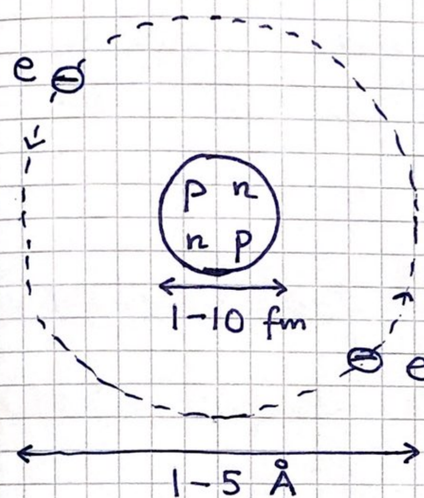
Elektrostatikk [OS2 5-8; YF 21-24; LHL 19-20]

Elektrisk ladning [OS2 5.1; YF 21.1; LHL 19.1]

Materie = molekyler / atomer = atomkjerne og elektroner

Klassisk atommodell (Niels Bohr 1913, NP 1922):



$1\ \text{fm} = 10^{-15}\ \text{m}$

$1\ \text{Å}$ (ångstrøm) $= 10^{-10}\ \text{m}$

Partikkel	Symbol	Masse (kg)	Ladning
Elektron	e	$9.11 \cdot 10^{-31}$	$-e$
Proton	p	$1.67 \cdot 10^{-27}$	$+e$
Nøytron	n	$1.67 \cdot 10^{-27}$	0

Ladning er kvantisert, i enheter av

$$e = \text{elementærladningen} \equiv 1.602176634 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$$

Symbol for ladning: q, Q

Enhet: $[Q] = \text{C}$ (coulomb)

- Nøytrale atomer med <u>atomnummer</u> Z har Z protoner og Z elektroner $\Rightarrow Q = Z \cdot e - Z \cdot e = 0$

- <u>Ioner</u>: atomer og molekyler med $Q \neq 0$. Eks:

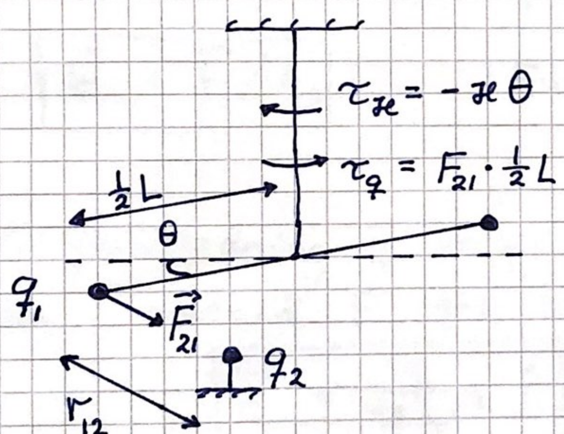
  F^- : fluorid, $Z = 9$, 10 elektroner, $Q = -e$

  NH_4^+ : ammonium, 7+4 protoner, 10 elektroner, $Q = +e$

- <u>Isotoper</u>: samme grunnstoff, ulikt antall nøytroner
  Eks: ^{13}N, ^{14}N, ^{15}N har hhv 6, 7 og 8 nøytroner

<u>Coulombs lov</u> [OS2 5.3; YF 21.3; LHL 19.3]

Charles Augustin de Coulomb, 1785:



Torsjonstråd med stang i likevekt når $\tau_q + \tau_\kappa = 0$

Coulomb fant at $F_{21} \sim q_1 \cdot q_2 / r_{12}^2$, og at <u>samme</u> type ladning gav <u>frastøtning</u>, mens <u>ulik</u> type ladning gav <u>tiltrekning</u>:

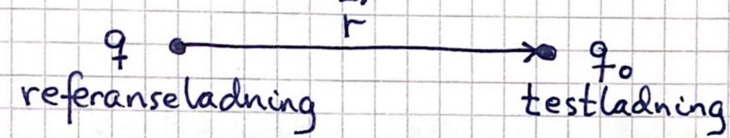
$\ominus\!\longrightarrow \quad \longleftarrow\!\oplus \quad ; \quad \longleftarrow\!\ominus \quad \ominus\!\longrightarrow \quad ; \quad \longleftarrow\!\oplus \quad \oplus\!\longrightarrow$

$$\boxed{\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}}$$ Coulombs lov

$\varepsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2$ = vakuumpermittiviteten

$\Rightarrow 1/4\pi\varepsilon_0 \approx 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$

Elektrisk felt [OS2 5.4–5.5 ; YF 21.3–21.5 ; LHL 19.3–19.5]



$\vec{F} = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$ = kraft fra q på q_0

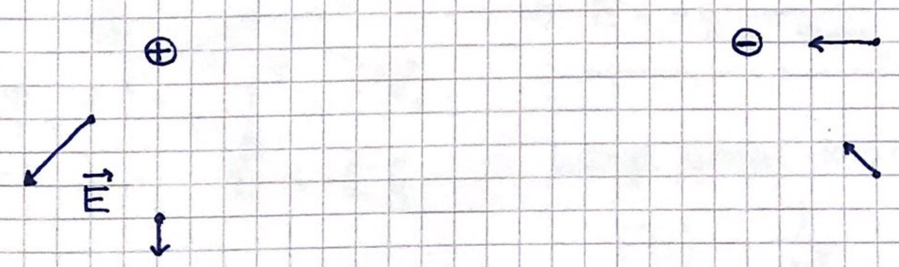
Elektrisk felt $\stackrel{def}{=}$ El. kraft pr ladningsenhet

$$\boxed{\vec{E} = \vec{F}/q_0}$$ Enhet: $[E] = N/C$

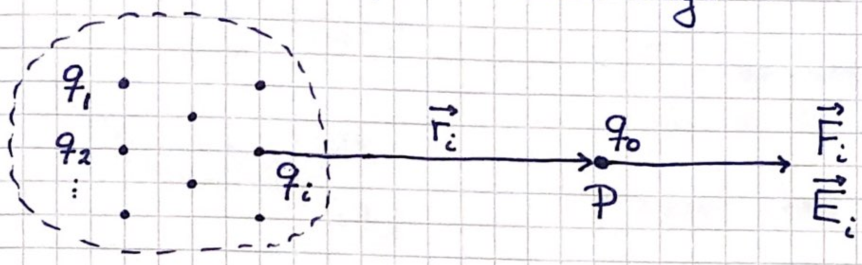
$\Rightarrow$ En punktladning q omgir seg med et el. felt $\vec{E}$ som i avstand $\vec{r}$ fra ladningen er

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

dvs rettet radielt utover ($q>0$) eller innover ($q<0$):



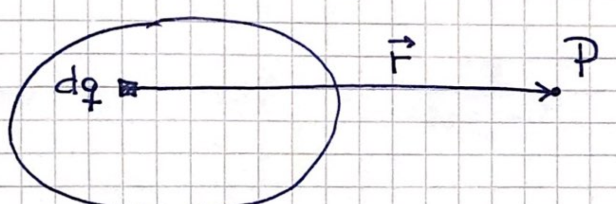
Med flere (referanse-) ladninger :



El. felt i posisjon P fra (ref.-) ladningene $\{q_1, q_2, \dots, q_i, \dots\}$:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{\vec{F}_i}{q_0} = \sum_i \frac{q_i q_0 \hat{r}_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2 q_0} = \sum_i \frac{q_i \hat{r}_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}$$

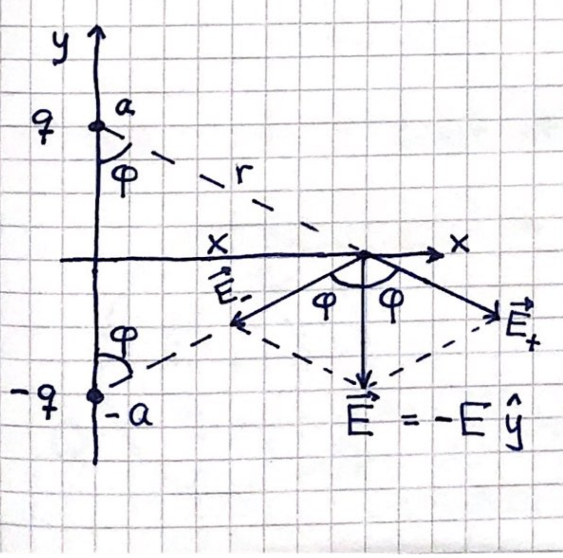
Med kontinuerlig ladningsfordeling : $q_i \to dq$; $\sum_i \to \int$



$$\vec{E}_P = \int \frac{dq\,\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Eks 1 : Enkel elektrisk dipol

Med punktladninger $\pm q$ i pos. $y = \pm a$, hva er feltet $\vec{E}$ i x, på x-aksen ?



$$E = 2E_+ \cos\varphi \qquad (E_- = E_+)$$

$$\cos\varphi = a/r = a/\sqrt{x^2+a^2}$$

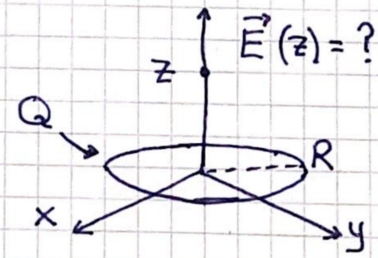
$$E_+ = q/4\pi\varepsilon_0 r^2$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{E} = -\hat{y}\cdot \frac{2qa}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+a^2)^{3/2}}}$$

Langt unna, $x \gg a$: $x \approx r$

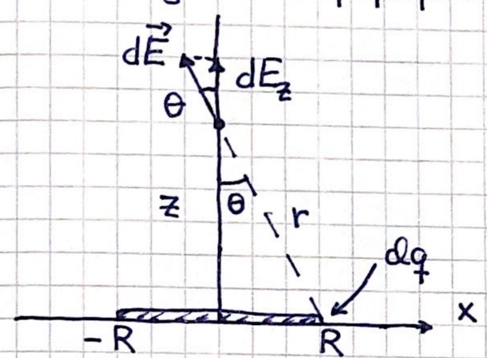
$$E(r) \sim \frac{1}{r^3}$$

Eks 2: Jevnt ladet ring, radius R, ladning Q



- Pga symmetri: $\vec{E}$ langs $\hat{z}$ på z-aksen $\Rightarrow \vec{E} = E_z \cdot \hat{z}$
- Langt unna ($z \gg R$): $E \approx \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$

Med $\hat{y}$ inn i papirplanet:



Bidrag fra dq på x-aksen:

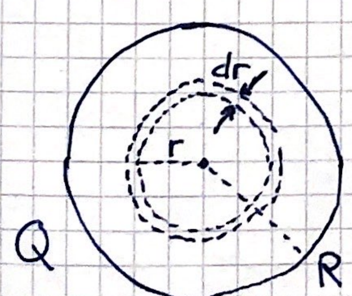
$$dE_z = dE \cdot \cos\theta$$
$$dE = dq / 4\pi\varepsilon_0 r^2$$
$$\cos\theta = z/r = z/\sqrt{z^2+R^2}$$

$$\Rightarrow \quad E_z = \int dE_z = \frac{z}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\int dq = \underline{\frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+R^2)^{3/2}}}$$

Rimelig svar:
Enheten stemmer. $E_z(0) = 0$. $E_z(-z) = -E_z(z)$.

$E_z \approx Q/4\pi\varepsilon_0 z^2$ når $z \gg R$.

Eks 3: Jevnt ladet skive



= sum av tynne ringer med radius r, bredde dr, og ladning

$$dq = Q \cdot \frac{dA}{A} = Q \cdot \frac{2\pi r \cdot dr}{\pi R^2}$$

Fra Eks. 2 vet vi at ringen gir bidraget

$$dE_z = \frac{dq \cdot z}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{Qz}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot \frac{r \cdot dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

til feltet på z-aksen (symmetriaksen). Dermed:

$$E_z = \int dE_z = \frac{Qz}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}}\, dr$$

Her er $\displaystyle\int_0^R \frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}}\, dr = \Big|_0^R \left[-(r^2+z^2)^{-1/2}\right] = \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}$

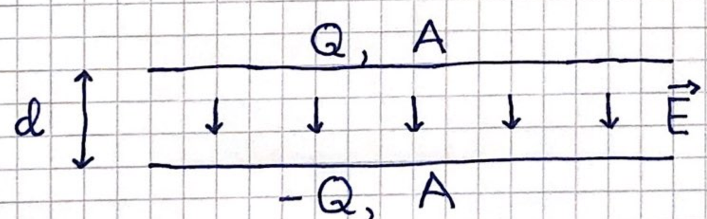
$$\Rightarrow \quad E_z = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+R^2/z^2}}\right]$$

$z \gg R$: $\displaystyle\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2} \Rightarrow E_z \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$ OK!

$z \ll R$: $\displaystyle E_z \approx \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$; $\displaystyle\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$ = ladn. pr flateenhet

Dvs: Konstant felt nær skiva!

Nyttig resultat: En kondensator er et kretselement med to metallplater som kan tilføres ladning $\pm Q$:



$\sigma = Q/A$

Med liten avstand d mellom platene blir feltet tilnærmet konstant mellom platene,

$$E \approx 2 \cdot \sigma/2\varepsilon_0 = \sigma/\varepsilon_0$$

og $E \approx 0$ utenfor.