Størrelser og enheter [OS1 1 ; YF 1]

Eks: Lengde (fysisk størrelse)

$$L = 356.9 \text{ cm}$$

dekadisk forstavelse (c = centi = 10^{-2})

symbol

tallverdi

SI-enhet

Notasjon for å angi enhet for en størrelse:

$$[L] = m$$

"SI-enheten for lengde er meter"

Grunnenheter i SI:

Lengde	$[\ell] = m$	mekanikk
Masse	$[m] = kg$	
Tid	$[t] = s$	
Strømstyrke	$[I] = A$	elmag
Temperatur	$[T] = K$	termisk fysikk
Stoffmengde	$[n] = mol$	
Lysstyrke	$[I] = cd$	

Etter 20.05.19 basert på eksakte verdier for diverse naturkonstanter (c, e, k_B, N_A, h).

Sammensatte enheter:

Hastighet (fart) $[v] = m/s$

Akselerasjon $[a] = m/s^2$

Avledete enheter:

Kraft $[F] = kg \cdot m/s^2 = N$

Energi $[W] = N \cdot m = J$

Andre enheter, f. eks. for lengde:

1 tomme (1 in) $= 2.54$ cm (eksakt)

1 fot (1 ft) $= 12$ in $= 30.48$ cm

1 yard (1 yd) $= 3$ ft $= 91.44$ cm

1 Å (ångstrøm) $= 0.1$ nm $= 10^{-10}$ m

$a_0 \approx 5.29 \cdot 10^{-11}$ m $= 0.529$ Å (Bohr-radien)

(en liten....) Oppgave: Hvor lang tid bruker lyset på en maraton?

Løsning: $v = c = 299792458$ m/s (lysfarten i vakuum)

$L = 42195$ m

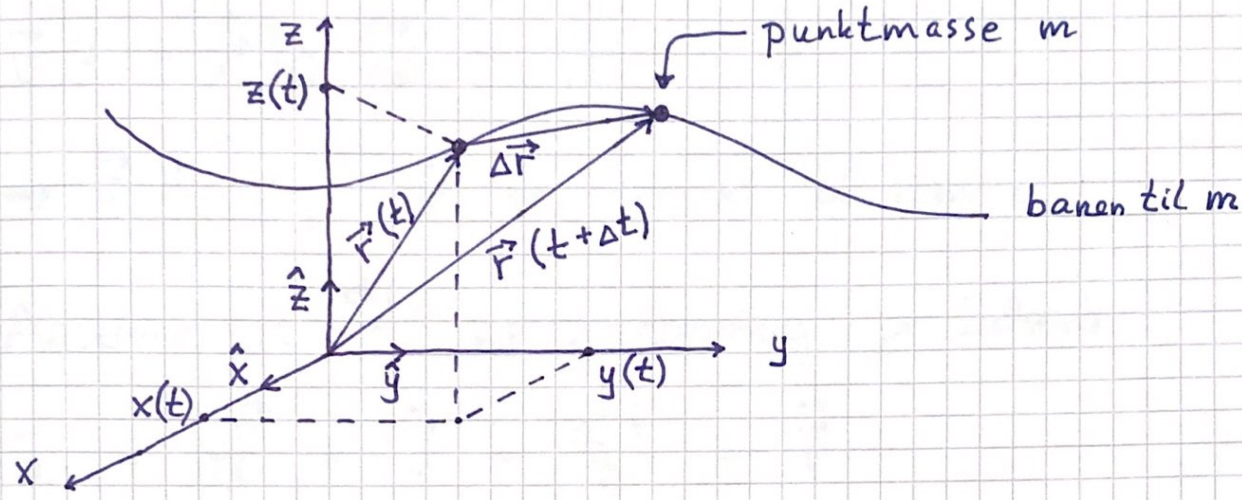
$$\Rightarrow t = L/c = \frac{42195 \text{ m}}{299792458 \text{ m/s}} \approx 0.14 \text{ ms}$$

KLASSISK DYNAMIKK

[OS1 1-12,15 ; YF 1-11,14 ; LL 1-6,9]

Kinematikk

[OS1 3,4 ; YF 2,3 ; LL 1]



$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z}$$

= posisjon ved tid t

Enhetsvektorer : $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \quad \text{(dimensjonsløse)}$$

$$\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1$$

$$\hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{y}\cdot\hat{z} = \dots = 0$$

Forflytning, i løpet av Δt:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

Hastighet $\stackrel{\text{def}}{=}$ forflytning pr tidsenhet:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$\Rightarrow \vec{v} \parallel \Delta\vec{r}$; $\vec{v}$ er tangent til banen

Akselerasjon $\stackrel{\text{def}}{=}$ hastighetsendring pr tidsenhet:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

$\Rightarrow \vec{a} \parallel d\vec{v}$; $\vec{a}$ i samme retning som fartsendringen

Kartesiske komponenter av $\vec{v}$ og $\vec{a}$:

$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$; $v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ osv

$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$; $a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$ osv

<u>Derivasjon</u> av $\vec{r}$ og $\vec{v}$ gir hhv $\vec{v}$ og $\vec{a}$.

$\Rightarrow$ <u>Integrasjon</u> av $\vec{v}$ og $\vec{a}$ gir hhv $\vec{r}$ og $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t)\,dt$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a}\,dt$$

$$\Rightarrow \ldots$$

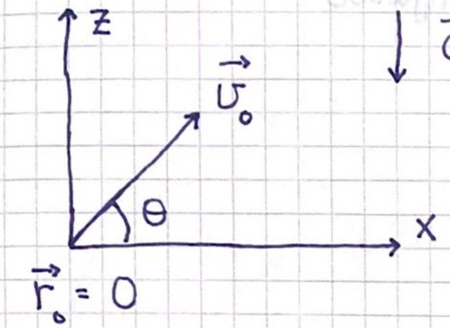
$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t)\,dt$$

Ofte er $\vec{a}$ konstant:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t \;; \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{a}\,t^2$$

med $\vec{v}_0 = \vec{v}(0)$ og $\vec{r}_0 = \vec{r}(0)$

Eks: Kast i tyngdefeltet



$\vec{a} = -g \cdot \hat{z}$ $\quad (g \approx 9.81 \ m/s^2)$

- Finn $\vec{r}(t)$
- Finn banen $z(x)$

Løsn: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t = \vec{v}_0 - gt\,\hat{z}$

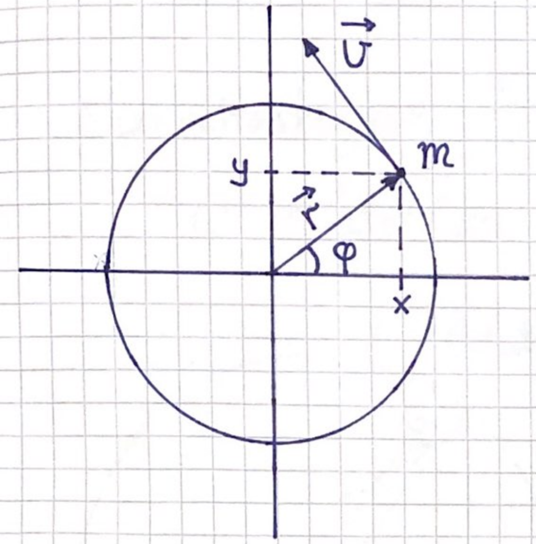
$$\vec{r}(t) = \dots = \vec{v}_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 \,\hat{z}$$
$$= \hat{x} \cdot v_0 t \cos\theta + \hat{z}\left(v_0 t \sin\theta - \tfrac{1}{2} g t^2\right)$$

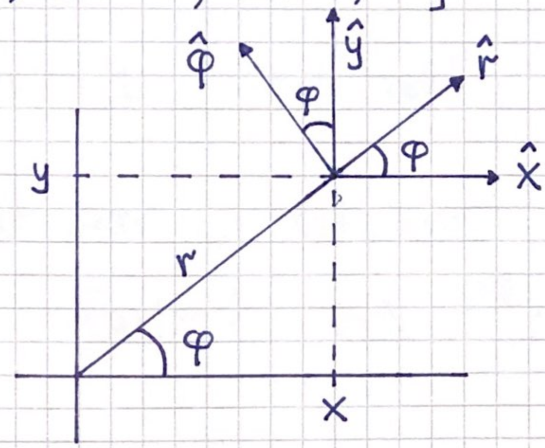
Banen: $t = x / v_0 \cos\theta$

$$\Rightarrow z(x) = x \tan\theta - g x^2 / 2 v_0^2 \cos^2\theta$$

[Oppg: Skisser $x(t)$, $z(t)$ og $z(x)$.
Vis at $\theta = \pi/4 = 45^\circ$ gir lengst kast.]

Sirkelbevegelse [OS1 4.4 ; YF 3.4 ; LL 1.7, 1.8]





Polarkoordinater :

r = avstand fra origo
φ = vinkel mellom $\hat{x}$ og $\hat{r}$ (positiv mot klokka)

Fra figur :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \,, \quad \varphi = \arctan(y/x)$$

$$x = r\cos\varphi \,, \quad y = r\sin\varphi$$

$$\vec{r} = \hat{x}\,x + \hat{y}\,y = \hat{x}\,r\cos\varphi + \hat{y}\,r\sin\varphi = r\,\hat{r}$$

$$\hat{r} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$$

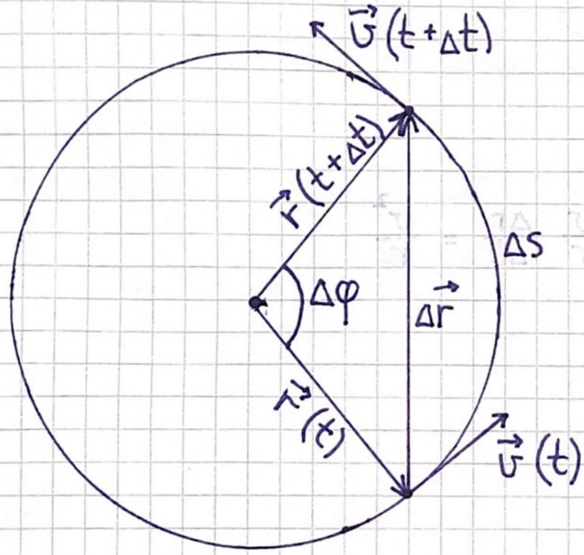
$$\hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$$

Vinkel $\overset{\text{def}}{=}$ buelengde/radius

$$\Delta\varphi = \Delta s / r \quad ; \quad [\varphi] = 1 \quad (\text{evt. rad})$$

Vinkelhastighet $\overset{\text{def}}{=}$ omløpt vinkel pr tidsenhet

$$\omega = d\varphi/dt = \dot{\varphi} \quad ; \quad [\omega] = \frac{1}{s} \quad \left(\text{evt. } \frac{\text{rad}}{s}\right)$$



Når Δt er liten:

- liten $\Delta\varphi$
- $\Delta r \approx \Delta s = r\Delta\varphi$
- $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$

$$= \frac{r\, d\varphi}{dt} = r\omega$$

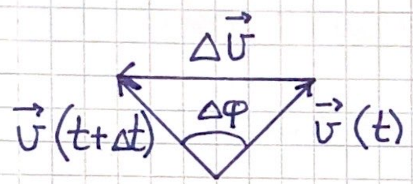
Vi <u>ser</u> uten videre at $\vec{v} \perp \vec{r}$ og $\vec{v} \parallel \hat{\varphi}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{v} = v\hat{\varphi} = r\omega\hat{\varphi}}$$

Akselerasjon ved sirkelbevegelse:

Anta først konstant ω (uniform sirkelbevegelse).

Vi ser (fra fig. s. 8) at $\Delta\vec{v}$, og dermed $\vec{a}$, peker inn mot sirkelens sentrum:



Formlikhet gir: $\Delta r/r = \Delta v/v$

$$\Rightarrow \; a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow \; \vec{a}_\perp = -\frac{v^2}{r}\hat{r} = -\omega^2 r\,\hat{r} = \text{sentripetalakselerasjon}$$

Alternativ utledning:

Med konstant ω øker omløpt vinkel lineært med tiden, $\varphi(t) = \omega t$. Dermed:

$$\vec{r}(t) = \hat{x}\, r\cos\omega t + \hat{y}\, r\sin\omega t$$

$$\vec{v}(t) = -\hat{x}\,\omega r\sin\omega t + \hat{y}\,\omega r\cos\omega t$$

$$\vec{a}_\perp(t) = -\hat{x}\,\omega^2 r\cos\omega t - \hat{y}\,\omega^2 r\sin\omega t$$

$$= -\omega^2\,\vec{r}(t)$$

$$= -\omega^2 r\,\hat{r}(t)$$

Hvis $|\vec{v}|$ og ω varierer, har vi også

baneakselerasjon, $a_{\parallel} = \dot{v} = r\dot{\omega}$, og

vinkelakselerasjon, $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ (med $[\alpha] = 1/s^2$)

Generelt, ved sirkelbevegelse, er total akselerasjon:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\perp} + \vec{a}_{\parallel} = -\omega^2 r \hat{r} + r\dot{\omega}\hat{\varphi}$$

Andre sentrale størrelser ved sirkelbevegelse (senere også ved svingninger):

Periode $\stackrel{\text{def}}{=}$ tid pr omløp

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad ; \quad [T] = s$$

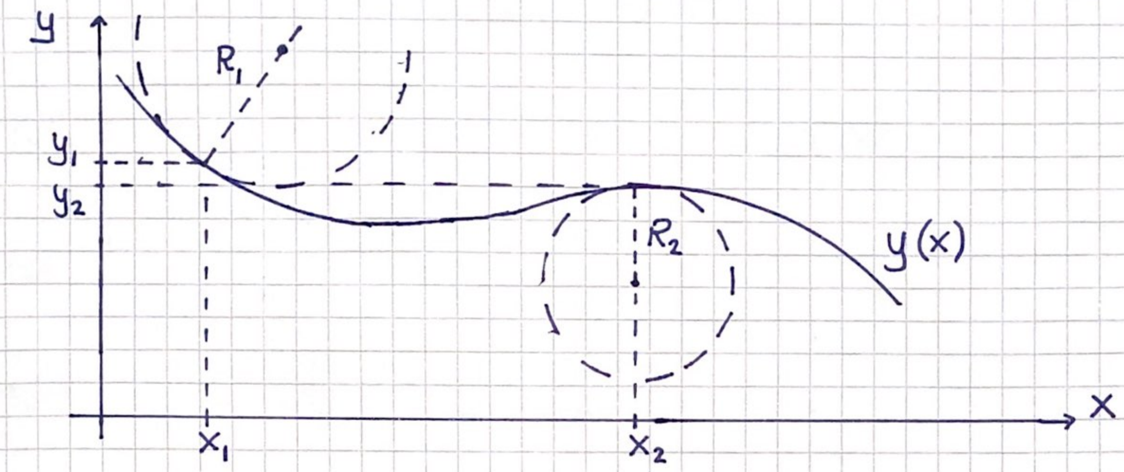
Frekvens $\stackrel{\text{def}}{=}$ antall omløp pr tidsenhet

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad ; \quad [f] = \frac{1}{s} = \text{Hz} \quad \text{(hertz)}$$

(senere: f = antall svingninger pr tidsenhet, for pendler etc)

Krumning og krumningsradius:

I labprosjektet ruller ei kule (evt skive eller ring) på en bane med form $y(x)$:



Krumningsradien R er radien i sirkelen som best tangerer banen; krumningen $1/R$ er

$$\frac{1}{R} = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \quad ; \quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

[Se TFY4104, H2019, s. 10-11 for utledning, via Pythagoras og kjerneregel for derivasjon.]

Merknader:

- $a_\perp = v^2/R$
- $\theta = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)$ = banens helningsvinkel
- I topp- og bunnpunkter er $y' = 0$ og $\frac{1}{R} = |y''|$
- I vendepunkter er $y'' = 0$ og $\frac{1}{R} = 0$, dvs $R \to \infty$
- $\vec{a}_\perp$ alltid rettet inn mot sirkelens sentrum