Friksjon i fluider [OS1 6.4, 14.7 ; YF 5.3 ; LL 8]

Legeme med fart $\vec{v}$ bremses av omgivende fluid (gass eller væske) med massetetthet ρ og dynamisk viskositet μ.

Luft (v/20°C) : $\rho \approx 1.2 \text{ kg/m}^3$; $\mu \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}$
Vann : $\rho \approx 1000 \text{ kg/m}^3$; $\mu \approx 10^{-3} \text{ kg/m}\cdot\text{s}$

Liten fart v $\Rightarrow$ Laminær (pen, lagdelt) strømning av fluidet rundt legemet ; friksjonen f øker lineært med farten,

$$\vec{f} = -k \cdot \vec{v}$$

Kule med radius r : $k = 6\pi\mu r$ (Stokes' lov)

Stor fart v $\Rightarrow$ Turbulent (uordnet) strømning av fluidet ; f øker kvadratisk med farten,

$$\vec{f} = -\frac{1}{2}\rho A C_d v^2 \hat{v}$$

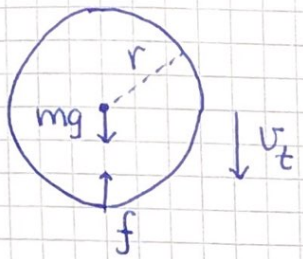
C_d = legemets drag-koeffisient

A = —"— areal målt på tvers av $\vec{v}$

Kule med radius r : $C_d \approx 0.5$, $A = \pi r^2$

Eks: Terminalhastighet

Hva er maksimal fart v_t for baller som faller?



$$N1 \Rightarrow f = mg$$

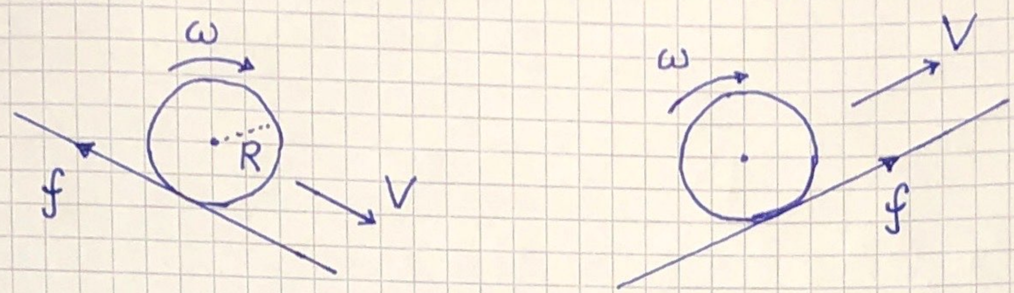
I luft er $f = \frac{1}{2} \rho A C_d v_t^2$

$$\Rightarrow \underline{v_t = \sqrt{2mg/\rho A C_d}}$$

	r (mm)	m (g)	v_t (m/s)
Bordtennis	20	2.7	8.4
Golf	22	46	31
Tennis	34	58	23
Fotball	110	430	19
Regndråpe	1	0.0042	6.6

[Hvordan øker, eller avtar, terminalfarten med diameteren til kompakte kuler ~~med~~ av samme materiale?]

Friksjon i labprosjektet:

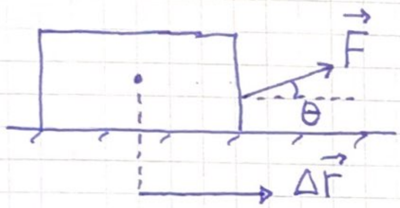


- Kule/skive/ring ruller uten å gli
- Translasjon med fart V, rotasjon med vinkelfart $\omega = V/R$
- Friksjonskraften f er selve årsaken til rotasjonsbevegelsen
- Statisk friksjon; dermed er mekanisk energi bevart

Arbeid og energi [OS1 7,8 ; YF 6,7 ; LL 4]

Arbeid [OS1 7.1 ; YF 6.1-6.3 ; LL 4.1]

$\stackrel{\text{def}}{=}$ kraft · forflytning

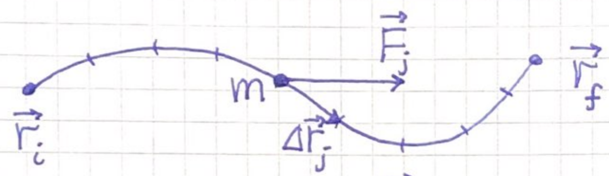


$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\theta$

= arbeid utført av $\vec{F}$ på klossen. Enhet: $[W] = \mathrm{N \cdot m}$

$= \mathrm{J}$ (joule)

Generelt :



[i = initial
f = final]

$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta\vec{r}_j \xrightarrow{\Delta r_j \to 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arbeid utført av $\vec{F}$ på massen m

Effekt [OS1 7.4 ; YF 6.4 ; LL 4.1]

$\stackrel{\text{def}}{=}$ arbeid (evt energi) pr tidsenhet

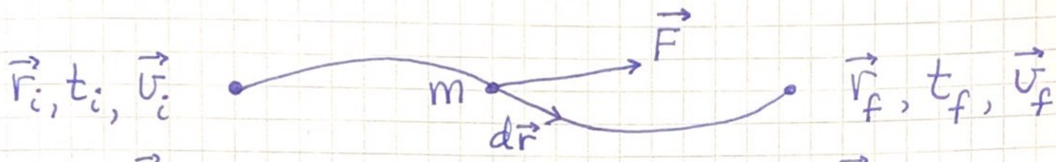
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$[P] = \mathrm{J/s} = \mathrm{W}$ (watt)

$1\ \mathrm{kWh} = 1000\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} \cdot 3600\,\mathrm{s} = 3.6\ \mathrm{MJ}$

Kinetisk energi [OS1 7.2 ; YF 6.2 ; LL 4.2]

Vi kombinerer def. av arbeid med N2



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot \vec{v}\, dt = m \int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \vec{v}\cdot d\vec{v}$$

$$\vec{v}\cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\vec{v}\cdot d\vec{v} + d\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = \frac{1}{2} d(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{1}{2} d(v^2)$$

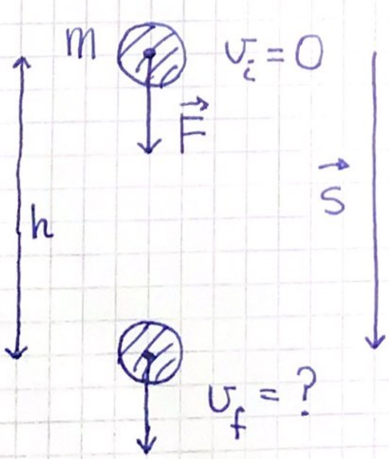
$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \int_{v_i^2}^{v_f^2} d(v^2) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$K = \text{kinetisk energi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \Delta K = K_f - K_i}$$

Arbeidet W utført på legemet tilsvarer endringen ΔK i legemets kinetiske energi

Eks:



$K_i = 0, \quad K_f = \frac{1}{2} m v_f^2$

$W = \vec{F}\cdot\vec{s} = mgh$

$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2} m v_f^2$

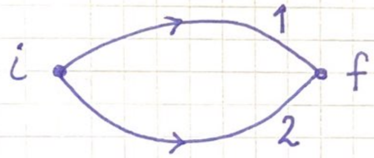
$\Rightarrow \underline{v_f = \sqrt{2gh}}$

Konservative krefter og potensiell energi

[OS1 8.1–8.4 ; YF 7.1–7.4 ; LL 4.3–4.4]

$\vec{F}$ er konservativ hvis $\boxed{\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0}$

Dvs, $W = 0$ når $\vec{F}$ virker langs en lukket bane, med $\vec{r}_f = \vec{r}_i$. Når $\vec{r}_f \neq \vec{r}_i$, er arbeidet uavhengig av veien fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_f$:



$$W_1 = \left\{\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r}\right\}_1 = \text{arb. langs } 1$$

$$W_2 = \left\{\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r}\right\}_2 = \text{arb. langs } 2$$

$$W_1 - W_2 = \left\{\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r}\right\}_1 + \left\{\int_f^i \vec{F}\cdot d\vec{r}\right\}_2 = \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

Potensiell energi U, når $\vec{F}$ er konservativ :

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad ; \quad U(\vec{r}_0) = 0$$

Vi velger fritt hvor vi har $U = 0$.

Bare forskjeller i pot. energi har fysisk betydning.

Eks: Masse m i tyngdefeltet. Velg $z = 0$ og $U = 0$ på bakken. Pot. energi i høyde $z = h$ er da

$$U(h) = -\int_0^h (-mg)\, dz = mgh, \text{ som kjent } \quad (\vec{F} = -mg\hat{z})$$

Hvordan finne $\vec{F}$ når $U(\vec{r})$ er kjent?

Ved derivasjon! Anta først 1D, dvs

$$dU = -F(x)\,dx$$

er endringen i U ved en liten forflytning dx.
Ser da uten videre at

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

Generalisering til 3D (TMA 4105 e.l.):

$$dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Generelt gjelder også: $dU = \nabla U \cdot d\vec{r}$

$$\nabla U = \hat{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial U}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial U}{\partial z} = \text{gradienten til } U(x,y,z)$$

$$d\vec{r} = \hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy + \hat{z}\,dz$$

(dvs: $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$)

Dermed: $dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = \nabla U \cdot d\vec{r}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\nabla U}$$

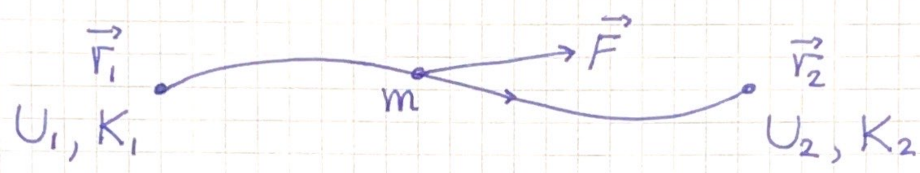
∇U er en vektor som peker i den retningen som U øker raskest, dvs $\vec{F}$ peker i den retningen som U avtar raskest

Eks: $U(z) = mgz$ for masse m i tyngdefeltet.
Da er $\partial U/\partial x = \partial U/\partial y = 0$ og $\partial U/\partial z = mg$, slik at $\vec{F} = -mg\,\hat{z}$, dvs loddrett ned, som stemmer bra.

Bevaring av mekanisk energi

[OS1 8.3 ; YF 7.1–7.3 ; LL 4.5]

Ser på masse m som påvirkes av konservativ kraft $\vec{F}$ og beveger seg fra $\vec{r}_1$ til $\vec{r}_2$:



$$\Delta K = K_2 - K_1 = W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W$$

$$\Rightarrow \quad K_2 - K_1 = U_1 - U_2$$

$$\Rightarrow \quad K_2 + U_2 = K_1 + U_1$$

$\Rightarrow$ Total mekanisk energi,

$$E = K + U,$$

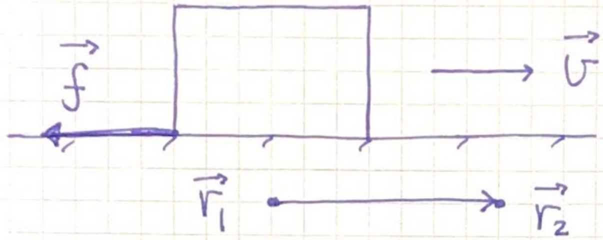
er bevart i et konservativt system

Eks: m $v_1 = 0$, $z_1 = h$ $\qquad K_1 = 0$, $U_1 = mgh$

$U_2 = 0$, $K_2 = \frac{1}{2} m v_2^2$

$z_2 = 0$, $v_2 = ?$ $\qquad \Rightarrow \frac{1}{2} m v_2^2 = mgh \Rightarrow \underline{\underline{v_2 = \sqrt{2gh}}}$

Friksjonsarbeid [OS1 7.1 ; YF 7.3 ; LL 4.5]

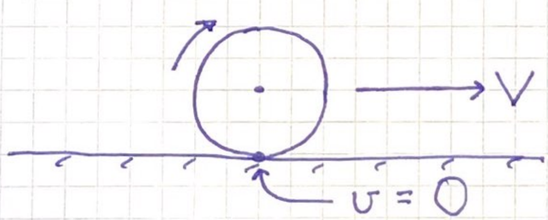


$W_f = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ fordi $\vec{f}$ har motsatt retning av $d\vec{r}$, når det er kinetisk friksjon.

Mekanisk energi går tapt, i form av varme, lyd etc.

Vi har $\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$, dvs $\vec{f}$ er ikke konservativ.

Hvis ren rulling : Da er det ingen relativ bevegelse i kontaktpunktet,



dvs statisk friksjon, $d\vec{r} = 0$, og $W_f = 0$, slik at mekanisk energi er bevart !

[Som vi kan utnytte i labprosjektet.]