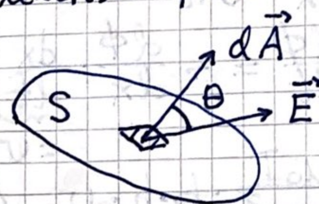
Maxwells ligninger

(ikke eksamensaktuelt i FY6017)

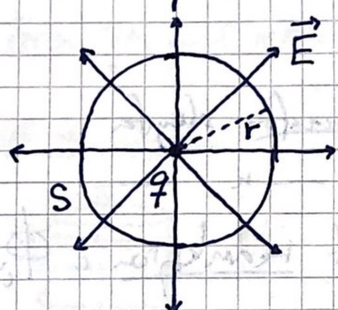
Gauss' lov for $\vec{E}$

Elektrisk fluks gjennom flate S:



$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

La S være en kuleflate (dvs lukket flate) med punktladning q i sentrum:



På flaten S:

$$\vec{E} = \frac{q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \; ; \; d\vec{A} = dA\,\hat{r}$$

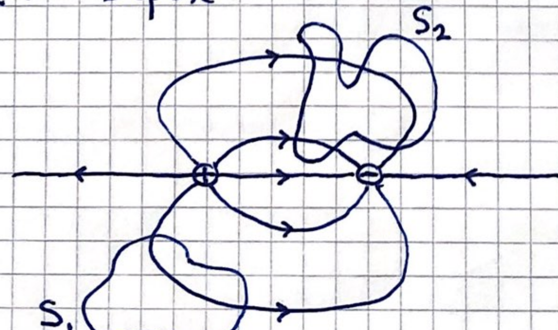
$$\Rightarrow \phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \overbrace{\oint_S dA}^{=4\pi r^2} = q/\varepsilon_0$$

som gjelder generelt:

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}}$$

q_{in} = netto ladning innenfor lukket flate S

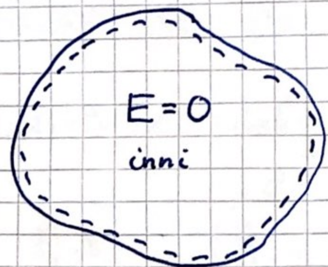
Eks 1: Dipol



$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

Eks 2: Metallstykke i likevekt



----- Lukket flate S like innafor metallstykkets overflate

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{(siden } E=0 \text{ på } S\text{)}$$

$\Rightarrow q_{in} = 0 \Rightarrow$ All nettoladning må ligge på metallstykkets overflate

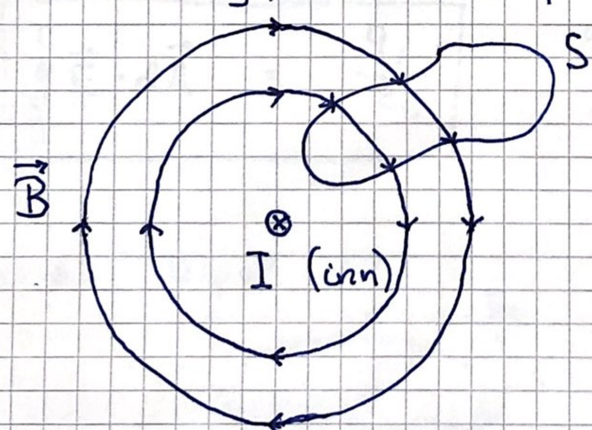
Gauss' lov for $\vec{B}$

Feltlinjer for $\vec{B}$ er alltid lukkede kurver.

Dermed:

$$\boxed{\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0}$$

Eks: Lang, rett strømførende leder

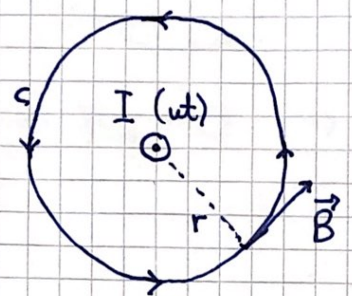


$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Like mye magn. fluks inn ($\Phi < 0$) som ut ($\Phi > 0$) gjennom enhver lukket flate S

Amperes lov

La c være en sirkel (dvs lukket kurve) konsentrisk med lang, rett strømførende leder, strøm I:



Langs kurven c:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{\varphi} \;;\quad d\vec{s} = r\,d\varphi\,\hat{\varphi}$$

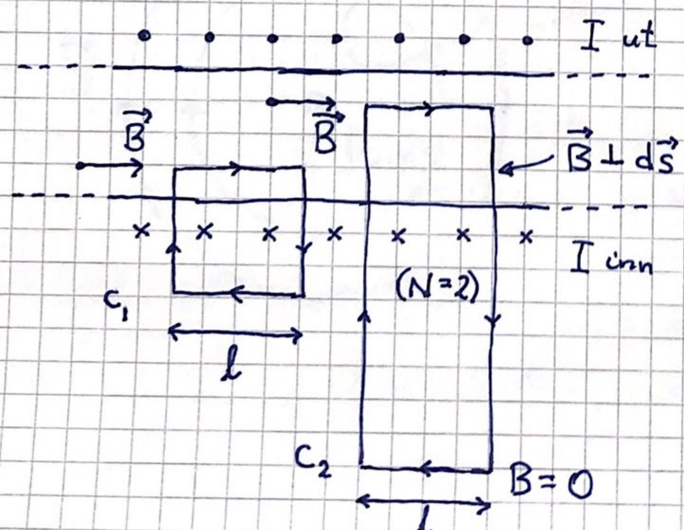
$$\Rightarrow \oint_c \vec{B}\cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\underbrace{\oint_c d\varphi}_{=2\pi} = \mu_0 I$$

som gjelder generelt (for statisk felt $\vec{B}$):

$$\boxed{\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{in}}$$

I_{in} = netto strøm som omsluttes av lukket kurve c

Eks: Lang og tettviklet spole



$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{s} = B\cdot l$$

$$I_{in} = N\cdot I$$

(I = spolestrømmen)

$$\Rightarrow B\cdot l = \mu_0 N I$$

$$\Rightarrow B = \mu_0 n I \;;\; n = \frac{N}{l}$$

inni spolen

Statisk versjon av induksjonsloven

Coulombkraften er konservativ. Dermed, for et statisk elektrisk felt $\vec{E}$:

$$\boxed{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0}$$

Fra integral- til differensialligninger

Med divergensteoremet:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V (\nabla \cdot \vec{E})\, dV$$

V = volumet innenfor den lukkede flaten S

Dessuten:

$$q_{in} = \int_V \rho\, dV \; ; \quad \rho = \text{ladningen pr volumenhet}$$

Dermed:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0}$$

Gauss' lov for $\vec{E}$ på differensialform

Divergens til en vektor:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Tilsvarende for $\vec{B}$:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$$

Med Stokes' teorem:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{A}$$

S = flate omsluttet av den lukkede kurven c

Dessuten:

$$I_{in} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{A} \quad ; \quad \vec{j} = \text{strøm pr flateenhet}$$

Dermed:

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

Amperes lov på differensialform

Tilsvarende for (statisk) $\vec{E}$:

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}$$

Oppsummert, for statiske felt:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = 0 & \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{array}}$$

$$(\nabla \times \vec{B})_x = \frac{\partial}{\partial y} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_y \quad \text{osv}$$

Faraday - Henrys lov

Induksjonsloven : $\Delta V = -\frac{d\Phi}{dt}$

$$\Delta V = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad ; \quad \Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Med fast kurve c rundt fast flate S, samt Stokes' teorem :

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Ampere - Maxwells lov

Uten bevis : Amperes lov kan ikke være riktig dersom feltene er tidsavhengige.
Maxwell fant ut hvordan Amperes lov skulle "justeres" :

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)}$$

Oppsummert, Maxwells ligninger på differensialform:

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \rho / \varepsilon_0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{aligned}}$$

Elektromagnetiske bølger

Matematisk identitet for "curl av curl":

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

med

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}\right)$$

Da kan vi raskt utlede <u>bølgeligninger</u> for $\vec{E}$ og $\vec{B}$ i tomt rom (vakuum), der $\rho = 0$ og $\vec{j} = 0$.

Maxwells ligninger i vakuum:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Operér med curl (dvs $\nabla \times$) på begge sider av Faraday-Henrys lov:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \underbrace{(\nabla \cdot \vec{E})}_{=0} - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

$$\nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Dvs, en bølgeligning for $\vec{E}(\vec{r}, t)$, med bølgefart $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \approx 3 \cdot 10^8$ m/s = lysfarten i vakuum

Tilsvarende, ved å ta $(\nabla\times)$ på begge sider av Ampere – Maxwells lov:

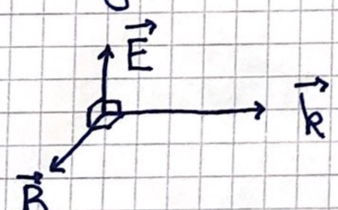
$$\nabla\times(\nabla\times\vec{B}) = \nabla(\underbrace{\nabla\cdot\vec{B}}_{=0}) - \nabla^2\vec{B} = -\nabla^2\vec{B}$$

$$\nabla\times\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{E}) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

Dvs, også $\vec{B}(\vec{r},t)$ er bølge med bølgefart $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$.

Maxwells ligninger kobler feltene $\vec{E}$ og $\vec{B}$ sammen. Et tidsavhengig $\vec{B}$-felt skaper et tidsavhengig $\vec{E}$-felt; Faraday-Henrys lov. Og omvendt: Et tidsavhengig $\vec{E}$-felt skaper et tidsavhengig $\vec{B}$-felt; Ampere-Maxwells lov.
Sammen danner $\vec{E}$ og $\vec{B}$ et elektromagnetisk felt som kan forplante seg med fart c som en bølge gjennom tomt rom. Bølgen er transversal, med både $\vec{E}$ og $\vec{B}$ normalt på forplantningsretningen, og med $\vec{E}\perp\vec{B}$; f.eks. en harmonisk bølge:



$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$$

$$k = 2\pi/\lambda \,, \quad \omega = 2\pi f$$

$$c = \lambda\cdot f = \omega/k$$

I materialer: $v = 1/\sqrt{\mu\cdot\varepsilon} = 1/\sqrt{\mu_r\mu_0\cdot\varepsilon_r\varepsilon_0} = \dfrac{c}{n}$; $n\approx\sqrt{\varepsilon_r}$