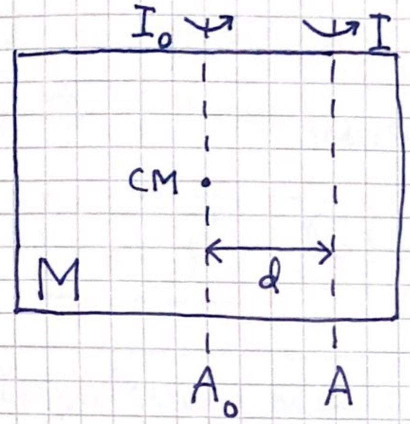
Numerikk ; simulering av labforsøket :

- I cubicspline.py fastlegges høydene $Y_0, Y_1, \cdots, Y_7$ til de 8 festeskruene ved å trekke tilfeldige tall mellom [illegible]0 og 300 mm, slik at kula ruller hele veien. Tilhørende $X_0, X_1, \cdots, X_7$ er $0, 200, \cdots, 1400$ mm.
- Funksjonen CubicSpline fra scipy.interpolate lager "glatt og pen" baneform $y(x)$ i form av 3.gradspolynomer $(ax^3 + bx^2 + cx + d)$ mellom skruene.
- Med import numpy as np og deretter
  x = np.arange(0.000, 1.401, 0.001)
  blir x en tabell med verdiene
  (0.000, 0.001, 0.002, ···, 1.400)
  hvoretter "alle interessante størrelser" kan beregnes på disse 1401 stedene horisontalt, dvs
  $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, $R^{-1}(x)$, $\beta(x)$, $V(x)$, $A_{\parallel}(x)$, $A_{\perp}(x)$, $f(x)$, $N(x)$, $V_x(x) = V(x) \cdot \cos[\beta(x)]$, ...
- Tidsutvikling $x(t)$: Aller enklest er å bruke at $V_x = \Delta x / \Delta t$, slik at $\Delta t(x) = \Delta x / V_x(x)$ blir tid brukt på horisontal forflytning fra x til $x + \Delta x$.

Eksperimentelt :

- Filme (minst) 10 "identiske" rulleforsøk med mobilkamera.
- Måle $\{t, x, y\}$ med programmet tracker.
- Beregne sluttfart, med middelverdi og standardfeil. Sammenligne numerikk og eksperiment.

Steiners sats [OS1 10.5 ; YF 9.5 ; LL 6.3]

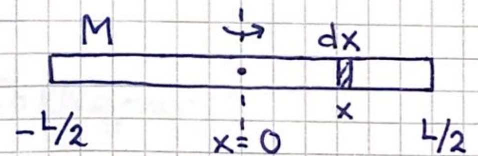


Hvis aksen A er parallell med aksen A_0 gjennom CM :

$$\boxed{I = I_0 + M \cdot d^2}$$

[Se notat for utledning.]

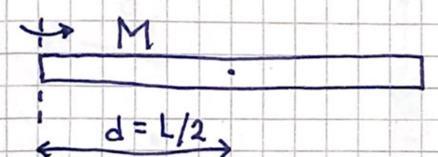
Eks 1: Tynn stang eller plate (f.eks. ei dør)



$\rho = x, \quad dm/M = dx/L$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot M \cdot \frac{dx}{L} = \underline{\frac{1}{12} M L^2}$$

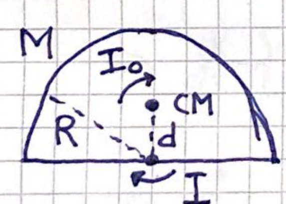
(svingdør)



$$I = I_0 + M \cdot d^2 = \frac{1}{12} M L^2 + M \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$= \underline{\frac{1}{3} M L^2} \qquad \text{(vanlig dør)}$$

Eks 2: Halv sirkulær plate (se s. 33 og 36)



Hel plate med masse 2M : $\frac{1}{2} \cdot 2M \cdot R^2$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2M \cdot R^2\right) = \underline{\frac{1}{2} M R^2}$$

Steiners sats : $I = I_0 + Md^2 \; ; \quad d = \frac{4}{3\pi} R$

$$\Rightarrow I_0 = I - Md^2 = \frac{1}{2} M R^2 - \frac{16}{9\pi^2} M R^2 \approx \underline{0.32 \, M R^2}$$

Impuls, kollisjoner, rakett [OS1 9; YF8; LL5]

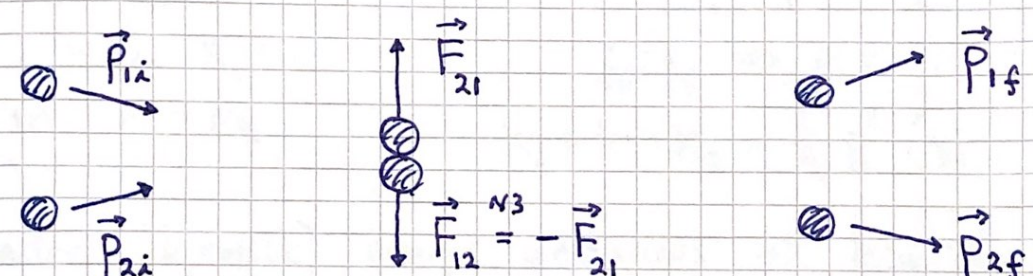
N2 for masse m : $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$

$\vec{p} \overset{def}{=} m\vec{v}$ = massens impuls (evt bevegelsesmengde)

$\Rightarrow \boxed{N2: \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$ $\quad [p] = kg \cdot m/s$

> Impulsbevarelse : Hvis netto ytre kraft $\vec{F} = 0$, er systemets impuls $\vec{p}$ bevart.

Kollisjoner :



$$N3 \Rightarrow \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0 \overset{N2}{\Longrightarrow} \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left\{\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{TOT} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konstant}$$

Pga N3 endrer indre krefter ikke systemets totale impuls

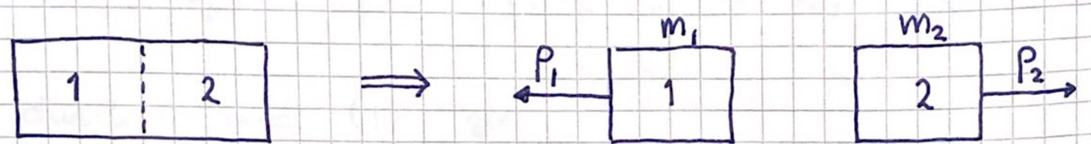
Kollisjoner (støt) er som regel <u>kortvarige</u>

$\Rightarrow \quad \Delta U \approx 0 \;; \quad \Delta E \approx \Delta K \leq 0 \;;$ mekanisk energi kan gå tapt pga deformasjon, varme osv.

$\Delta E = 0$: elastisk støt; $\Delta E < 0$: uelastisk støt

<u>Fullstendig</u> uelastisk støt når legemene henger sammen med <u>felles sluttfart</u>. Gir maksimal $|\Delta E|$.

Eksplosjon : Omvendt fullstendig uelastisk støt.



$p_i = 0, \; K_i = 0$

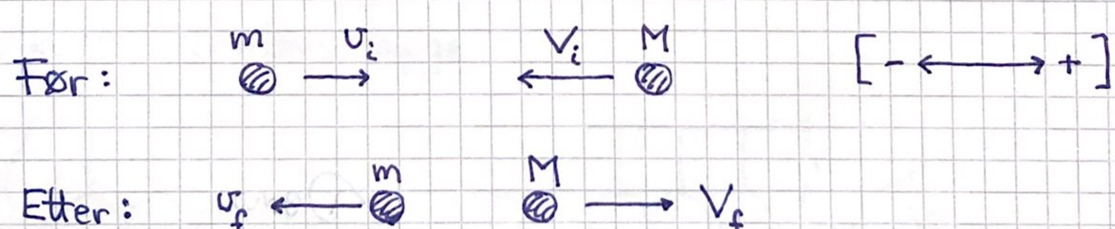
$m = m_1 + m_2$

$p_f = p_i \Rightarrow p_1 = -p_2$

$K_f = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} p_1^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$

Indre (kjemisk) energi omdannes til kin. energi

Sentralt støt mellom to masser :



$$\Delta p = 0 \;\Rightarrow\; m v_i + M V_i = m v_f + M V_f \qquad (1)$$

Fullstendig uelastisk (delvis uelastisk ikke løsbart):

m+M

$$\longrightarrow \quad v_f = V_f = \frac{mv_i + MV_i}{m+M}$$

Elastisk : $\Delta K = 0$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{1}{2}MV_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}MV_f^2 \qquad (2)$$

Omskriving av (1) og (2), samt bruk av 3. kvadratsetning:

$$m(v_i - v_f) = M(V_f - V_i) \qquad (1)$$

$$m(v_i - v_f)(v_i + v_f) = M(V_f - V_i)(V_f + V_i) \qquad (2)$$

(2) dividert med (1) gir

$$v_i + v_f = V_f + V_i \qquad (3)$$

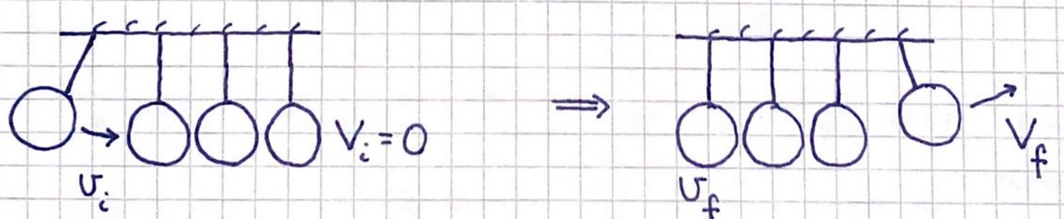
hvoretter hhv $(3)\cdot M - (1)$ og $(3)\cdot m + (1)$ gir:

$$v_f = \frac{M}{m+M}\left\{2V_i + v_i \cdot \frac{m-M}{M}\right\}$$

$$V_f = \frac{m}{M+m}\left\{2v_i + V_i \cdot \frac{M-m}{m}\right\}$$

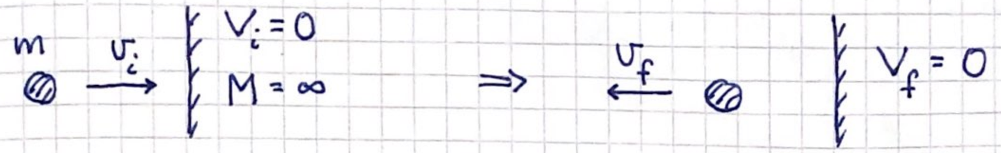
ved ombyttene
$m \leftrightarrow M$
$v_i \leftrightarrow V_i$

Eks 1 : Newtons vugge



$$m = M \Rightarrow V_f = v_i\,, \qquad v_f = V_i = 0$$

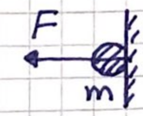
Eks 2: Elastisk støt mellom ball og vegg

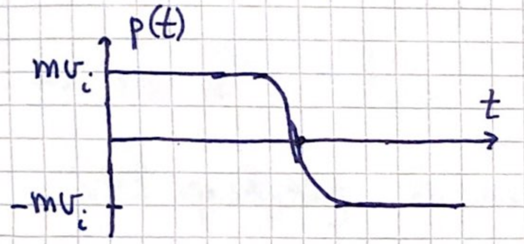


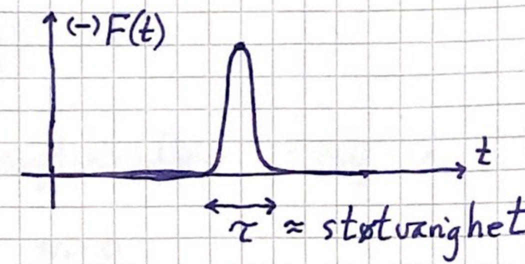
$$v_f = \frac{M}{m+M} \cdot \left\{ 0 + v_i \cdot \frac{m-M}{M} \right\} \overset{m \ll M}{=} -v_i$$

$$\left.\begin{aligned} K_f &= \tfrac{1}{2} m v_f^2 = \tfrac{1}{2} m v_i^2 = K_i \\ p_f &= m v_f + M V_f = -m v_i + M \cdot \frac{m}{m+M} \cdot 2 v_i = m v_i = p_i \end{aligned}\right\} \text{OK!}$$

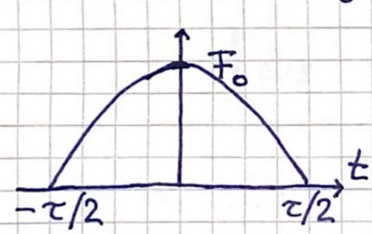
"Kraftstøt" på ballen: $dp = F(t)\, dt$







Eks: $F(t) = F_0 \cos(\pi t/\tau)$ for $-\tau/2 < t < \tau/2$



$$\Delta p = \int dp = \int F(t)\, dt$$

$$= F_0 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos(\pi t/\tau)\, dt$$

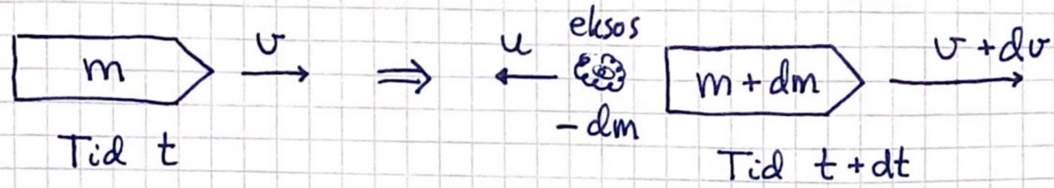
$$= F_0 \cdot \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} \frac{\tau}{\pi} \sin(\pi t/\tau) = \underline{\frac{2}{\pi} F_0 \tau}$$

Talleks: Hvis $\tau = 2$ ms og $v_i = 20$ m/s, blir

$$\Delta p = 2 m v_i = \frac{2}{\pi} F_0 \tau \quad \text{og} \quad \langle a \rangle = \frac{2 v_i}{\tau} = \frac{40\ \text{m/s}}{2\ \text{ms}} = 20\ \frac{\text{km}}{\text{s}^2}$$

dvs $\langle a \rangle \gg g$, og ytre kraft mg kan trygt neglisjeres i støtet.

Rakett:



Eksos (masse $-dm > 0$) sendes bakover med fart $u < 0$ relativt raketten; pga impulsbevarelse får raketten økt fart dv i løpet av tida dt:

$$\underbrace{m \cdot dv}_{\text{økning i rakettens impuls}} = \underbrace{u \cdot dm}_{\text{eksosens impuls}}$$

$$\Rightarrow \quad m \cdot \frac{dv}{dt} = F_{skyv} = u \cdot \frac{dm}{dt}$$

Ved oppskyting kommer tyngdekraften $-mg$ i tillegg:

$$m \cdot a = u \cdot \dot{m} - m \cdot g$$

som kan multipliseres med dt/m og integreres:

$$\int dv = u \int \frac{dm}{m} - g \int dt$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = u \ln \frac{m(t)}{m(0)} - g \cdot t$$

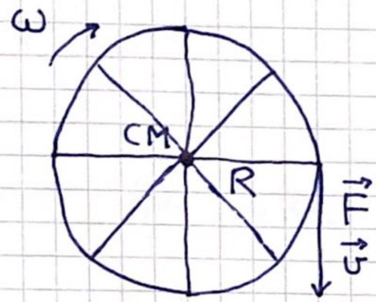
(antar $v(0) = 0$ og konstante u, g)

[Øving!]

Rotasjonsdynamikk ; akse med fast orientering

[OSI 10 ; YF 10 ; LL 6]

Enkelt eksempel :



Effekt tilført hjulet :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v = F \cdot R \cdot \omega$$

Kraftens dreiemoment :

$$\tau = F \cdot R$$

$$\Rightarrow \quad P = \tau \cdot \omega$$

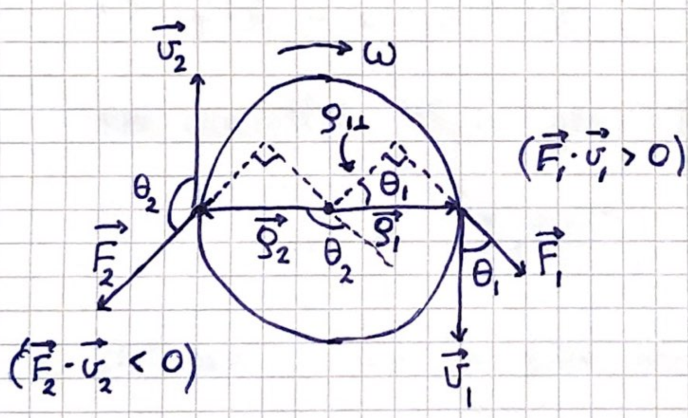
Alternativt :

$$P = \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2} I_0 \omega^2\right\} = \frac{1}{2} I_0 \cdot 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

Dermed : $\boxed{\tau = I_0 \, \dot{\omega}}$ N2, rotasjon om akse med fast orientering

Jf. N2, translasjon: $F = m\dot{v}$

Med flere krefter :



$$P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$
$$= \sum_i F_i \, v_i \cos\theta_i$$
$$= \left\{\sum_i F_i \, \rho_i \cos\theta_i\right\} \cdot \omega$$
$$= \underbrace{\left\{\sum_i F_i \, \rho_{i\perp}\right\}}_{=\tau} \cdot \omega$$

$\tau = \sum_i F_i \, \rho_{i\perp}$ = netto ytre dreiemoment, mhp rot. aksen

$\rho_{i\perp}$ = avstanden fra aksen til kraftens forlengelseslinje (= kraftens arm)

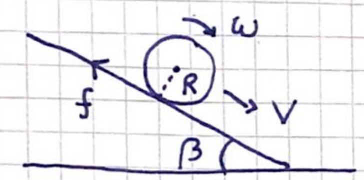
<u>Arbeid</u> utført av τ:

$$P = \tau \cdot \omega = \tau \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{og} \quad P = \frac{dW}{dt}$$

$\Rightarrow dW = \tau \, d\varphi$ = arbeid utført av τ ved omløpt vinkel $d\varphi$

Jf. $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ = arbeid utført av $\vec{F}$ ved translasjon $d\vec{r}$

Eks 1: Ren rulling på skråplan



$$I_0 = cMR^2, \quad \omega = \frac{V}{R}, \quad \dot{\omega} = \frac{\dot{V}}{R}$$

N2, $\parallel$: $\quad Mg \sin\beta - f = M\dot{V}$

N2, rotasjon om akse gjennom CM: $\quad \tau = I_0 \dot{\omega}$

Både $\vec{N}$ og $M\vec{g}$ har <u>null arm</u> mhp rotasjonsaksen

$\Rightarrow \tau = f \cdot R$

$\Rightarrow f \cdot R = cMR^2 \cdot \frac{\dot{V}}{R} \quad \Rightarrow \quad f = cM\dot{V}$

som innsatt i N2, $\parallel$ gir $\quad Mg \sin\beta - cM\dot{V} = M\dot{V}$

dvs

$$\dot{V} = \frac{g \sin\beta}{1+c},$$

det samme som vi fikk med energibevarelse (s. 38).