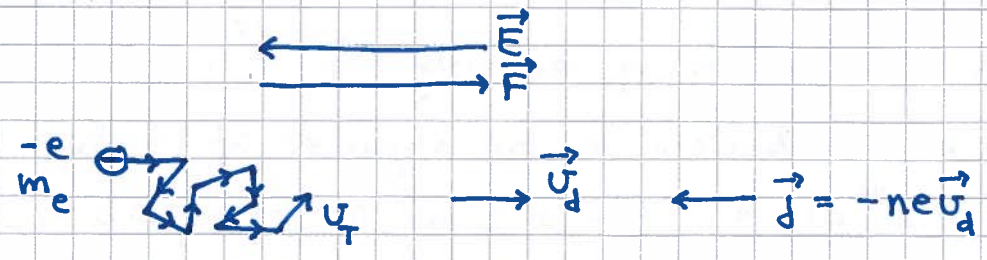
I metall : $q = -e$ (elektroner)

$$\Rightarrow j = -nev_d$$



Ohms lov [YF 25.2, 25.6 ; LHL 21.2, 21.4]

Felt \vec{E} gir kraft $\vec{F} = -e\vec{E}$ som driver frie elektroner gjennom metallet:



d = midlere avstand mellom kollisjoner (midlere fri vei) lengde

$\tau = d/v_T$ = midlere tid

v_T = midlere elektronhastighet ved temperatur T

$\vec{v}_d \approx \vec{a} \cdot \tau = -\frac{e\vec{E}}{m_e} \cdot \tau$ = midlere driftshastighet

$\Rightarrow \boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}}$ Ohms lov

der $\sigma = ne^2\tau/m_e$ er materialets konduktivitet (elektrisk ledningsevne)

(Paul Drude, ca 1900)

Tallverdiestimer:

Ved absolutt temperatur T bidrar hvert kvadratiske ledd i "energifunksjonen" med $\frac{1}{2}k_B T$, der $k_B \approx 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K er Boltzmanns konstant.

$[R = k_B \cdot N_A \approx 8.314 \frac{J}{mol \cdot K} = \text{gasskonstanten}]$

$N_A \approx 6.022 \cdot 10^{23}$ pr mol = Avogadros konstant

For elektroner i tre dimensjoner:

$\langle K \rangle = \langle \frac{1}{2} m_e (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \rangle = \frac{1}{2} m_e v_T^2 = \frac{3}{2} k_B T$

$\Rightarrow v_T = \sqrt{3k_B T / m_e} \sim 10^5$ m/s ved $T = 300$ K (romtemp.)

Hva med v_d , i f. eks kobber?

$m_{Cu} \approx 63 \text{ g/mol}$; massefylteteten er 8.96 g/cm^3

$\Rightarrow n \approx 8.5 \cdot 10^{28}$ frie elektroner pr m^3 (1 fritt elektron pr atom)

Anta midlere fri veilengde ca lik avstand mellom atomene

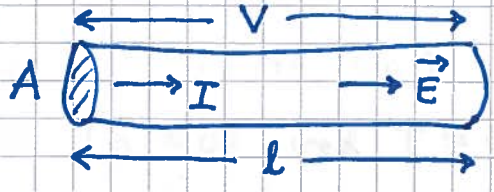
$\Rightarrow \tau = d/v_T \sim 10^{-9} \text{ m} / 10^5 \text{ m/s} = 10^{-14} \text{ s}$

$\Rightarrow v_d = e\tau E/m_e \sim 10^{-6} \text{ m/s}$

(hvis $E \sim 1 \text{ mV/m}$; realistisk i Cu-ledning i elektrisk krets)

$\vec{j} = \sigma \vec{E}$ er Ohms lov på "mikroskopisk form";

$V = R \cdot I$ "makroskopisk form":



$V = E \cdot l$; $j = \frac{I}{A} = \sigma E$

$\Rightarrow I = \sigma A V/l \Rightarrow V = \frac{l}{\sigma A} I = RI$

dvs: Lederens motstand (resistans) er: $R = \frac{l}{\sigma A}$

Konduktans G: $I = G \cdot V \Rightarrow G = \sigma A/l = 1/R$

Resistivit t ρ : $\rho = 1/\sigma$

Enheter: $[R] = V/A = \Omega$ (ohm); $[G] = 1/\Omega = S$ (siemens)

$[\rho] = \Omega \cdot m$; $[\sigma] = \Omega^{-1} \cdot m^{-1} = S/m$

Mens σ og ρ er materialegenskaper, er G og R også avhengige av lederens utforming (tverrsnitt A og lengde l).



Vi bruker denne!

Resistivitet og temperatur [YF 25.2; LHL 21.2, 21.5] (83)

Drudemodellen: $\rho = m_e / ne^2 \tau$, dvs $\rho \sim 1/n\tau$

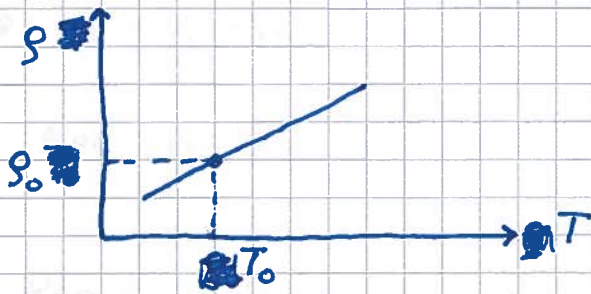
Metaller: Stor n , som avhenger lite av T . Men økt T gir hyppigere kollisjoner, dvs redusert τ , dvs større ρ .

Ekspérimentelt:

$$\rho(T) = \rho_0 \{1 + \alpha(T - T_0)\}$$

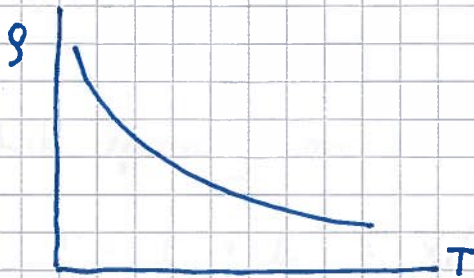
$$\alpha_{Al} \approx \alpha_{Cu} \approx \alpha_{Ag} \approx 0.004 \text{ K}^{-1}$$

$$[T] = \text{K (kelvin)}$$



Halvledere: Si, Ge, GaAs,

Isolator ($n \approx 0$) ved $T \approx 0$. Økt T gir sterk økning i n , dvs ρ avtar med økende T .

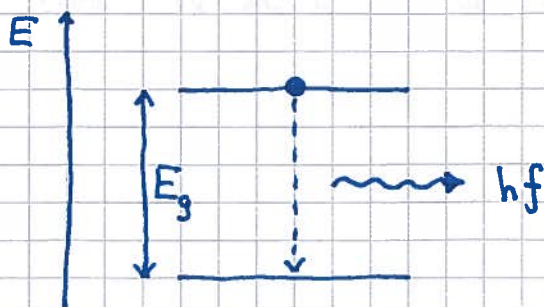


Kreves en minsteenergi E_g (båndgapet) for å frigjøre et elektron fra "moderatomet".

Eks:

	Si	GaAs	GaN	AlGaAs	InGaN
E_g (eV)	1.12	1.43	3.44	1.4-2.2	2-3.4

NP 2014!



Frigjort elektron som "fanges inn" av et atom gir utsendt foton med energi $hf \geq E_g$, dvs $\lambda \approx hc/E_g$.

AlGaAs: 560-870 nm (rødt-gult)

InGaN: 360-620 nm (blått-gult)

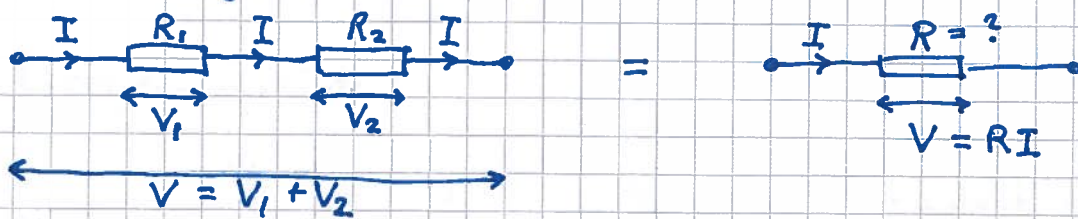
$h =$ Plancks konstant
 $\approx 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$

\Rightarrow Hvide LED-pærer!

Kobling av flere motstander [YF 26.1; LHL 21.3]

84

Seniekobling:

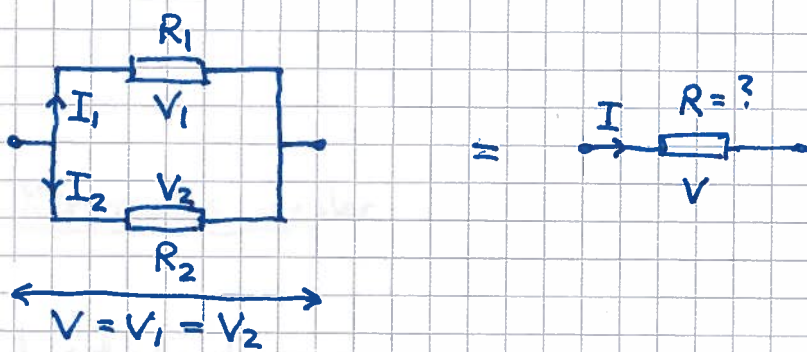


Lik strøm I gjennom R_1 og R_2

$$\Rightarrow V = V_1 + V_2 = R_1 I + R_2 I = RI \quad \Rightarrow \boxed{R = R_1 + R_2}$$

Med N stk i serie: $R = \sum_{j=1}^N R_j$

Parallellkobling:



Lik spenning over R_1 og R_2

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = V/R_1 + V/R_2 = V/R$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

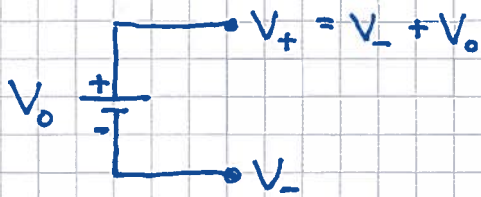
Med N stk i parallell: $R^{-1} = \sum_{j=1}^N R_j^{-1}$

Likestrømkretser [YF 26 (25); LHL 22]

85

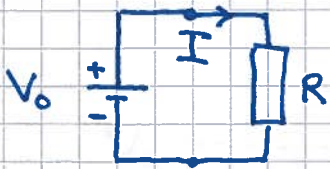
(DC = direct current = likestrøm)

Likespenningskilde :



Sørger for konstant spenning
(potensialforskjell) V_0 mellom polene.
Eks: Kjemisk batteri, solcelle

Kobles til f.eks. en motstand R og gir lukket krets og strøm :



$$\text{Ohms lov} \Rightarrow I = V_0 / R$$

Kirchhoffs regler [YF 26.2; LHL 22.3]

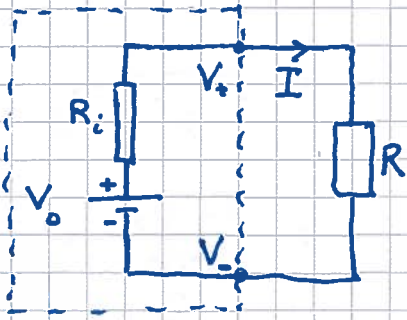
Ladningsbevarelse \Rightarrow

$$\sum_j I_j = 0 \quad \text{i alle knutepunkt i en elektrisk krets} \quad (K1)$$

Energi bevarelse \Rightarrow

$$\sum \text{potensialendringer} = 0 \quad \text{rundt alle sløyfer i en elektrisk krets} \quad (K2)$$

Reell spenningskilde har indre motstand R_i :



$$K2: V_0 - R_i I - RI = 0$$

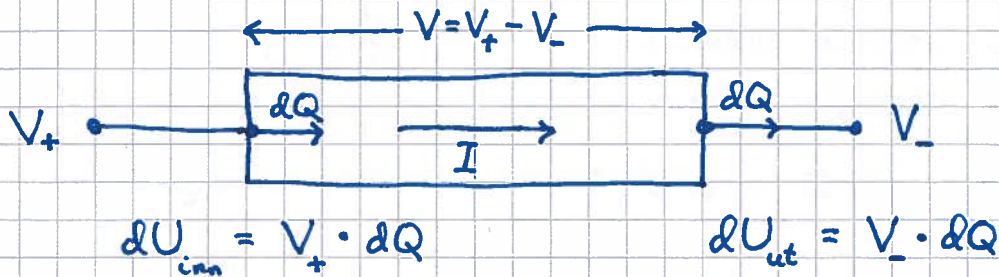
$$\Rightarrow I = V_0 / (R_i + R)$$

Spenningen over R (den ytre kretsen) er

$$V_+ - V_- = V_0 - R_i I < V_0 \quad \text{når } I > 0$$

Elektrisk effekt

[YF 25.5 ; LHL 22.2]



Effekttap i lederbiten (elektrisk energi omdannes til varmeenergi pga kollisjoner i lederbiten) :

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{dU_{inn} - dU_{ut}}{dt} = \frac{V_+ dQ - V_- dQ}{dt} = V \cdot \frac{dQ}{dt} = \underline{\underline{V \cdot I}}$$

Hvis lederen er en ohmsk motstand :

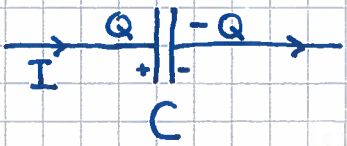
$$V = R \cdot I \quad \Rightarrow \quad P = RI^2 = V^2/R$$

RC-krets

[YF 26.4 ; LHL 22.4]



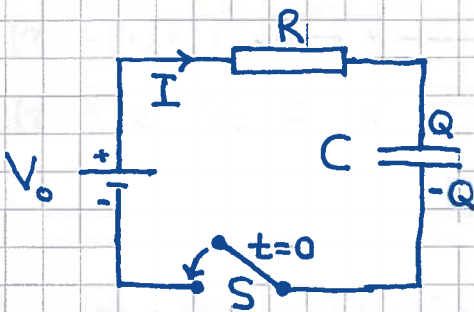
$$V = RI$$



$$V = \frac{Q}{C} ; I = \frac{dQ}{dt}$$

(Tips: Velg positiv strømretning inn på platte med ladning Q ; da er $I = dQ/dt$)

Opplading av kondensator i RC-krets:



- Inntil $t=0$: $Q=0$, $I=0$
- Lukker kretsen ved $t=0$ med bryteren S ("switch")
- Bestem $Q(t)$ og $I(t)$

$$K2 : V_0 - RI - \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow -RC \frac{dQ}{dt} = Q - V_0 C$$

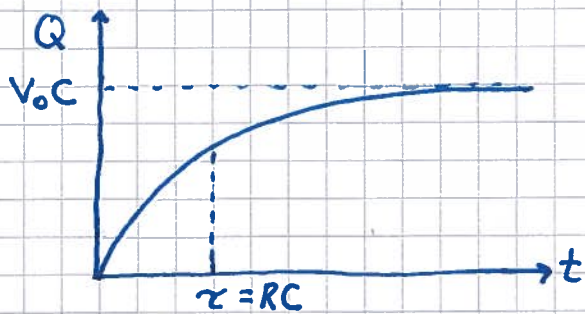
$$\Rightarrow \int_0^Q \frac{dQ}{Q - V_0 C} = - \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow \ln \left\{ \frac{Q - V_0 C}{-V_0 C} \right\} = - \frac{t}{RC}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Q(t) = V_0 C \{ 1 - e^{-t/RC} \}}}$$

og dermed

$$\underline{\underline{I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}}}$$



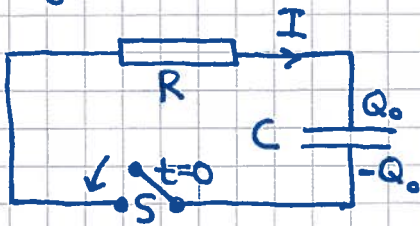
Produktet av R og C er kretsens tidskonstant : $\tau = RC$

Angir en "typisk tid" for opplading (og utlading) av kondensatoren i en RC -krets.

$$Q(\tau) = V_0 C (1 - e^{-1}) \approx 0.63 V_0 C \quad ; \quad Q(3\tau) = V_0 C (1 - e^{-3}) \approx 0.95 V_0 C$$

$$I(\tau) = e^{-1} V_0 / R \approx 0.37 V_0 / R \quad ; \quad I(3\tau) = e^{-3} V_0 / R \approx 0.05 V_0 / R$$

Utlading av kondensatoren :

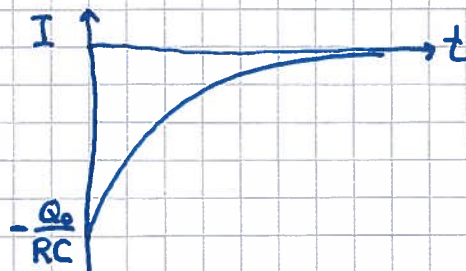
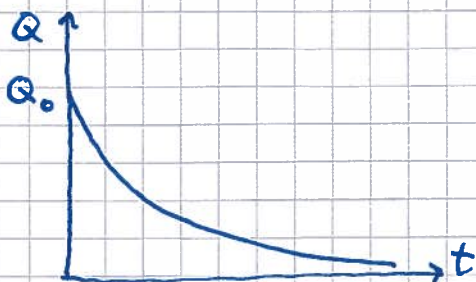


- Inntil $t=0$: $Q=Q_0$, $I=0$
- Kretsen lukkes ved $t=0$
- Bestem $Q(t)$ og $I(t)$

$$K2: -Q/C - R dQ/dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{Q_0}^Q \frac{dQ}{Q} = - \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-t/RC} \quad ; \quad I(t) = - \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

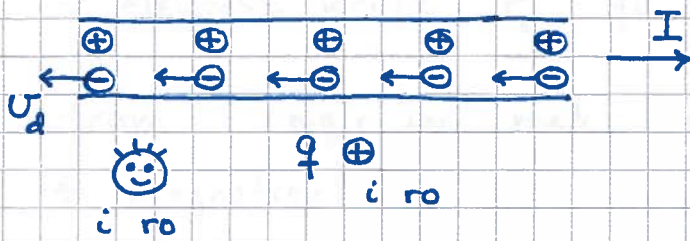


Anvendelser : Blinklys, Pacemaker, Blitz, ...

Magnetostatikk [YF 27, 28 ; LHL 23]

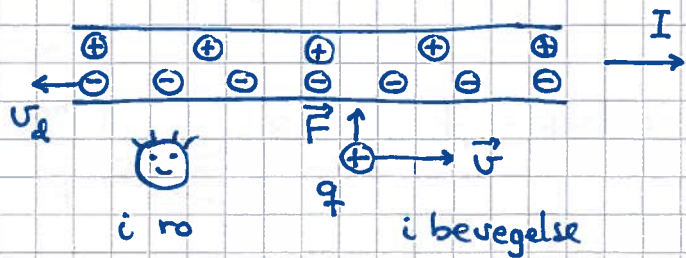
(89)

Einsteins relativitetsteori nødvendiggjør magnetiske krefter:



q i ro "ser" nøytral strømforende leder

$$\Rightarrow F = 0$$



q i bevegelse ser negativt ladet leder, fordi \ominus (elektronene) har større relativ hastighet enn \oplus (atomkjernene): $u_- \approx U + U_d$, $u_+ = U$; dermed størst lengdereduksjon for avstanden mellom \ominus

Einstein: Lysfarten er c i alle inertialsystem. En av konsekvensene er såkalt lengdekontraksjon,
$$\Delta x_- = \Delta x_0 \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

Konklusjon: q påvirkes av elektrisk kraft \vec{F}

Men vi er i ro relativt lederen, som for oss er nøytral, så vi måler ingen elektrisk kraft på q .

Vi måler derimot en magnetisk kraft \vec{F}_m , som uttrykkes via et magnetfelt \vec{B} .

Magnetfeltet \vec{B} skapes av strømmen I .

Magnetisk kraft

[YF 27.2; LHL 23.4]

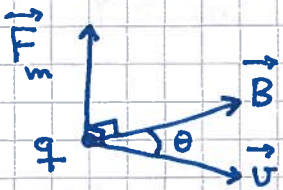
(90)

Ladning omgir seg med elektrisk felt \vec{E}

\Rightarrow elektrisk kraft $\vec{F}_e = q\vec{E}$ på (en annen) ladning q

Strøm omgir seg med magnetfelt \vec{B}

\Rightarrow magnetisk kraft $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ på ladning q
i bevegelse med hastighet \vec{v}



$$F_m = qvB \sin\theta; \quad \vec{F}_m \perp \vec{B}; \quad \vec{F}_m \perp \vec{v}$$

Enhet: $[B] = \frac{N}{C \cdot m/s} = \frac{N}{A \cdot m} = T$ (tesla)

Generelt, med både \vec{E} og \vec{B} til stede:

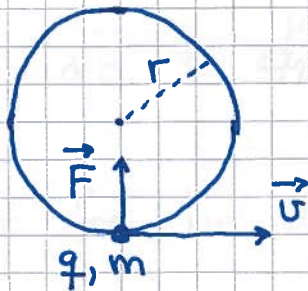
$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Lorentzkraften

Ladning i uniformt magnetfelt

[YF 27.4; LHL 23.1, 23.4]

$\vec{B} \otimes$



Notasjon: \otimes inn i planet

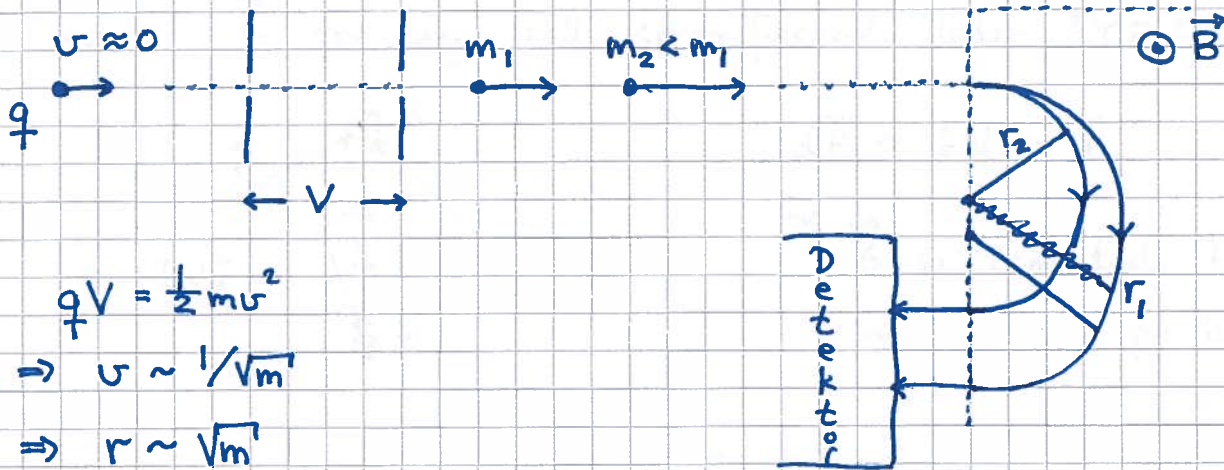
\odot ut av planet

Anta $\vec{v} \perp \vec{B}$ slik at $F = qvB$

Siden $\vec{F} \perp \vec{v}$, er tilført effekt alltid $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$, dvs magnetisk \vec{F} gjør aldri noe arbeid!

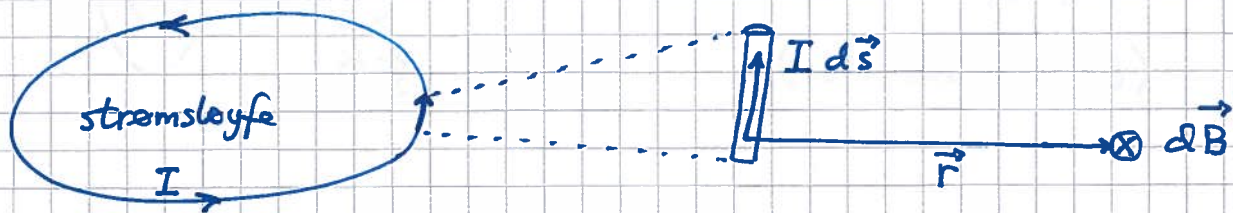
$\Rightarrow K = \frac{1}{2}mv^2$ er konstant \Rightarrow vi får uniform sirkelbevegelse

$$N2: qvB = mv^2/r \Rightarrow r = mv/qB \Rightarrow \boxed{\omega_c = v/r = qB/m} = \text{syklotronfrekvensen}$$



Biot-Savarts lov [YF 28.2; LHL 23.5]

Magnetismens analogi til Coulombs lov



Magnetfelt $d\vec{B}$ fra lederbit med lengde og retning gitt ved $d\vec{s}$, og strøm I , i avstand \vec{r} fra lederbiten:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \quad \left(\text{jf. Coulombs lov, } d\vec{E} = dq \hat{r} / 4\pi\epsilon_0 r^2 \right)$$

\Rightarrow Feldet fra hele den lukkede strømsløyfa:

$$\vec{B} = \oint d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \quad \text{Biot-Savarts lov (1820)}$$

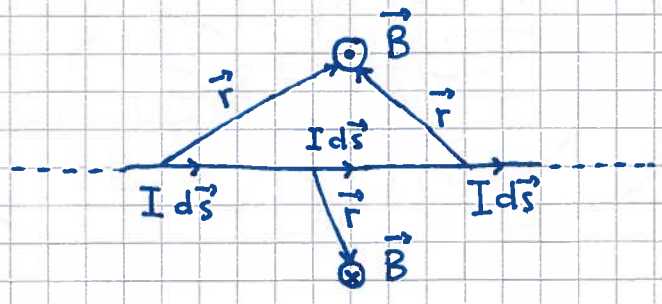
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A} = \text{vakuumpermeabiliteten (eksakt)}$

$c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \text{hastigheten til e.m. bølger i vakuum}$
 $= 299\,792\,458 \text{ m/s (eksakt)}$

$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2 \text{ (eksakt)}$

Eksempler, uten matematiske detaljer :

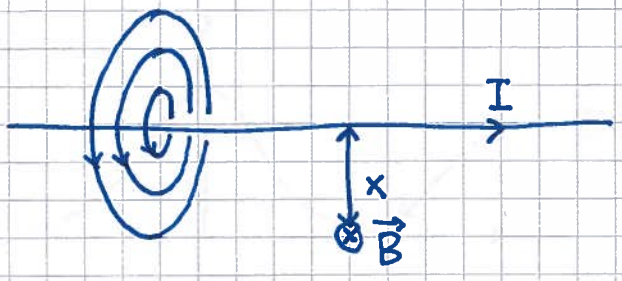
Eks 1: \vec{B} fra lang, rett strømførende leder [YF 28.3; LHL 23.5]



$$d\vec{B} \sim I d\vec{s} \times \vec{r}$$

$\Rightarrow \vec{B}$ er tangentiell til sirkel med sentrum på ledere

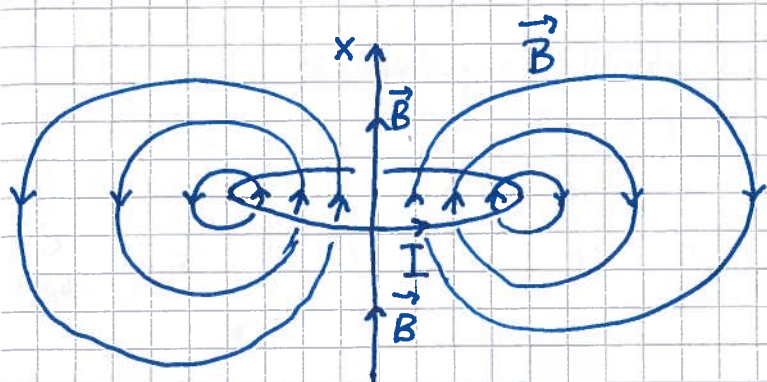
\Rightarrow Feltlinjer for \vec{B} (linjer $\parallel \vec{B}$; linjetetthet prop. med $|\vec{B}|$) blir sirkler med sentrum på ledere



Biot-Savart gir $B(x) = \mu_0 I / 2\pi x$ (se notat s 127B)

- Høyrehandsregel (nr 2?!): Tommel langs I, resterende fingre krummer langs \vec{B}
- Merk at feltlinjer for \vec{B} alltid er lukkede. (Har ikke "magnetiske ledninger".)

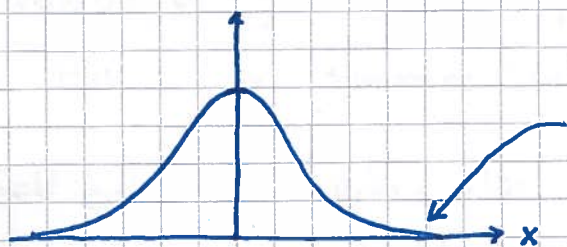
Eks 2: \vec{B} fra sirkulær strømsløyfe [YF 28.5; LHL 23.6]



- Strømsløyfe i yz -planet, strøm I , radius R
- Near ledaren må \vec{B} bli omdrent som for lang rett leder
- På x -aksen er $\vec{B} \parallel \hat{x}$ pga symmetri

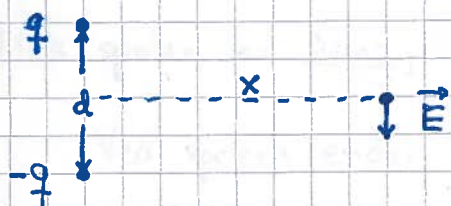
Biot-Savart gir [se s 128B]

$$B(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad \text{på sløyfas akse (her } x\text{-aksen)}$$



$$B(x) \stackrel{x \gg R}{\approx} \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3} \sim \frac{1}{x^3}$$

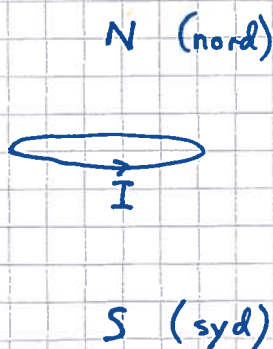
Fra før, elektrisk felt i stor avstand fra elektrisk dipol: (s. 62)



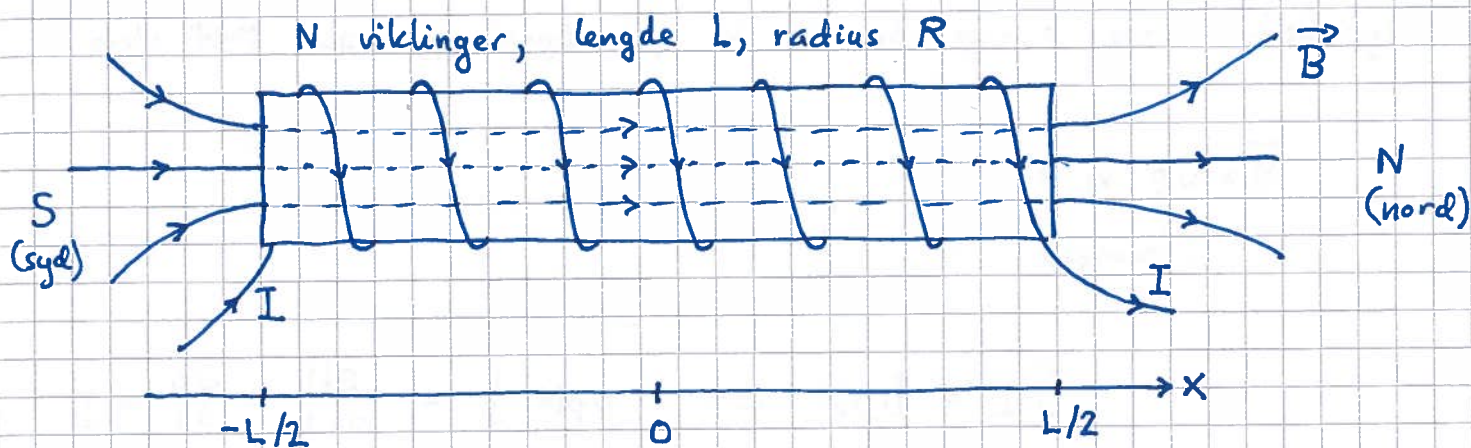
$$E(x) = \frac{q d}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + d^2/4)^{3/2}}$$

$$\stackrel{x \gg d}{=} \frac{q d}{4\pi\epsilon_0 x^3} \sim \frac{1}{x^3}$$

Den sirkulære strømsløyfa er en magnetisk dipol:



Eks 3: \vec{B} fra strømførende spole [YF 28.7; LHL 23.6]



Anta tettliggende viklinger $\Rightarrow \vec{B}$ blir omtrent som for N sirkulære strømsløyfer jevnt fordelt på lengden $L \Rightarrow$ Kan bruke resultatet i Eks 2 og summere (integreere) opp; se notat s 129 B, C, D.

Feltstyrken på spolens akse blir:

$$B(x) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left\{ \frac{L/2 - x}{\sqrt{(L/2 - x)^2 + R^2}} + \frac{L/2 + x}{\sqrt{(L/2 + x)^2 + R^2}} \right\}$$

der $n = N/L =$ antall viklinger pr lengdeenhet

Hvis spolen er lang, dvs hvis $L/2 \gg R$:

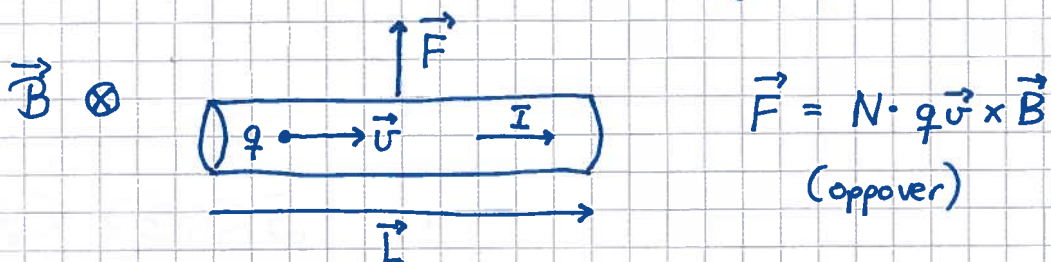
- Ved spolens ender, $x = \pm L/2$: $B \approx \frac{1}{2} \mu_0 n I$
- Inni spolen (overalt!), $|x| \ll L/2$: $B \approx \mu_0 n I$
- Utenfr spolen: $B \approx 0$

Magnetisk kraft på strøm

[YF 27.6 ; LHL 23.2]

(95)

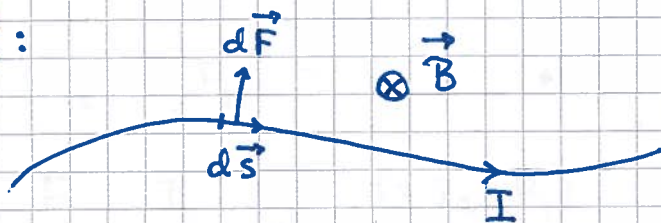
Først: Rett lederbit, lengde L , N frie ladninger q med driftshastighet u :



$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Nq}{L/u} = \frac{1}{L} Nqu \Rightarrow Nqu = I L$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}}$$

Generelt :



$$d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B}$$

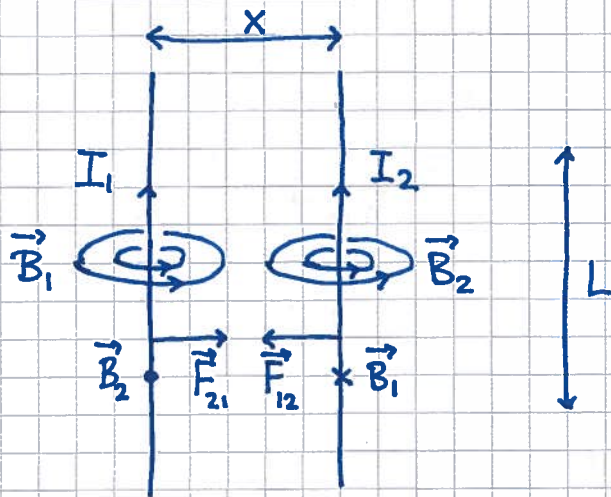
↓

$$\boxed{\vec{F} = I \int d\vec{s} \times \vec{B}}$$

Total kraft på ledere

Eks 1: Kraft mellom parallelle strømmer [YF 28.4; LHL 23.5]

96



Innbyrdes kraft på lengde L :

$$F_{12} = F_{21} = F \quad (\text{N})$$

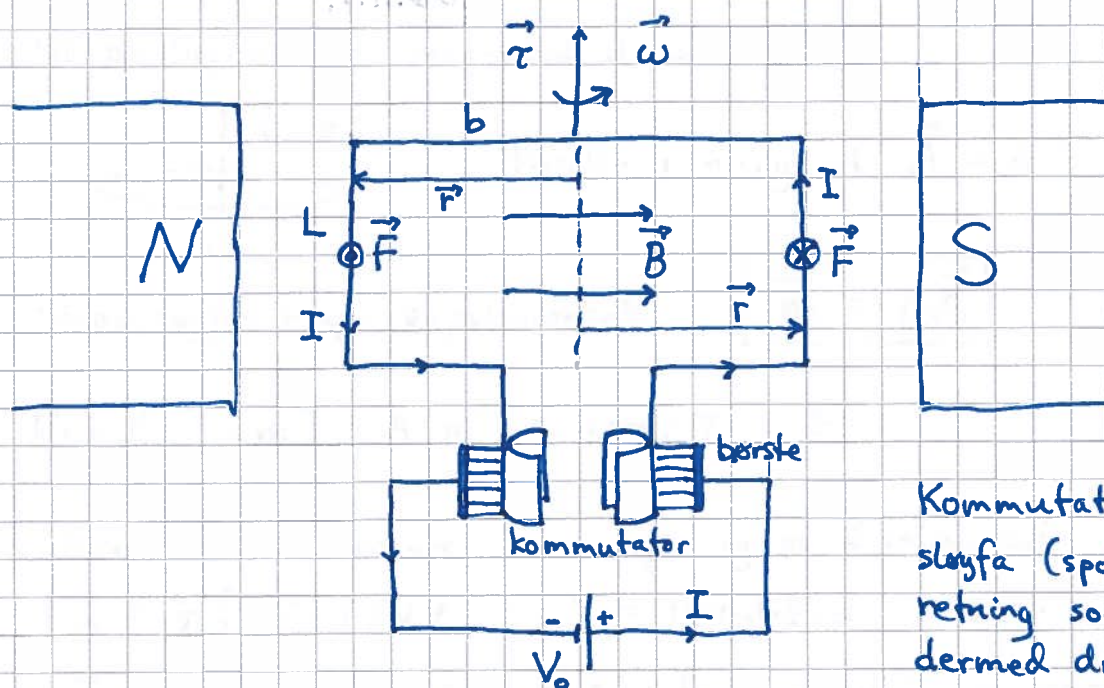
$$F = I_1 L B_2 \quad (= I_2 L B_1) = I_1 L \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x}$$

$$\text{Kraft pr lengdeenhet: } f = F/L = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}$$

$I_1 \parallel I_2 \Rightarrow$ Tiltrekning

$I_1 \parallel -I_2 \Rightarrow$ Frastøtning

Hvis $x = L = 1\text{ m}$ og $I_1 = I_2 = 1\text{ A}$ blir $F = 2 \cdot 10^{-7}\text{ N}$.



Kommutatoren roterer med sløyfa (spolen) og gir strømretning som i figuren, og dermed dreiemoment $\vec{\tau}$ i samme retning hele tiden.

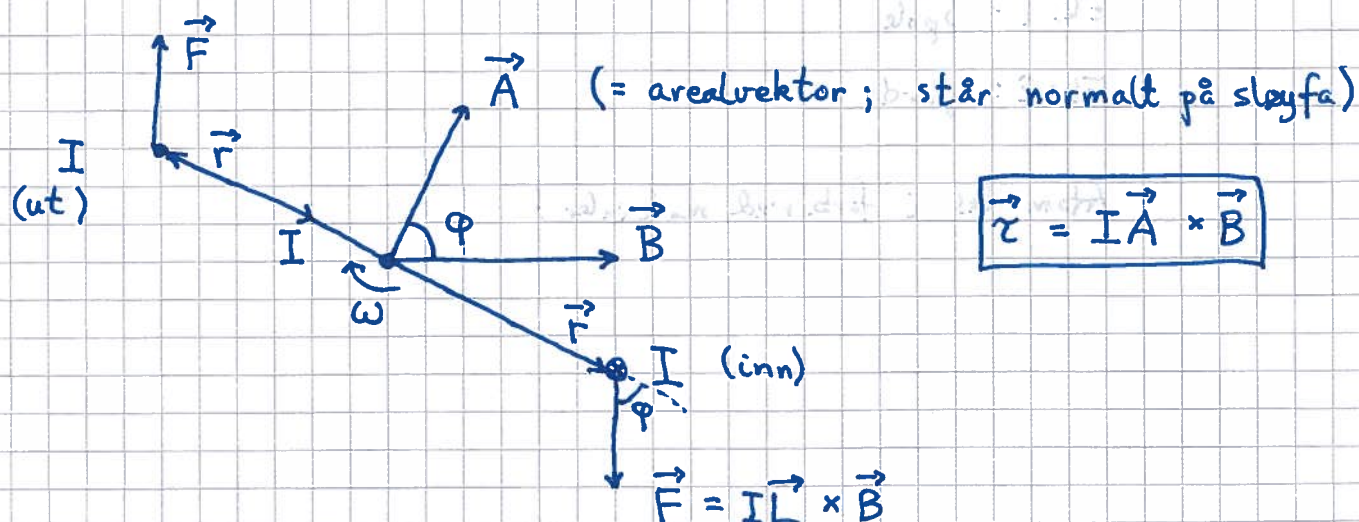
Dreiemoment på strømsløyfa:

$$\tau = |\vec{\tau}| = \left| \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \right| = 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot ILB \cdot \sin\varphi$$

der $\varphi =$ vinkel mellom \vec{r} og \vec{F} ($\varphi = 90^\circ$ i figuren)

$$\Rightarrow \tau = IA \cdot B \cdot \sin\varphi \quad ; \quad A = b \cdot L = \text{omsluttet areal}$$

Sett langs rotasjonsaksen:

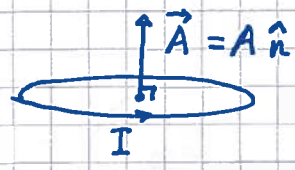


Hvis spole med N viklinger:

$$\tau = NIA B \sin\varphi \quad ; \quad \vec{\tau} = NIA \vec{A} \times \vec{B}$$

Magnetisk dipol og dipolmoment [YF 27.7; LHL 23.3, 26.2]

Strømsløyfe er magnetisk dipol.



Positiv retning på $\vec{A} = A \hat{n}$ med h.h.regel.

Strømsløyfas magn. dipolmoment: $\vec{m} = I \vec{A}$

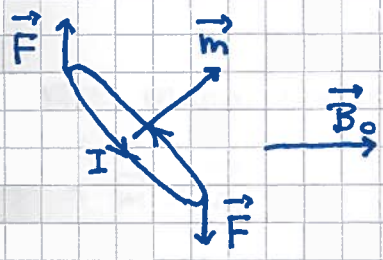
Enhet: $[m] = A \cdot m^2 = N \cdot m / T = J / T$

[Generelle definisjoner av magn. og el. dipolmoment:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int (\vec{r} \times \vec{j}) dV ; \quad \vec{j} = \text{strømtetthet} ; \quad dV = \text{volumelement}$$

$$\vec{p} = \int \vec{r} \rho dV ; \quad \rho = \text{ladningstetthet} ; \quad \text{---} \text{---}]$$

Magn. dipol i ytre magnetfelt (jf DC-motor s 97):



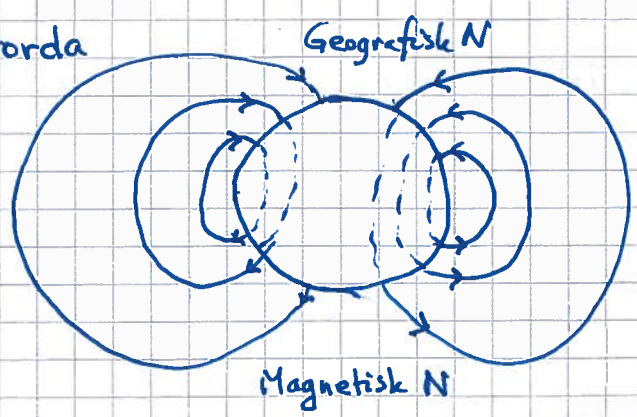
$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0 ; \quad U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0 \quad (\text{Øv. 13})$$

(Jf. el. dipol: $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0 ; U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0 ; \text{Øv. 9}$)

Eks 1 : Spole med 1600 viklinger, tverrsnitt 4 cm^2 ,
Hva er magn. dipolmoment når strømmen er 1 A ?

Løsn : $m = NIA = 1600 \cdot 1 \text{ A} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = \underline{0.64 \text{ Am}^2}$

Eks 2 : Jorda

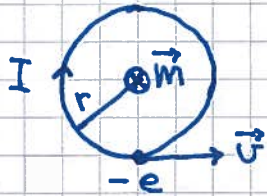


$$m \approx 8 \cdot 10^{22} \text{ Am}^2$$

Magnetisme [YF 28.8; LHL 26.1-26.6]

99

Betrakt elektron i sirkulær bane i atom:



$$I = e/T, \quad T = 2\pi r/v, \quad A = \pi r^2$$

$$\Rightarrow m = IA = \frac{1}{2} e v r$$

$$\sim 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10^{-10} \text{ m} \sim 10^{-23} \text{ Am}^2$$

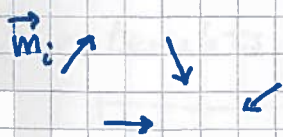
Kvantemekanikk viser at elektronet har et spinn (indre dreieimpuls) som tilsvarer et magnetisk dipolmoment

$$\mu_B = \frac{e \cdot h}{4\pi m_e} \approx 9.274 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2 \quad (\text{Bohr magneton})$$

($h \approx 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ = Plancks konstant)

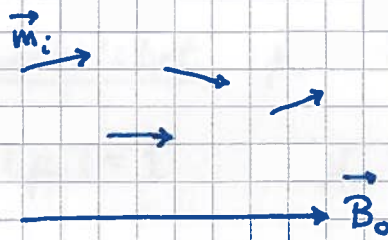
Atomære magn. dipoler kan rettes inn med \vec{m} langs ytre felt \vec{B}_0

$$(\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0, \quad U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0) :$$



$$(B_0 = 0)$$

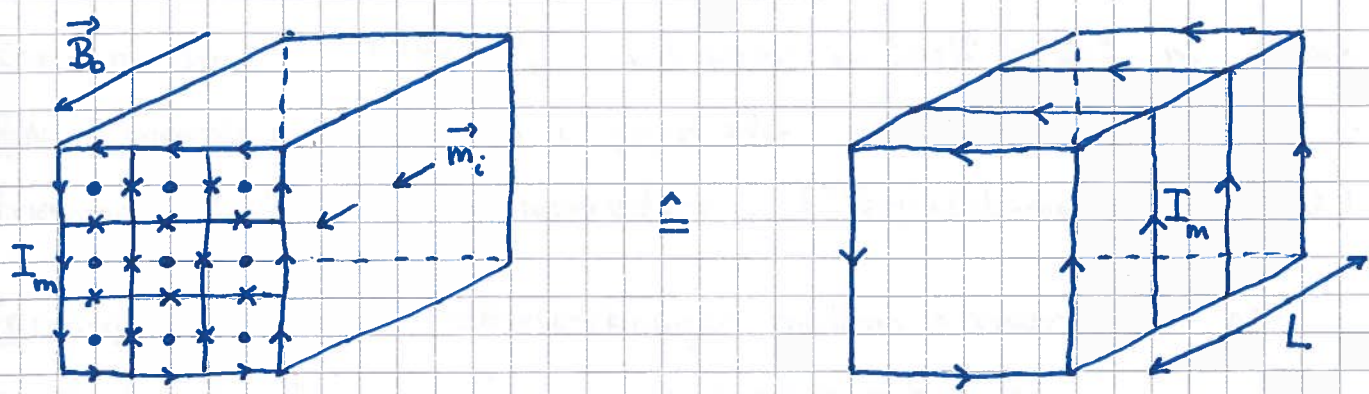
$$\sum_i \vec{m}_i \approx 0$$



$$\sum_i \vec{m}_i \neq 0$$

\Rightarrow Materialet magnetiseres i ytre felt \vec{B}_0 .

Netto makroskopisk effekt av ytre felt \vec{B}_0 :



- innretting av atomære \vec{m} langs \vec{B}_0 ; bundet strøm i hvert atom
- indre strømmer kansellerer
- induert overflatestrøm I_m ; pr lengdeenhet $i_m = I_m/L$
- materialet blir som en spole
- magnetfeltet styrkes i materialet: $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$
- linear respons: B_m prop. med B_0
- materialets relative permeabilitet μ_r definert ved

$$\boxed{B = \mu_r B_0}$$

$$[\mu_r] = 1$$

(jf $E = \epsilon_r E_0$ for dielektrikum)

• tallverdier:

	Vakuum	Luft	Al	Fe	Cu	Vann
μ_r	1	1.0000004	1.00002	5000	0.9999994	0.9999992
Type	—	Paramagnet	Param.	Ferrom.	Diamagnet	Diamagnet

• stoffets permeabilitet: $\mu = \mu_r \mu_0$

Paramagnetisme: Svak innretting av \vec{m} langs ytre \vec{B}_0

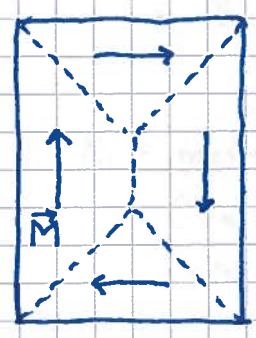
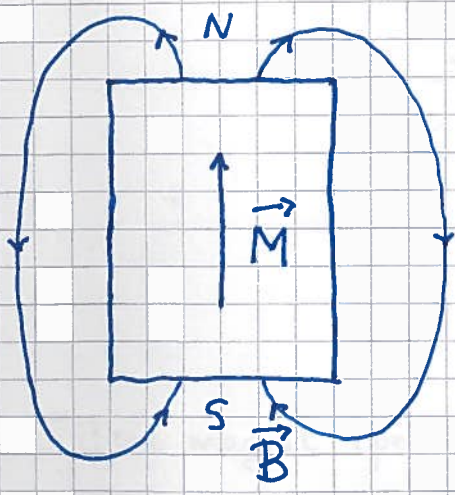
Diamagnetisme: Ytre \vec{B}_0 inducerer motsatt rettet \vec{m} . Svak effekt i normalt metall, men i superleder induseres så store strømmer at $B=0$ inni superlederen. ("Perfekt diamagnet", $\mu_r = 0$)

Ferromagnetisme: Vekselvirkninger mellom atomære \vec{m} gir lavest energi når alle \vec{m} peker i samme retning:



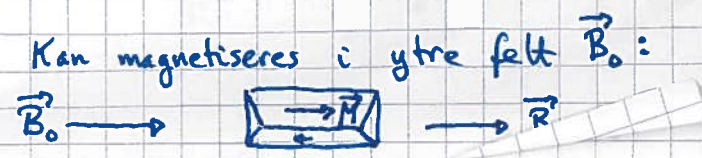
Gjelder Fe, Ni, Co og endel legeringer, f.eks. $Nd_2Fe_{14}B$ ↙ neodym

Magnetiske domener: $(\vec{M} = \sum_i \vec{m}_i / V = \text{magnetisering}; [M] = \frac{A}{m})$

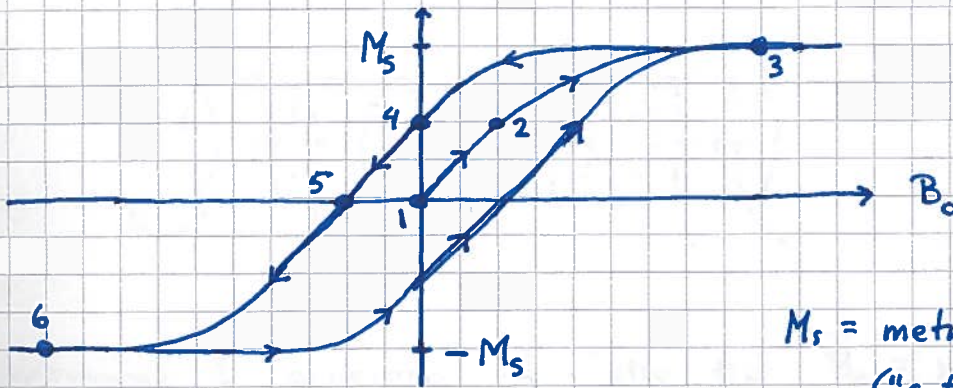
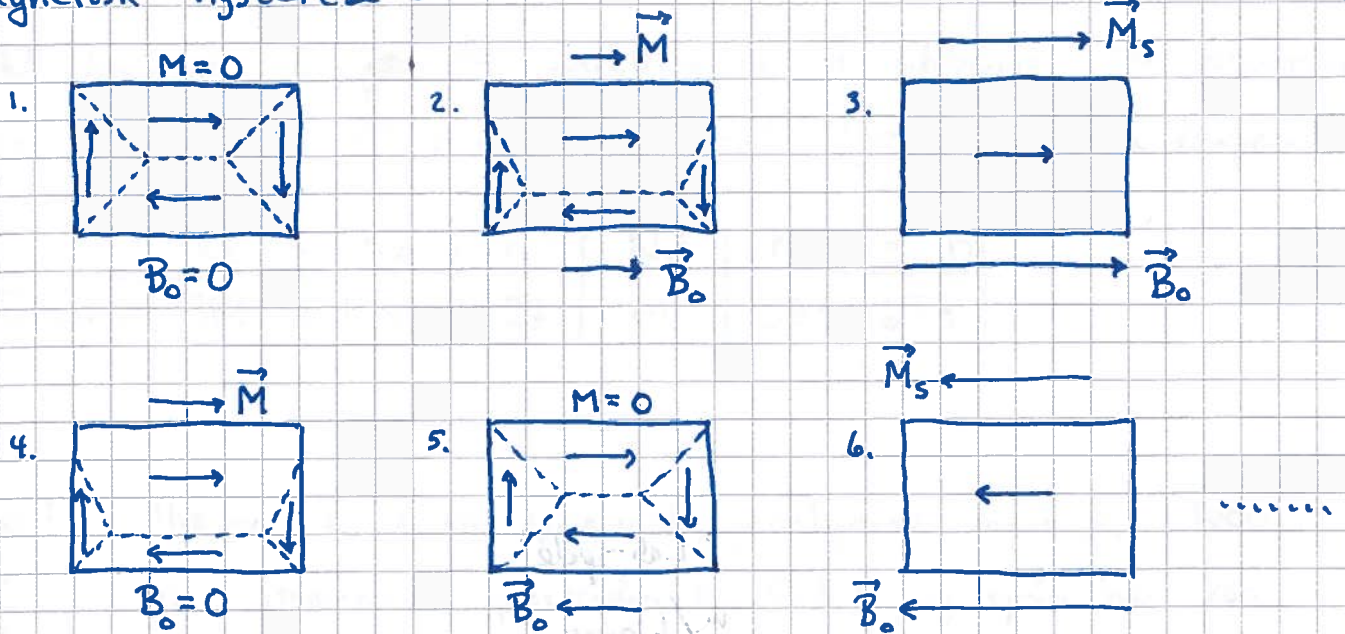


$B \approx 0$ utenfor

- Permanent-magnet
- Stor magnetisk energi omkring magneten: $u_B = B^2 / 2\mu_0$
- Minimal vekselvirkningsenergi mellom atomære \vec{m}
- Eks: Neodymmagnet. Starmagnet av jern.
- Lokalt energiminimum.
- "Umagnetisk ferromagnet"
- Liten magnetisk energi omkring (utenfor)
- Større vekselvirkningsenergi nær domeneveggene (----)
- Typisk domenestørrelse: $10^{-4} - 10^{-6} \text{ m}$
- Eks: Stål
- Kan magnetiseres i ytre felt \vec{B}_0 :

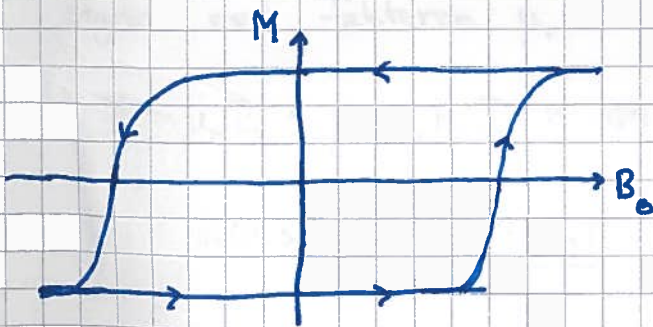


Magnetisk hysteresese :



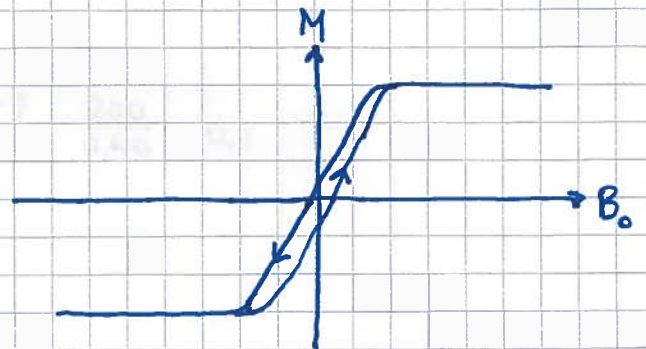
M_s = metningsmagnetisering ("saturation")
(alle \vec{m} i samme retning)

"Hard" magnet (permanent magnet):



- Vanskelig å demagnetisere
- Stor $M(0)$
- Uegnet som "kjerne" i spole

"Bløt" magnet (stål):



- Lett å magnetisere
- Liten $M(0)$
- Velegnet som "kjerne" i spole

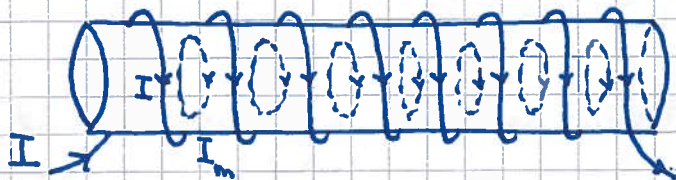
Curie - temperaturen:

Økt temperatur $T \Rightarrow$ innretting av \vec{m} ødelegges \Rightarrow faseovergang
 fra ferromagnet til paramagnet ved $T = T_c =$ kritisk temperatur

	Co	Fe	Ni	Nd	Nd ₂ Fe ₁₄ B
T_c (K)	1388	1043	627	19	583-673

Eks 1: Hva er B i en spole med jernkjerne med $\mu_r = 1000$,
 når strømmen i spoletråden er 0.1 A og spolen har 200
 viklinger på en lengde 40 cm?

Løsn:



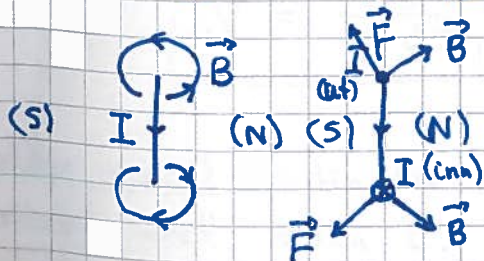
Spolestrømmen I genererer et "ytre" felt $\vec{B}_0 = \mu_0 n I$ inni spolen,
 dvs i jernkjernen. Jernet magnetiseres, med \vec{M} langs \vec{B}_0 .
 Nettoeffekten blir en induisert overflatestrøm (bundet strøm,
 magnetiseringsstrøm) I_m pr vikling av spoletråden. Magnetfeltet
 styrkes med faktoren μ_r :

$$B = \mu_r B_0 = \mu_r \mu_0 n I = 1000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{200}{0.40} \cdot 0.1 \text{ T}$$

$$= 0.063 \text{ T} = \underline{\underline{63 \text{ mT}}}$$

Eks 2: Hvorfor tiltrekker to motsatte magn. poler (N og S) hverandre?

Løsn: Betrakt to sirkulære strømsløyfer (sett fra siden):



\Rightarrow Nettokraft på høyre sløyfe rettet
mot venstre, dvs tiltrekning!

(NB: Må ha inhomogent \vec{B} -felt!)

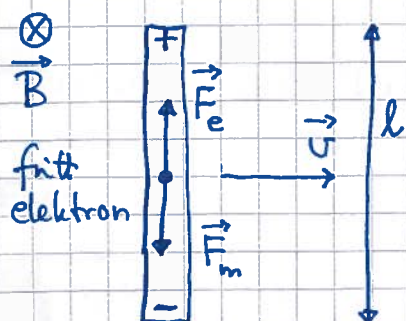
Elektrodynamikk

[YF 29-31; LHL 24, 25, 27]

(104)

Faradays induksjonslov [YF 29.1+2+4; LHL 24.1]

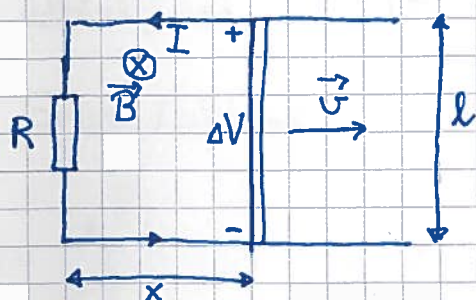
Leder i bevegelse i (uniformt) \vec{B} -felt:



$\vec{F}_m = -e\vec{v} \times \vec{B}$, nedover, gir induisert ladning på endene, dvs induisert elektrisk felt \vec{E} , nedover, dvs indusert spenning $\Delta V = E \cdot l$ i lederen.

$$\text{Likevekt: } \vec{F}_m + \vec{F}_e = 0 \Rightarrow eE = evB \Rightarrow E = vB \\ \Rightarrow \underline{\Delta V = vBl}$$

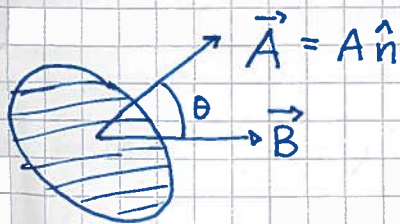
ΔV vil drive strøm hvis vi lager lukket krets; $I = \Delta V/R = vBl/R$



$$\Delta V = vBl = \frac{dx}{dt} Bl = \frac{d}{dt}(Blx) = \frac{d}{dt}(B \cdot A) \\ \text{der } A = lx = \text{areal omsluttet av strømsløyfa}$$

Magnetisk fluks

[YF 27.3; LHL 23.7 (19.7)]



Magnetisk fluks Φ gjennom flaten med areal A :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos \theta$$

$$(\text{Generelt: } \Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A})$$

Dermed:

$$\Delta V = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Faradays induksjonslov

Gjelder generelt, enten det er A (som her), \hat{n} eller \vec{B} som varierer med tiden t .

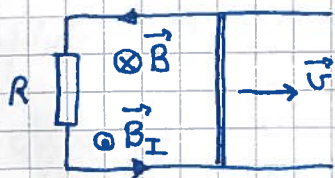
Lenz' lov [YF 29.3; LHL 24.1]

105

Indusert strøm I får retning slik at tilhørende indust magnetfelt \vec{B}_I og fluks $\Phi_I = \vec{B}_I \cdot \vec{A}$ motvirker den påtvungne endringen $\Delta\Phi$.

"Naturen motsetter seg endringer!"

Eks:



Påtvungen endring: Økt ^{omsluttet} magn. fluks inn i planet.

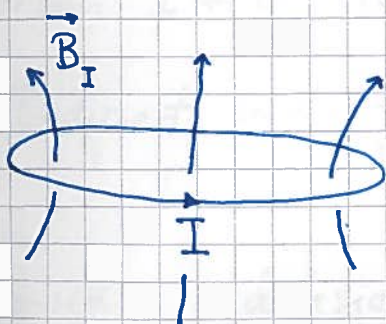
"Naturens respons": Strøm I mot klokka. Gir omsl.

fluks $\Phi_I = \int \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$ ut av planet.

Dvs: Endringen motvirkes.

Induktans [YF 30.2; LHL 25.1]

Selvinduktans:



Biot-Savarts lov $\Rightarrow \vec{B}_I$ prop. med I

\Rightarrow Omsluttet fluks

$$\Phi = \int \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$$

også prop. med I

Strømskøyfas (selv-) induktans:

$$L = \Phi / I$$

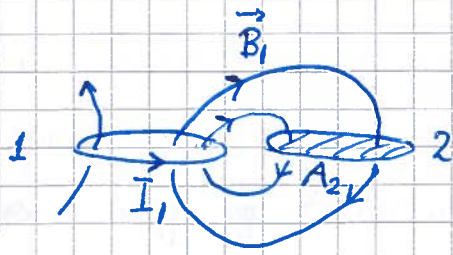
$$[L] = \frac{I \cdot m^2}{A} = H \text{ (henry)}$$

Eks: Bestem L for spole med 400 viklinger, $l = 6 \text{ cm}$, $A = 9 \text{ cm}^2$ og kjerne med $\mu_r = 500$.

Løsn: $B = \mu n I = \mu_r \mu_0 (N/l) I \Rightarrow \Phi = NBA = N^2 \mu_r \mu_0 A I / l$

$$\Rightarrow L = N^2 \mu_r \mu_0 A / l = 400^2 \cdot 500 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^{-4} / 6 \cdot 10^{-2} = \underline{1.5 H}$$

Gjensidig induktans:



En strøm I_1 i sløyfe 1 gir en fluks $\Phi_2 = \int_{A_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}_2$ omsluttet av sløyfe 2.

Siden B_1 er prop. med I_1 , blir også Φ_2 prop. med I_1 : $\Phi_2 = M_{21} I_1$

Tilsvarende: En strøm I_2 i sløyfe 2, gir felt \vec{B}_2 , og dermed fluks $\Phi_1 = \int_{A_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{A}_1$ omsluttet av sløyfe 1, prop. med I_2 :

$\Phi_1 = M_{12} \cdot I_2$. "Lett å vise" at $M_{21} = M_{12} = M$, som kalles sløyfenes gjensidige induktans, med enhet $[M] = H$ (som for L).

(Selv-) Induksjon:


Dersom $\dot{I} \neq 0$, blir også $\dot{\Phi} \neq 0$

\Rightarrow Indusert (mot-)spenning $V = -\dot{\Phi} = -L\dot{I}$

Gjensidig induksjon:

$\dot{I}_1 \neq 0 \Rightarrow V_2 = -\dot{\Phi}_2 = -M\dot{I}_1$

ent. $\dot{I}_2 \neq 0 \Rightarrow V_1 = -\dot{\Phi}_1 = -M\dot{I}_2$

Spole som kretselement:  $V = -L dI/dt$

Retning på V fra Lenz' lov:

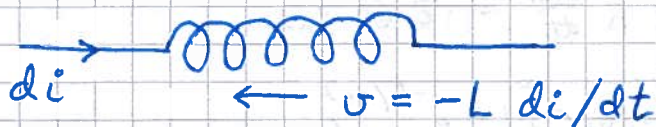


Energi i \vec{B} -feltet

[YF 30.3 ; LHL 25.3]

(107)

Vi regner ut arbeidet som må gjøres mot den induerte spenningen for å øke strømmen fra $i=0$ til $i=I$ i en lang og tettviklet spole:



Energi påkrevd for å øke strømmen fra i til $i+di$:

$$dU = P \cdot dt = -v i dt = L \frac{di}{dt} \cdot i dt = L \cdot i \cdot di$$

For å øke fra $i=0$ til $i=I$:

$$U = \int dU = \int_0^I L i di = \underline{\underline{\frac{1}{2} L I^2}}$$

Med N viklinger på lengde l , tverrsnitt A :

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} I \quad \Rightarrow \quad I = B / (\mu_0 N / l)$$

$$\Phi = N A B = L I$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \cdot L I \cdot I = \frac{1}{2} \cdot N A B \cdot \frac{B l}{\mu_0 N} = \frac{1}{2 \mu_0} B^2 \cdot A l$$

der $A l =$ volum i spolen, der $B \neq 0$

$$\Rightarrow \text{Energi pr volumenhett i magnetfelt: } u_B = \frac{1}{2 \mu_0} B^2$$

\Rightarrow Total energitetthet i elektromagnetisk felt:

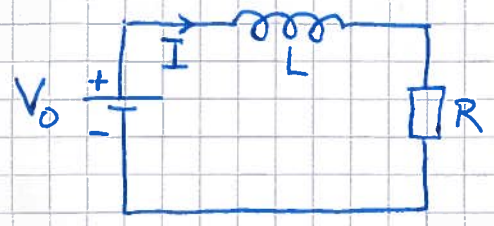
$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2 \mu_0} B^2$$

Kretser og anvendelser ; DC og AC

[YF 30.4+5+6 ; LHL 25.2, 27.1+2+3+5]

① RL-krets (DC)

Kobler til V_0 ved $t=0$: ($I(0)=0$)

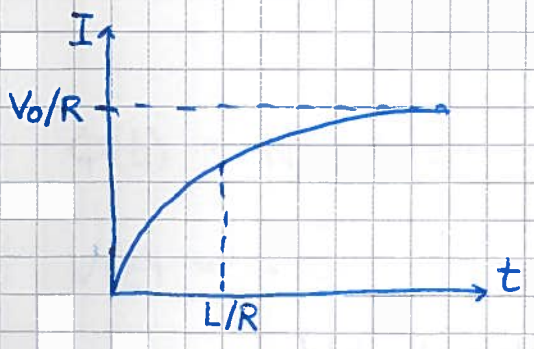


$$K2 \Rightarrow V_0 - L \frac{dI}{dt} - RI = 0$$

Dus: Samme lign. for I som for Q i RC-kretsen (se s. 87)

$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

med $\tau = L/R =$ RL-kretsens tidskonstant

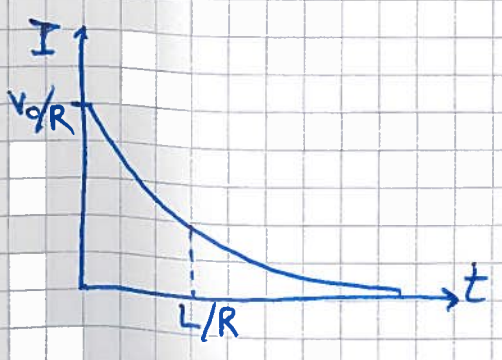


Kobler ut V_0 ved "nytt $t=0$ " : ($I(0) = V_0/R$)

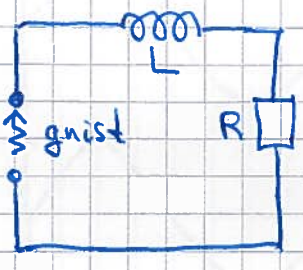


$$K2 \Rightarrow -L \frac{dI}{dt} - RI = 0$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau} ; \tau = L/R$$



Forklarer gnist når støpselet dras ut av stikk-kontakten :




Strømmen bringes raske fra V_0/R til null $\Rightarrow |dI/dt|$ blir stor \Rightarrow stor induert spenning og overslag /gnist!

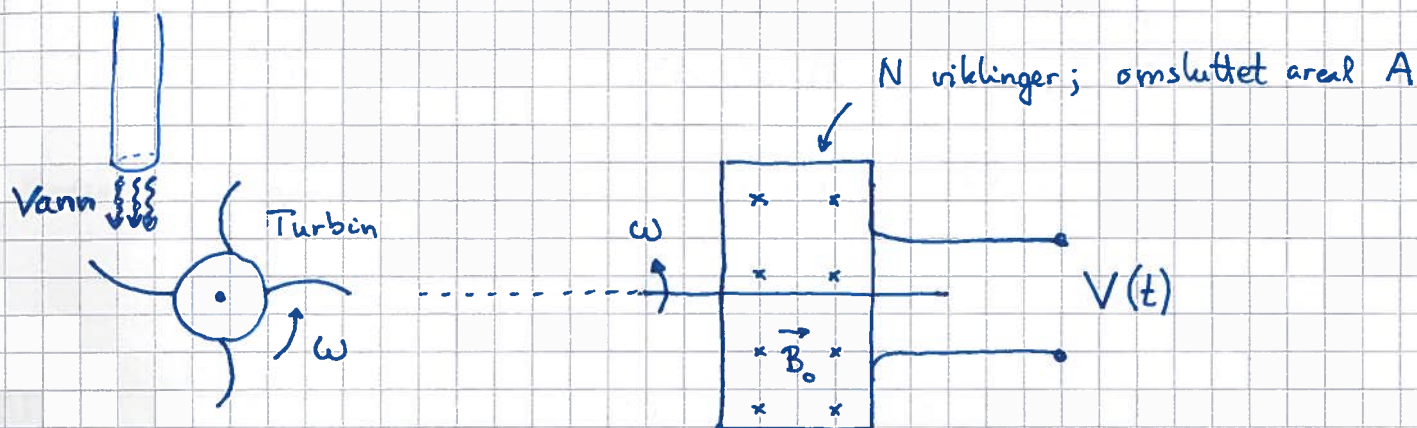
AC spenningskilde

(AC = alternating current
= vekselstrøm)

Krettsymbol:

 $V(t) = V_0 \cos \omega t$; frekvens $f = \frac{\omega}{2\pi}$ (Norge/Europa: 50 Hz)
(USA: 60 Hz)

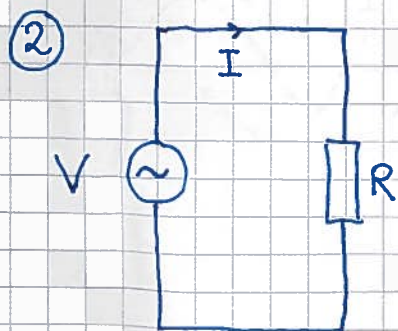
Prinsipp for AC-generator:



$$\Phi(t) = N B_0 A \cos \omega t$$

$$V(t) = -\dot{\Phi} = V_0 \sin \omega t ; \quad V_0 = N B_0 A \omega$$

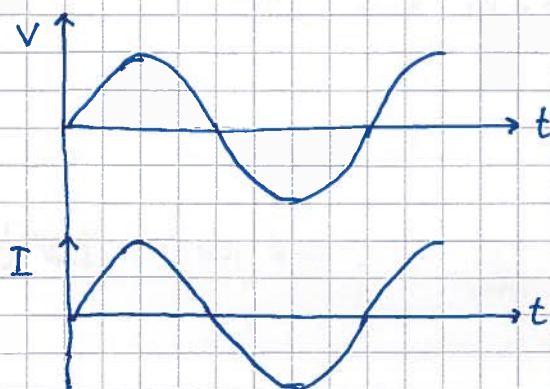
(amplituden)



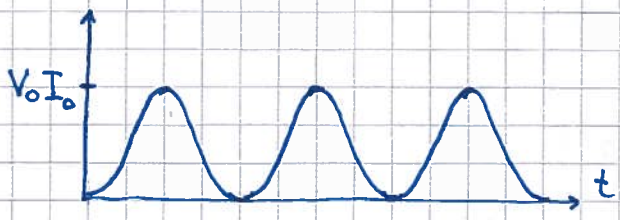
$$K2: V_0 \sin \omega t - RI = 0$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t$$

$\Rightarrow V(t)$ og $I(t)$ i fase:



Effekttap: $P(t) = V(t) \cdot I(t) = V_0 I_0 \sin^2 \omega t$



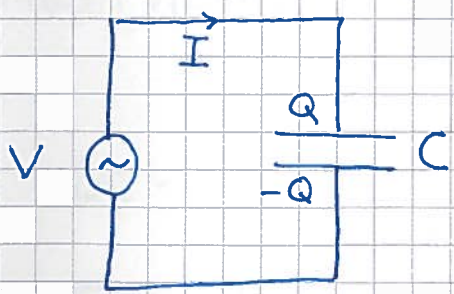
Midlere effekttap: $\langle P \rangle = V_0 I_0 \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0$

Effektivverdier (evt rms-verdier; "root mean square"):

$\langle P \rangle = V_{rms} \cdot I_{rms} \Rightarrow V_{rms} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}, I_{rms} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$

Kontakten i veggen: $V_{rms} \approx 230 \text{ V} \Rightarrow V_0 \approx 325 \text{ V}$

③

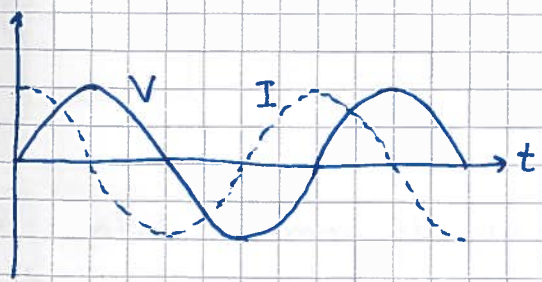


K2: $V_0 \sin \omega t - \frac{Q}{C} = 0$

$\Rightarrow Q = V_0 C \sin \omega t$

$\Rightarrow I(t) = V_0 \omega C \cos \omega t$

$= V_0 \omega C \sin(\omega t + \pi/2)$



- Faseforskjell $\pi/2$ mellom $V(t)$ og $I(t)$

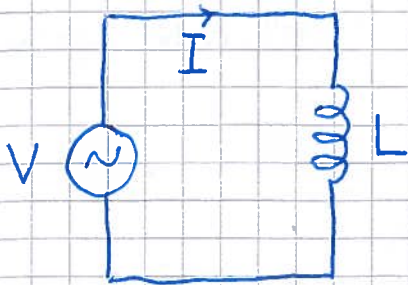
- Strøamplituden, $I_0(\omega) = V_0 \omega C$

øker med økende frekvens

• Midlere effekttap: $\langle P \rangle = V_0 I_0 \cdot \langle \sin \omega t \cdot \cos \omega t \rangle$

$= \frac{1}{2} V_0 I_0 \cdot \langle \sin 2\omega t \rangle = \underline{\underline{0}}$

④



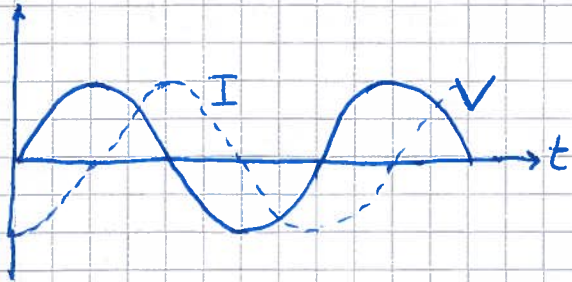
$$K2: V_0 \sin \omega t - L \dot{I} = 0$$

③

$$\Rightarrow \dot{I} = \frac{V_0}{L} \sin \omega t$$

$$\Rightarrow I(t) = -\frac{V_0}{\omega L} \cos \omega t$$

$$= \frac{V_0}{\omega L} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

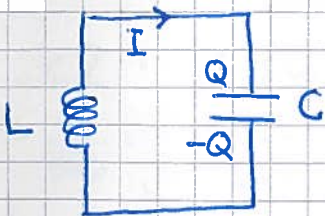


- Faseforskjell $(\rightarrow \frac{\pi}{2})$ mellom $V(t)$ og $I(t)$

- Strøamplitude, $I_0(\omega) = V_0 / \omega L$
avtar med økende frekvens

• Midlere effekttap $\langle P \rangle \sim \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$

⑤ LC-krets



Anta $Q(0) = Q_0$

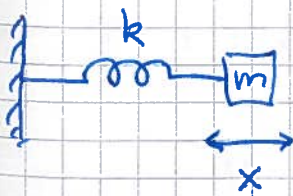
$$K2: -L \dot{I} - Q/C = 0$$

$$I = \dot{Q} \Rightarrow \ddot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

Dvs: enkel harmonisk oscillator!

Løsning: $Q(t) = Q_0 \cos \omega_0 t$; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Analogi: mekanisk oscillator



$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 ; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Analoge størrelser: $Q \leftrightarrow x$, $I \leftrightarrow \dot{x}$, $L \leftrightarrow m$, $C \leftrightarrow \frac{1}{k}$ (112)

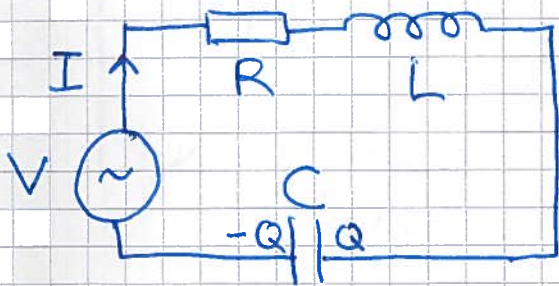
$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} L I^2 = \text{energi i } \vec{B}\text{-felt i spolen}$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \leftrightarrow \frac{Q^2}{2C} = \text{---} \vec{E}\text{-felt i kondensatoren}$$

Konservativt system, uten dissipasjon av energi ($R=0$):

$$\frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2} L I^2 = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} L Q_0^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{Q_0^2}{2C} = \text{konst.}$$

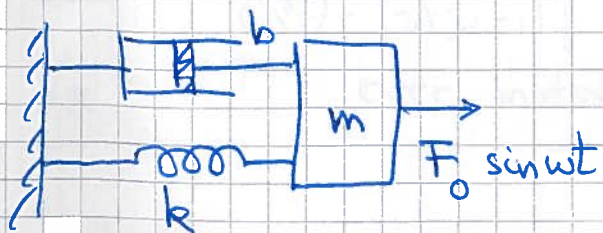
⑥ RLC resonanskrets



$$KZ: V_0 \sin \omega t - R I - L \dot{I} - \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow L \ddot{Q} + R \dot{Q} + \frac{1}{C} Q = V_0 \sin \omega t$$

Mekanisk analogi:



$$N2: m \ddot{x} + b \dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

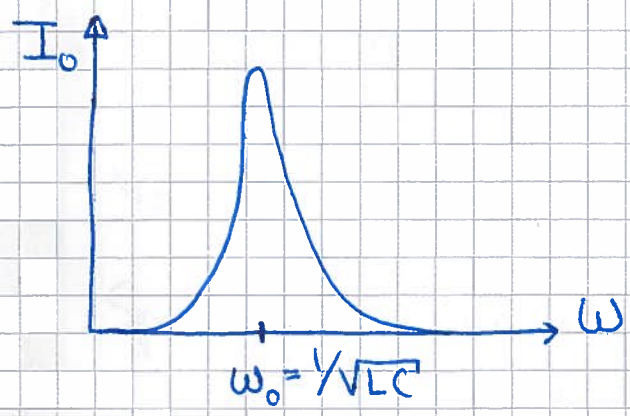
$$\text{dvs: } b \leftrightarrow R; \quad F_0 \leftrightarrow V_0$$

⇒ Vi får resonans i RLC-kretsen når $\omega \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Alle sammenhenger fra det mekaniske systemet kan "oversettes" direkte:

$$Q(t) = Q_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi) ; Q_0(\omega) = \frac{V_0/L}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

der $2\gamma = R/L$.

Dette gir: $I(t) = \omega Q_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$
 $= I_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$



Halvverdbredde: $\Delta\omega = 2\gamma = R/L$

Kvalitetsfaktor: $\omega_0/\Delta\omega (= f_0/\Delta f) = \sqrt{LC}/R$

Måler $I_0(\omega)$ enkelt ved å måle spenningen

$V_R = RI$ over motstanden (med voltmeter).

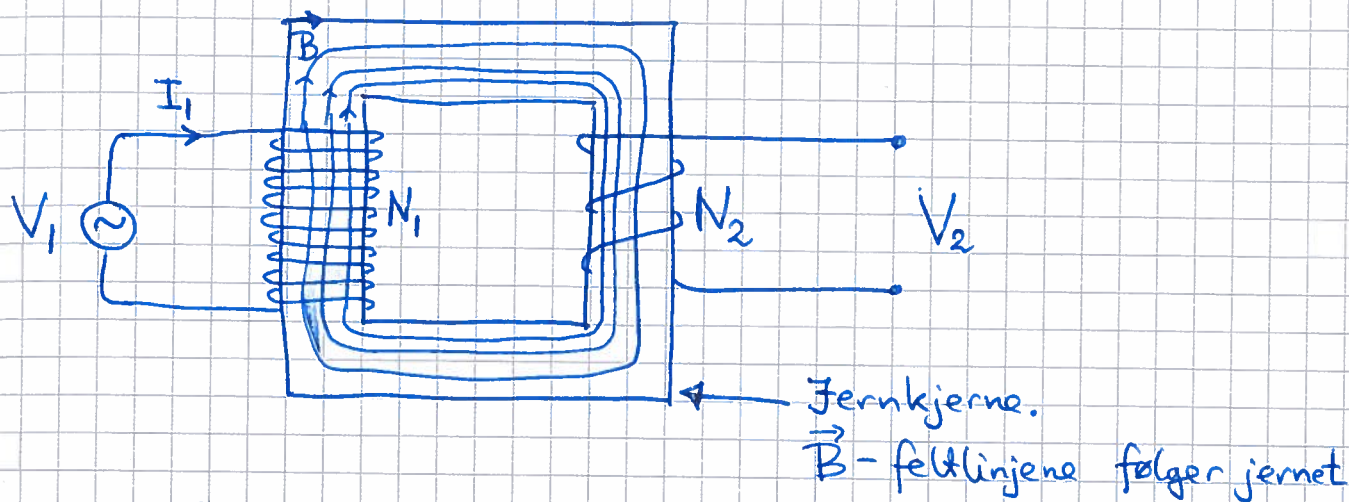
I forbindelse med AC-kretser kalles forholdet mellom V_0 og I_0 for impedans: $Z(\omega) = V_0/I_0(\omega)$, en generalisert motstand, med enhet Ω .

⇒ $Z_R = R$, $Z_C = 1/\omega C$, $Z_L = \omega L$; og for RLC-resonanskretsen er

$$Z = \omega L \cdot \sqrt{(1 - \omega_0^2/\omega^2)^2 + (2\gamma/\omega)^2}$$

⑦ Transformator

114



$$V_1 = \dot{\Phi}_1 = L_1 \dot{I}_1 \quad ; \quad L_1 \sim N_1^2$$
$$V_2 = \dot{\Phi}_2 = M \dot{I}_1 \quad ; \quad M \sim N_1 N_2$$

$$\Rightarrow V_2 / V_1 = M / L_1 = N_1 N_2 / N_1^2 = N_2 / N_1$$

\Rightarrow Spenningen "inn", V_1 , kan transformeres til spenning "ut", V_2 , med mindre amplitude ($N_2 < N_1$) eller større amplitude ($N_2 > N_1$) enn V_1 .

Hvorfor høy spenning på overføringsnettet mellom kraftstasjon og bolig?

Effekttap i overføringsnett med gitt resistans R :

$$P = V \cdot I = RI \cdot I = RI^2$$

\Rightarrow Fordel med så liten strøm I som mulig, det fordel med høy spenning. (Norge: 11 - 420 kV)