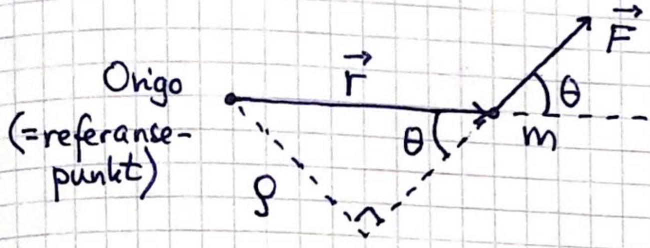
Rotasjonsdynamikk i 3D

Dreiemoment [OS1 10.6 ; YF 10.1 ; LL 5.5, 6.4]



$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ = kraftens dreiemoment på m, relativt origo

dvs $\vec{\tau} \perp \vec{r}$ og $\vec{\tau} \perp \vec{F}$ (Her: $\vec{\tau}$ <u>ut</u> av planet; høyrehåndsregel (HHR))

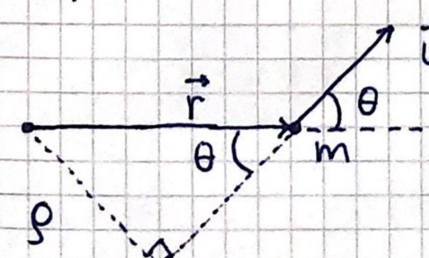
$$\tau = |\vec{\tau}| = r \cdot F \cdot \sin\theta = \rho \cdot F$$

ρ = kraftens arm = avstanden fra referansepunktet til kraftens forlengelseslinje (som før!)

Hvis flere ytre krefter $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \ldots$:

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Dreieimpuls [OS1 11.2 ; YF 10.5 ; LL 6.6]



$\vec{v}$; $\vec{p} = m\vec{v}$

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ($= m\vec{r} \times \vec{v}$)

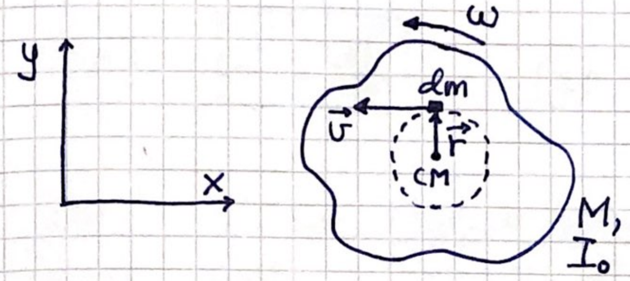
= massens dreieimpuls

$\vec{L} \perp \vec{r}$ og $\vec{L} \perp \vec{p}$; $L = |\vec{L}| = r \cdot p \cdot \sin\theta = \rho \cdot p$

Partikkelsystem: $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ (evt. $\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} \, dm$)

Dreieimpuls for stivt legeme [OS1..... ; YF 10.5 ; LL 6.6]

Først ren rotasjon om akse gjennom CM:



Bidrag fra dm:

$$d\vec{L}_s = \vec{r} \times \vec{v} \cdot dm$$
$$= r \cdot r \cdot \omega \cdot dm \cdot \hat{z}$$
$$= dI_0 \cdot \vec{\omega}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{L}_s} = \int d\vec{L}_s = \left\{ \int dI_0 \right\} \cdot \vec{\omega} = \underline{I_0 \vec{\omega}}$$

= "spinn" (indre dreieimpuls)

Vinkelfart som vektor:
$\vec{\omega}$ langs rotasjonsaksen

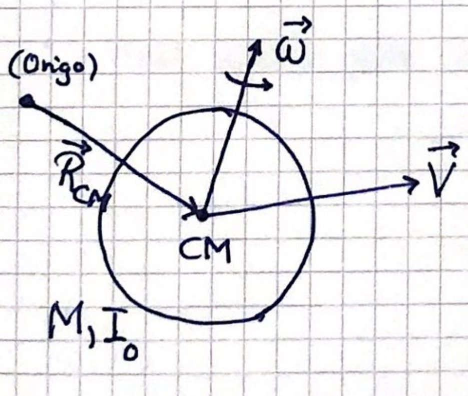
HHR: 4 fingre som krummer i rotasjonsretningen gir tommel langs $+\vec{\omega}$. [Her: $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$]

Hvis CM har translasjon (med fart $\vec{V}$), kommer <u>banedreieimpulsen</u> i tillegg,

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}.$$

<u>Total</u> dreieimpuls er summen av $\vec{L}_s$ og $\vec{L}_b$:

$$\vec{L} = \vec{L}_s + \vec{L}_b = \underline{I_0 \vec{\omega} + \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}}$$



Gjelder for legemer som er uendret etter en halv omdreining om rotasjonsaksen.
("Refleksjonssymmetri")

[Se utlagt notat for bevis]

N2 for rotasjon [OS1 11.2 ; YF 10.5 ; LL 6.6]

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \overset{N2}{=} \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{=0} = \frac{d}{dt}\{\vec{r} \times \vec{p}\} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Dvs: $\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$ (Jf. $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ for translasjon)

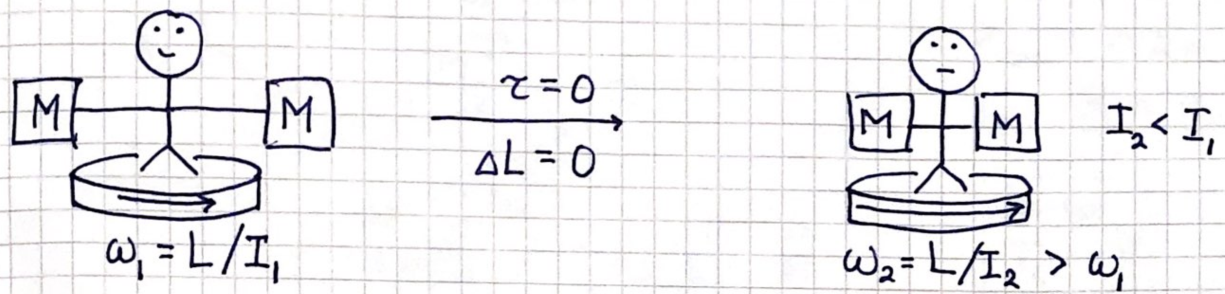
Dvs: Vi har statisk likevekt, $\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$, dersom netto ytre kraft $\vec{F} = 0$ og netto ytre dreiemoment $\vec{\tau} = 0$.

Bevaringslover i mekanikken

- For isolert system (dvs ingen ytre krefter) er E, $\vec{p}$ og $\vec{L}$ bevart (hhv total energi, impuls og dreieimpuls)
- For konservativt system er mekanisk energi $K + U$ bevart
- Når netto ytre kraft $\vec{F} = 0$, er $\vec{p}$ bevart
- Når netto ytre dreiemoment $\vec{\tau} = 0$, er $\vec{L}$ bevart

Eksempler, dreiemoment og dreieimpuls :

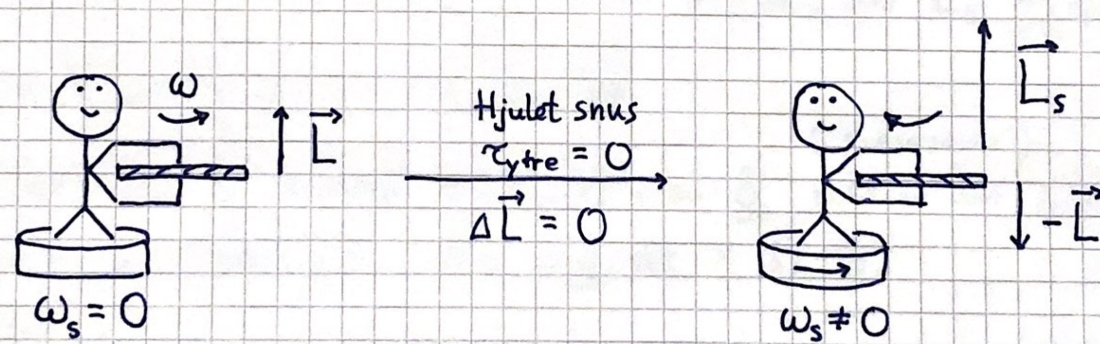
Eks 1 : Piruett [OS1 11.3 ; YF 10.6 ; LL 6.5]



Må gjøre et arbeid på de to massene når de trekkes inn til kroppen ; det gir økt rotasjonsenergi :

$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} L \omega_1 \; ; \quad K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} L \omega_2 > K_1$$

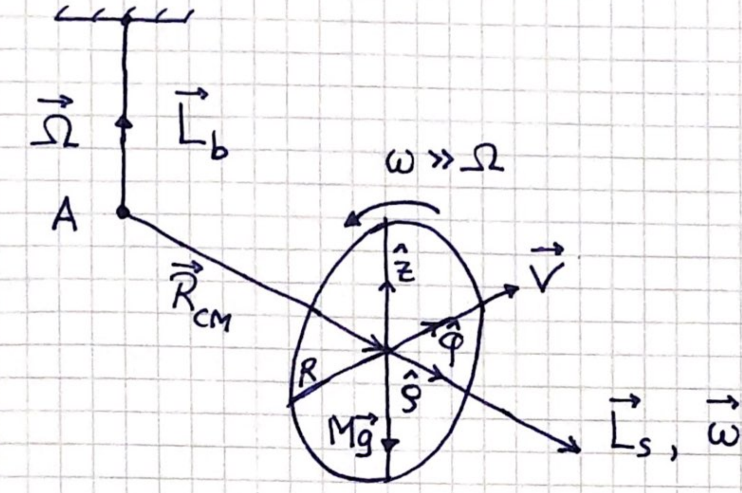
Eks 2 : Student med roterende sykkelhjul



$$\Delta \vec{L} = 0 \Rightarrow \underbrace{\vec{L}}_{\text{før}} = \underbrace{\vec{L}_s + (-\vec{L})}_{\text{etter}}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_s = 2\vec{L}$$

Eks 3 : Presesjon [OS1 11.4 ; YF 10.7 ; LL 6.10]



$I_0 \approx MR^2$

$R \approx 0.3\,m$

$R_{CM} \approx 0.2\,m$

$T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 5\,s$

$\boxed{\text{Beregn } T_\omega = \frac{2\pi}{\omega}}$

Vi bruker N2 for rotasjon om A: $\vec{\tau}_A = d\vec{L}_A/dt$

$$\vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} = R_{CM} M g\, \hat{\varphi}$$

$$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega} = MR^2 \omega\, \hat{\rho}$$

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} = R_{CM} M V\, \hat{z} = R_{CM}^2 M \Omega\, \hat{z}$$

$\Rightarrow \vec{L}_A \approx \vec{L}_s = MR^2 \omega \hat{\rho}$, siden $\omega \gg \Omega$, dvs $L_s \gg L_b$

$$\Rightarrow R_{CM} M g\, \hat{\varphi} = MR^2 \omega \frac{d\hat{\rho}}{dt}$$

("preseserer")

Akslingen, og dermed enhetsvektoren $\hat{\rho}$, roterer om z-aksen med vinkelfart Ω, dvs $d\hat{\rho}/dt = \Omega \cdot \hat{\varphi}$.

Dermed:

$$R_{CM} M g = MR^2 \omega \Omega \quad (\Rightarrow \omega = R_{CM} g / R^2 \Omega)$$

$$= MR^2 \cdot (2\pi/T_\omega) \cdot (2\pi/T_\Omega)$$

$$\Rightarrow T_\omega = (2\pi R)^2 / R_{CM}\, g\, T_\Omega$$

$$\approx \{(2\pi \cdot 0{,}3)^2 / 0.2 \cdot 10 \cdot 5\}\, s \approx \frac{2^2}{10}\, s = \underline{\underline{0.4\, s}}$$

eller $f_\omega = 1/T_\omega = 2.5$ omdreininger pr sekund