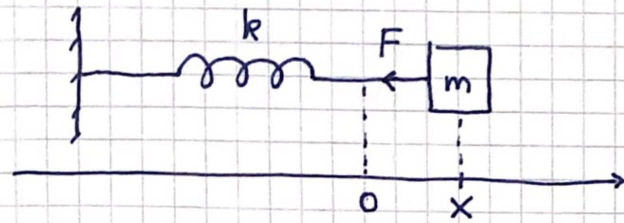
Svingninger [OS1 15; YF 14; LL 9]

- Periodisk oppførsel omkring en likevekt
- Kraft som trekker systemet tilbake mot likevekt
- Eksempler: Masse/fjær. Pendler. Atomer i molekyler

Harmonisk oscillator [OS1 15.1; YF 14.2; LL 9.1–9.3]



x = posisjonen til m
= fjærforlengelsen $(x>0)$
eller -forkortelsen $(x<0)$

Hookes lov: $F(x) = -kx$ = kraft fra fjær på m
k = fjærkonstanten ; $[k] = N/m$

N2: $-kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

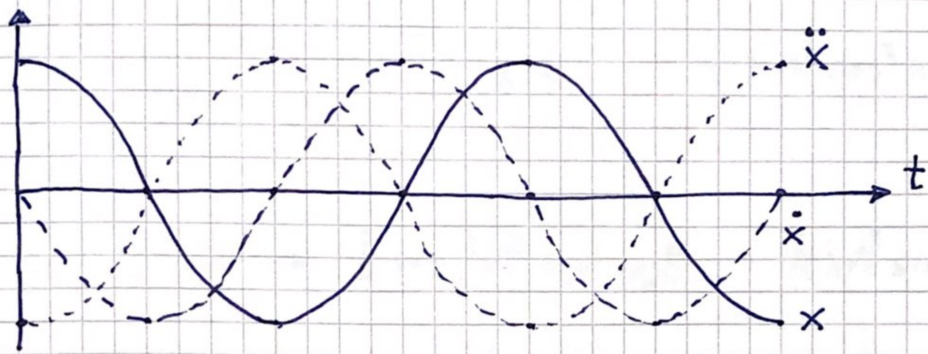
Løsning: $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

(evt: $x = B\cos\omega_0 t + C\sin\omega_0 t$)

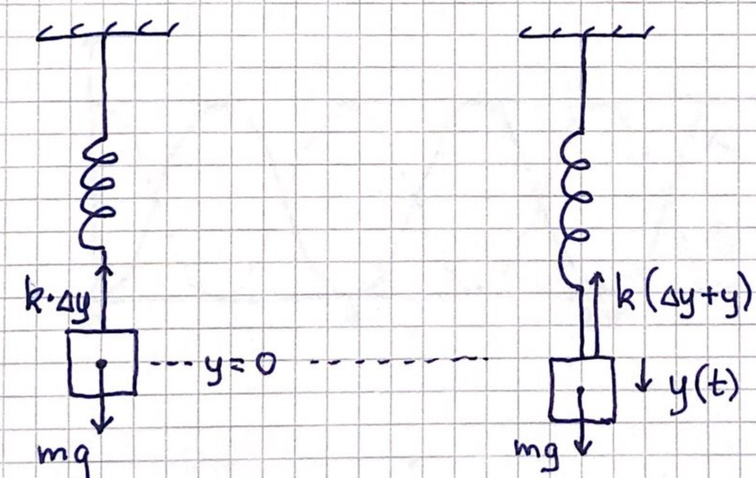
A = amplitude = max utsving fra likevekt $(x=0)$
ω_0 = vinkelfrekvens = faseendring pr tidsenhet
$T = 2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr hel svingning
$f = 1/T$ = frekvens = antall svingninger pr tidsenhet
$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase
φ = fasekonstant

Enheter: $[A] = [x]$; $[\omega_0] = s^{-1}$; $[T] = s$;
$[f] = s^{-1} = Hz$; $[\varphi] = 1$

Med <u>startbetingelser</u> (f.eks.) $x(0) = A$ og $\dot{x}(0) = 0$ er $\varphi = 0$ og $x(t) = A\cos\omega_0 t$, og dermed er <u>farten</u> $\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin\omega_0 t$ $[= \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \pi/2)]$ og <u>akselerasjonen</u> $\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A\cos\omega_0 t$ $[= \omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \pi)]$



Tyngden mg endrer ikke frekvensen:



Strukket likevekt:

N1 $\Rightarrow k\cdot\Delta y = mg$

$\Rightarrow \Delta y = mg/k$

N2:

$m\ddot{y} = mg - k(\Delta y + y) = -ky$

$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0$

$\Rightarrow$ Harmonisk svingning omkring strukket likevekt,

$y(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$; $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

Energi i en harmonisk oscillator

[OS1 15.2 ; YF 14.3 ; LL 9.4]

Fjærkraften er konservativ; potensiell energi er (med $x(t) = A\cos\omega_0 t$):

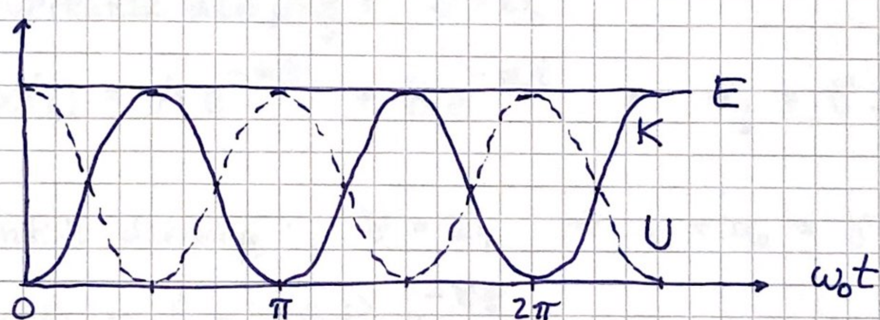
$$U = -\int_0^x (-kx)\,dx = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega_0 t$$

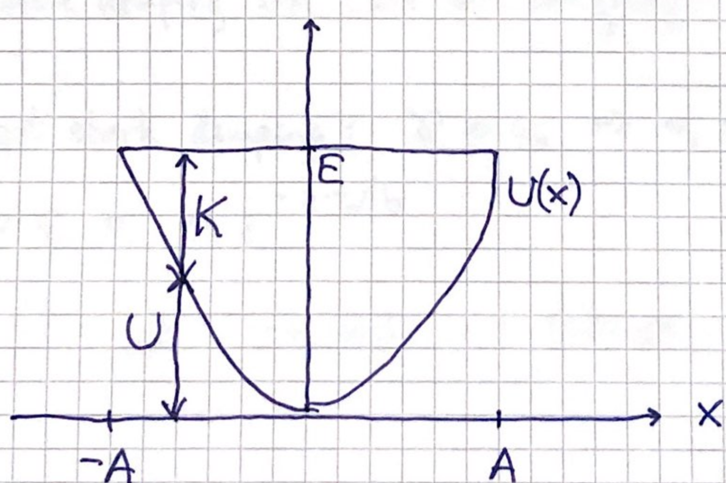
Kin. energi:

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2\sin^2\omega_0 t = \frac{1}{2}kA^2\sin^2\omega_0 t$$

$\Rightarrow$ Mekanisk energi er bevart:

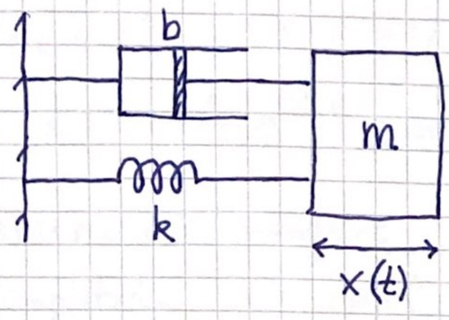
$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2$$





Dempet svingning [OS1 15.5 ; YF 14.7 ; LL 9.7]

Vi antar friksjon prop. med farten, dvs $f = -b\dot{x}$:



N2: $-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Vi setter inn "prøveløsning" $e^{-\alpha t}$:

$$\left[\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega_0^2\right] e^{-\alpha t} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Overkritisk demping : $\gamma > \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t} \quad ; \quad \alpha_{\frac{1}{2}} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Kritisk demping : $\gamma = \omega_0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \gamma$

$$x(t) = (A + B \cdot t)\, e^{-\gamma t}$$

Svakeste demping som ikke gir svingninger (feks. støtdempere).

Meget sterk demping : $\gamma \gg \omega_0 \Rightarrow \alpha_1 \approx \frac{b}{m} \gg \alpha_2 \approx \frac{k}{b}$

$$\Rightarrow x(t) \approx B e^{-k \cdot t/b}$$

og $x(t)$ går sakte mot null (likevekt), uavhengig av m

Underkritisk (svak) demping : $\gamma < \omega_0$

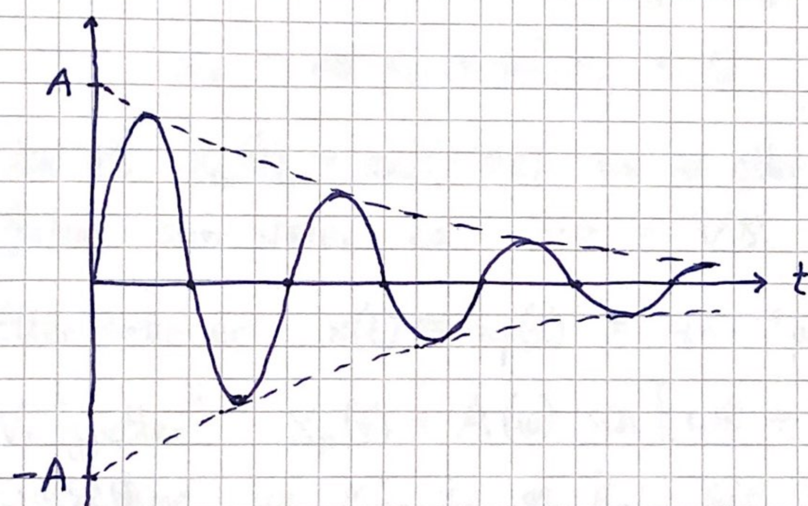
$$\alpha = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \gamma \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \gamma \pm i\omega \quad ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\exp(-\alpha t) = \exp(-\gamma t) \cdot \left[\cos \omega t \pm \sin \omega t \right]$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = A\, e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$$

Harmonisk svingning med eksponentielt avtagende amplitude, $A \cdot \exp(-\gamma t)$.

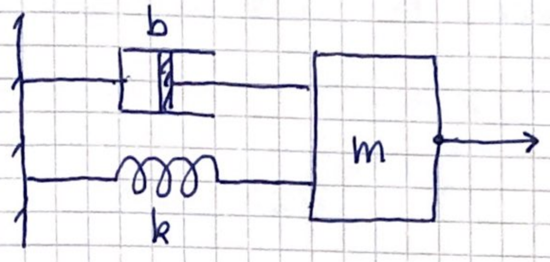
$\tau = 1/\gamma$ = tidskonstanten ; angir en omtrentlig tidsskala for svingningens varighet



Ofte er $\gamma \ll \omega_0$ (meget svak demping) ;

da er $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{k/m}$

Tvungen svingning og resonans [OS1 15.6; YF 14.8; LL 9.9]



Vi antar **harmonisk** ytre kraft:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

N2 : $-kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad ; \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Generell løsning : $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Homogen løsning oppfyller homogen ligning

$$\ddot{x}_h + 2\gamma \dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$$

slik at $x_h(t) \sim \exp(-\gamma t)$ dør ut etter et innsvingningsforløp som varer ca $3 \cdot \tau = 3/\gamma$.

Etter dette er $x(t) = x_p(t)$ = en "partikulærløsning".

Vi "gjetter" $x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$, hvoretter innsetting av x_p, $\dot{x}_p$ og $\ddot{x}_p$ gir to ligninger for bestemmelse av $A(\omega)$ og $\varphi(\omega)$:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\left[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2\right]^{1/2}} \quad ; \quad \tan \varphi(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}$$

Resonans: Stor amplitude A dersom $\gamma \ll \omega_0$ og $\omega \approx \omega_0$

Midlere (gjennomsnittlig) tilført effekt når oscillatoren drives på resonans, dvs når $F(t) = F_0 \cos \omega_0 t$:

$$\langle P \rangle = \langle F \cdot \dot{x} \rangle = \langle F_0 \cos \omega_0 t \cdot \omega_0 \cdot A(\omega_0) \cdot \cos \omega_0 t \rangle \qquad (\varphi(\omega_0)=0)$$

$$= F_0 \omega_0 \cdot \frac{F_0/m}{2\gamma\omega_0} \cdot \frac{1}{2} \qquad (\langle \cos^2 \omega_0 t \rangle = 1/2)$$

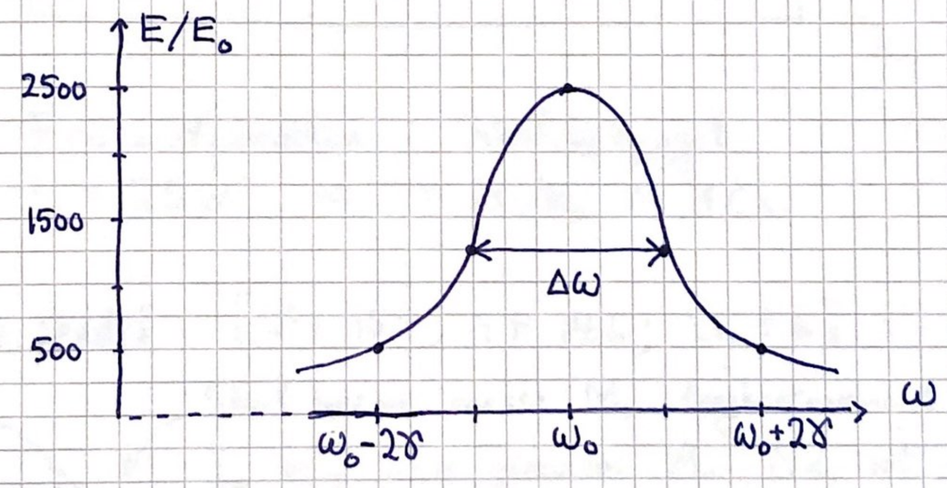
$$= F_0^2 / 2b$$

Oscillatorens energi :

$$E(\omega) = \frac{1}{2} k A^2(\omega) = E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \quad ; \quad E_0 = F_0^2 / 2k$$

Eks : $\omega_0 = 100 \cdot \gamma$ (svak demping)

$\Rightarrow E(\omega_0) = 2500\, E_0$; $E(\omega_0 \pm \gamma) = 1250\, E_0$; $E(\omega_0 \pm 2\gamma) = 500 E_0$



Resonanskurvens halvverdibredde : $\Delta\omega = 2\gamma = b/m$
(FWHM: Full Width Half Maximum)

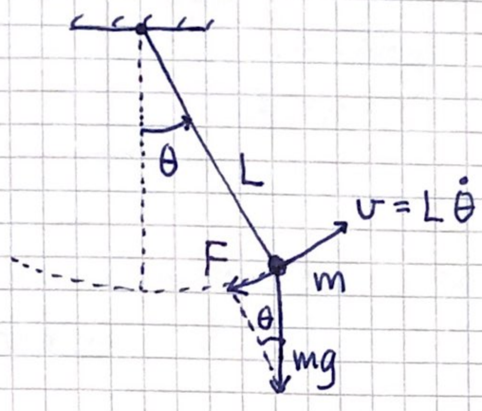
Oscillatorens Q-faktor ("Quality factor") :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma} \gg 1 \text{ for svak demping, } \gamma \ll \omega_0$$

Pendler

Matematisk pendel [OS1 15.4 ; YF 14.5 ; LL 9.6]

Punktmasse i enden av masseløs snor/stang:



N2: $F = ma$

$F = -mg\sin\theta, \quad a = L\ddot{\theta}$

$\Rightarrow -mg\sin\theta = mL\ddot{\theta}$

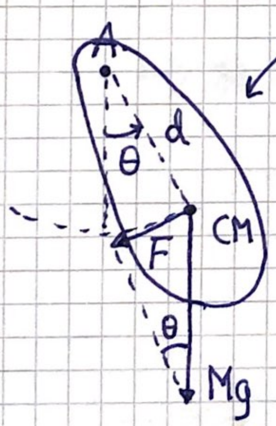
$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$

Vi antar små utsving, $|\theta| \ll 1$, slik at $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad \text{med} \quad \omega_0 = \sqrt{g/L}}$$

Eks: Foucaultpendelen i Realfagbygget.
$L = 25\text{ m} \Rightarrow T = 2\pi/\omega_0 \approx 10\text{ s}.$

Fysisk pendel [OS1 15.4; YF 14.6; LL 9.6]



Stivt legeme, masse M, treghetsmoment I mhp akse gjennom A. N2, rot. om A:

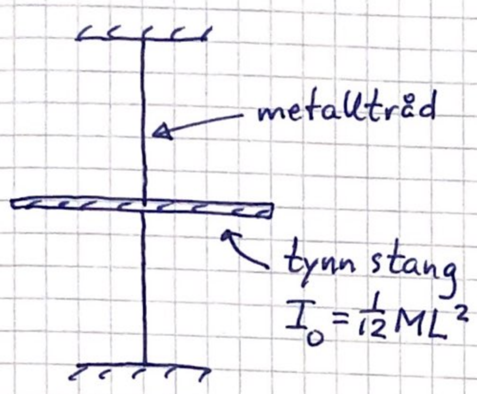
$\tau = I\cdot\ddot{\theta}$ med $\tau = -F\cdot d = -Mgd\sin\theta$

$\Rightarrow -Mgd\sin\theta = I\ddot{\theta}$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I}\sin\theta = 0$

Anta små utsving, $|\theta| \ll 1$; $\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad \text{med} \quad \omega_0 = \sqrt{Mgd/I}}$

Torsjonspendel [OS1 15.4; YF 14.4; LL 9.6]



Vridning av metalltråden en vinkel θ, sett langs metalltråden :

Dreiemomentet, fra tråden på stanga, er prop. med vinkelen θ :

$$\tau = -\kappa \cdot \theta \quad ; \quad \kappa = \text{trådens torsjonsstivhet}$$

N2 for rotasjon om trådaksen :

$$\tau = I_0 \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{med} \quad \omega_0 = \sqrt{\kappa / I_0}}$$

Exp: $M = 50\,g$, $L = 11\,cm$, $T_{exp} = 0.8\,s$

$$\Rightarrow \kappa = I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{12} M L^2 \cdot (2\pi / T_{exp})^2$$

$$\approx \underline{0.003\ N\cdot m}$$