# Enkel rotasjonsmekanikk

Lab: Rulling av stive legemer (kule e.l.), dvs rotasjon om akse med fast orientering, som går gjennom massesenteret, CM (center of mass).

## Massesenteret [OS1 9.6; YF 8.5; LL 5.6, 5.8, 6.1]

(= tyngdepunktet, for de fleste praktiske formål)

$$\vec{R}_{CM} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = \text{massesenter (CM)}$$

for $N$ punktmasser $m_1, m_2, \ldots, m_N$ i posisjoner $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$ ; $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ = total masse

Med kontinuerlig massefordeling (f.eks. stive legemer): $m_i \to dm$, $\sum_i \to \int$

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm \quad ; \quad M = \int dm$$

$$dm = \begin{cases} \lambda\, d\ell \\ \sigma\, dA \\ \rho\, dV \end{cases}$$

$\lambda, \sigma, \rho$ = masse pr hhv lengde-, flate-, volumenhet

$d\ell, dA, dV$ = hhv lengde-, flate-, volumelement

Ofte er massefordelingen uniform; da er

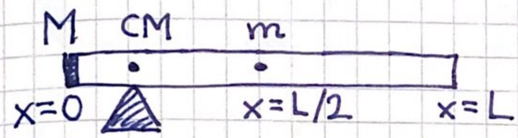
$$\frac{dm}{M} = \frac{dV}{V} \quad \text{evt.} \quad \frac{dm}{M} = \frac{dA}{A} \quad \text{evt.} \quad \frac{dm}{M} = \frac{d\ell}{L}$$

**Eks 1:** N — O $\quad m_N = 14u, \; m_O = 16u$

115 pm $\quad (1u = 1.66 \cdot 10^{-27}\,kg)$

Avstand fra N til CM: $\dfrac{0 \cdot 14u + 115pm \cdot 16u}{30\,u} \approx \underline{61\,pm}$

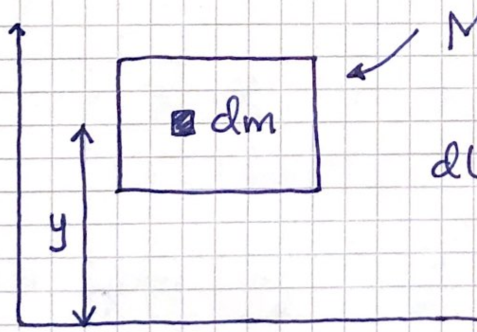
**Eks 2:** Plastrør med lodd i enden




$m = 165g, \quad M = 305g$

$$X_{CM} = \frac{1}{m+M}\{M \cdot 0 + m \cdot L/2\} = \frac{m \cdot L}{2(m+M)} \approx \underline{0.18L}$$

**Eks 3:** Pot. energi i tyngdefeltet er som om <u>hele</u> massen M er i høyden $Y_{CM}$



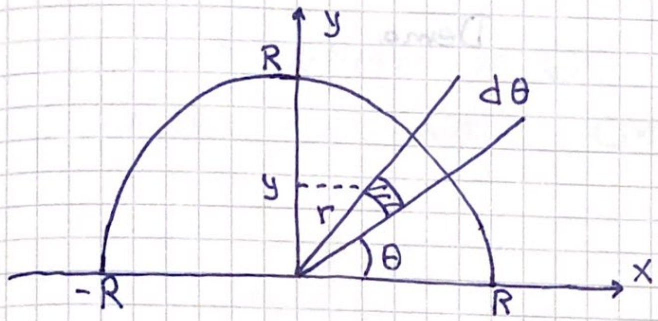

$M = \int dm$

$dU = dm \cdot g \cdot y$

$U(0) = 0$

$$U = \int dU = \int g\,y\,dm = \underline{g \cdot M \cdot Y_{CM}}$$

# Eks 4: Halv sirkulær plate




$$dA = dr \cdot r\,d\theta$$
$$y = r \cdot \sin\theta$$

$$\vec{R}_{CM} = Y_{CM}\,\hat{y} \quad ; \quad X_{CM} = 0$$

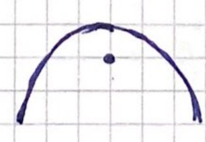
$$Y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{1}{A}\int y\,dA \quad ; \quad A = \frac{1}{2}\pi R^2$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R \int_0^\pi r\sin\theta \cdot dr \cdot r\,d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}\underbrace{\int_0^R r^2\,dr}_{= R^3/3}\;\underbrace{\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta}_{= \Big|_0^\pi (-\cos\theta) = 2}$$

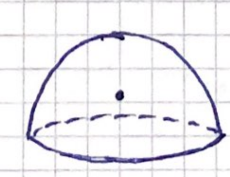
$$= \frac{4}{3\pi}R \approx \underline{0.42\,R}$$

Halv tynn ring:



$$Y_{CM} = \frac{2}{\pi}R$$

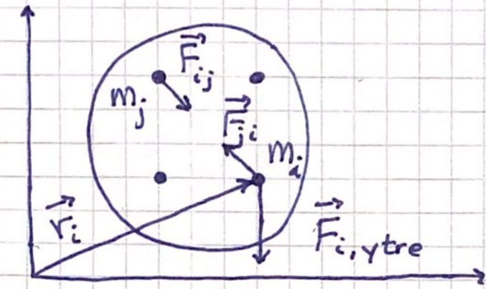
Halv kompakt kule:



$$Y_{CM} = \frac{3}{8}R$$

# Tyngdepunktbevegelsen [OS1 9.6 ; YF 8.5 ; LL 5.8]

Rørkast antyder at CM beveger seg som om hele massen er samlet i CM.




N2 for $m_i$ :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$$

Legg sammen N2 for alle $m_i$ :

$$\underbrace{\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i}_{= \frac{d^2}{dt^2}\left\{\sum_i m_i \vec{r}_i\right\} = \frac{d^2}{dt^2}\left\{M \vec{R}_{CM}\right\} = M \ddot{\vec{R}}_{CM}} = \underbrace{\sum_i \vec{F}_{i,ytre}}_{= \text{netto ytre kraft på systemet, } \vec{F}_{ytre}} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{= 0 \text{ pga N3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{ytre} = M \ddot{\vec{R}}_{CM}}$$

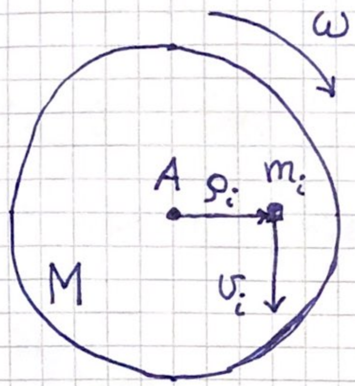
Eks :


$\longrightarrow \vec{A}_{CM} = \dfrac{\vec{F}}{M}$


$\longrightarrow \vec{A}_{CM} = \dfrac{\vec{F}}{M}$ + rotasjon om CM

# Rotasjonsenergi. Treghetsmoment

[OS1 10.4, 10.5 ; YF 9.4 – 9.6 ; LL 6.2 – 6.4]




A : rotasjonsakse

$v_i = \rho_i \omega$ (s. 8)

$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega^2$

$\Rightarrow$ Total rotasjonsenergi :

$$K_{rot} = \sum_i K_i = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2$$

$I = \sum_i m_i \rho_i^2$ = treghetsmomentet, <u>mhp</u> aksen A

$$\Rightarrow \quad \boxed{K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

For kontinuerlig massefordeling : $\boxed{I = \int \rho^2 \, dm}$

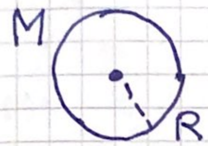
Stive legemers <u>generelle</u> bevegelse er en translasjon av CM (fart $\vec{V}$) pluss en rotasjon om en akse gjennom CM (vinkelfart ω), med total kinetisk energi

$$\boxed{K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2}$$

Notasjon : $I_0$ når akse gjennom CM

[Se utlagt notat for utledning.]

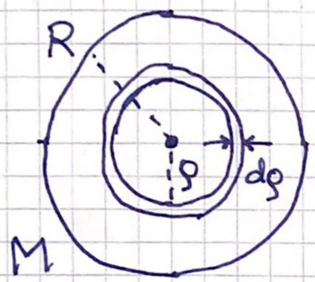
Eks 1. Ring eller hul sylinder




$$I_0 = \int \varrho^2 dm = R^2 \int dm = \underline{MR^2}$$

Eks 2. Skive eller kompakt sylinder

= sum av ringer med radius $\varrho$ og tykkelse $d\varrho$, og dermed treghetsmoment




$$dI_0 = \varrho^2 dm = \varrho^2 M \, dA/A$$

$$= \varrho^2 M \, 2\pi\varrho \, d\varrho / \pi R^2 = \frac{2M\varrho^3 d\varrho}{R^2}$$

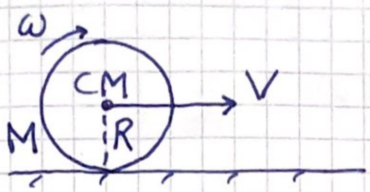
$$\Rightarrow I_0 = \int dI_0 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \varrho^3 d\varrho = \underline{\tfrac{1}{2} MR^2}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Tynt kuleskall:} & I_0 = \tfrac{2}{3} MR^2 \\ \text{Kompakt kule:} & I_0 = \tfrac{2}{5} MR^2 \end{array}\right\} \text{Se øving for detaljer}$$

Dvs: $I_0 = c \cdot MR^2$

| | Ring | Kuleskall | Skive | Kule |
|---|---|---|---|---|
| c | 1 | 2/3 | 1/2 | 2/5 |

# Ren rulling [OS1 11.1 ; YF 10.3 ; LL 6.7, 6.8]




For en hel omdreining om CM:

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ ; $V = \frac{2\pi R}{T}$ $\Rightarrow$ $\underline{V = \omega R}$

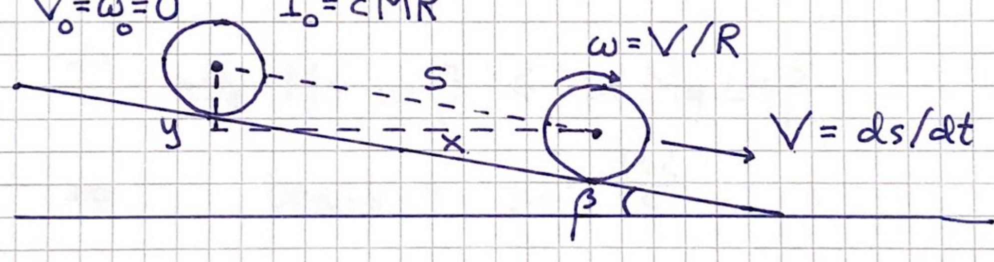
som er <u>rullebetingelsen</u>.

Da blir kinetisk energi:

$$K = \tfrac{1}{2}MV^2 + \tfrac{1}{2}I_0\omega^2 = \tfrac{1}{2}MV^2 + \tfrac{1}{2}cMR^2 \cdot \frac{V^2}{R^2} = \underline{(1+c)\cdot\tfrac{1}{2}MV^2}$$

| | Ring | Kuleskall | Skive | Kule |
|---|---|---|---|---|
| c | 1 | 2/3 | 1/2 | 2/5 |
| K | $MV^2$ | $\frac{5}{6}MV^2$ | $\frac{3}{4}MV^2$ | $\frac{7}{10}MV^2$ |

Ren rulling på skråplan:




$\boxed{\text{Finn } V, A \text{ og } f, \text{ samt største } \beta \text{ som gir ren rulling.}}$

Statisk friksjon $f$ i kontaktpunktet $\Rightarrow$ ikke tap av mekanisk energi $\Rightarrow$ $Mgy = (1+c)\cdot\frac{1}{2}MV^2$

$\Rightarrow V(y) = \sqrt{2gy/(1+c)}$ (dvs kula ruller raskest)

$\Rightarrow \underline{V(s) = \sqrt{2gs\sin\beta/(1+c)}}$

Akselerasjon:

$$A = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{dV}{ds}\cdot V = \frac{1}{2}\frac{dV^2}{ds}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{2gs\sin\beta}{1+c}\right) = \underline{\frac{g\sin\beta}{1+c}}$$

Uten friksjon, $f=0$, ville $Mg\sin\beta$ ha vært eneste kraft parallelt med skråplanet, slik at

$$A(f=0) = g\sin\beta$$

M.a.o. må det være friksjon $\vec{f}$, rettet oppover skråplanet

$$\underset{N2}{\Longrightarrow} \quad Mg\sin\beta - f = MA = \frac{Mg\sin\beta}{1+c}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{f = \frac{c}{1+c}Mg\sin\beta}$$

Men: Ren rulling er bare mulig dersom

$$f \leq f_{max} = \mu_s \cdot N = \mu_s Mg\cos\beta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c}{1+c}Mg\sin\beta \leq \mu_s Mg\cos\beta$$

$$\Rightarrow \quad \tan\beta \leq \mu_s \cdot \frac{1+c}{c}$$

Talleks: Kompakt kule og $\mu_s = 0.5$

$$\Rightarrow \beta_{max} = \arctan\left\{0.5\cdot\frac{1+0.4}{0.4}\right\}$$

$$= \arctan\{1.75\} \approx \underline{60^\circ}$$

Ren rulling på berg-og-dal-bane :

$$V(y) = \sqrt{2gy/(1+c)}$$
$$A_{\parallel} = dV/dt = g\sin\beta/(1+c)$$
$$f = \frac{c}{1+c} Mg \sin\beta$$

} som med skråplan

Krum bane $y(x) \Rightarrow \beta(x) = \arctan[y'(x)]$ og

krumning $R^{-1} = y''/[1+(y')^2]^{3/2}$ ; $y' = \frac{dy}{dx}$ , $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

$\Rightarrow$ Sentripetalakselerasjon $A_{\perp} = V^2 R^{-1}$

N2 $\perp$ banen : $N - Mg\cos\beta = MA_{\perp}$

$\Rightarrow N = Mg\cos\beta + MA_{\perp}$

Krumning ned : $y'' < 0 \Rightarrow A_{\perp} < 0 \Rightarrow N < Mg\cos\beta$

—"— opp: $y'' > 0 \Rightarrow A_{\perp} > 0 \Rightarrow N > Mg\cos\beta$