Beregning av $\vec{E}$ fra V [OS2 7.4; YF 23.5; LHL 19.9]

Fra før (s.28): $\vec{F} = -\nabla U$

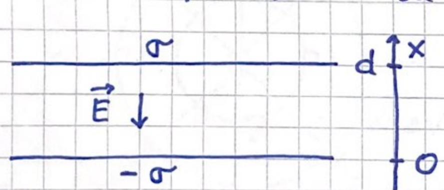
Dermed, siden $\vec{E} = \vec{F}/q_0$ og $V = U/q_0$:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

Eks 1: Punktladning

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow \vec{E} = -\hat{r}\frac{dV}{dr} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

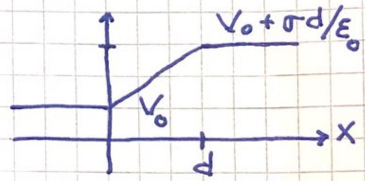
Eks 2: Platekondensator



Fra før: $\vec{E} = -\hat{x}\cdot\sigma/\varepsilon_0$

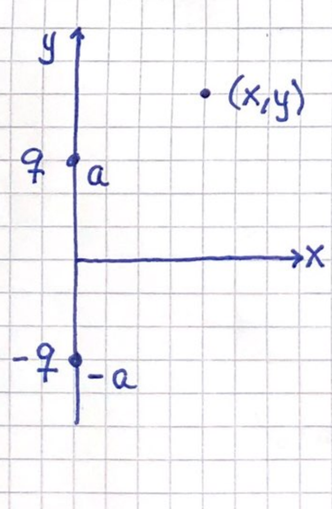
Da må $V(x) = V_0 + \sigma x/\varepsilon_0$

mellom platene



Utenfor : $E = 0 \Rightarrow V = \text{konstant}$

Eks 3: Dipol



$$V(x,y) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+(y+a)^2}}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left\{\frac{y-a}{[x^2+(y-a)^2]^{3/2}} - \frac{y+a}{[x^2+(y+a)^2]^{3/2}}\right\}$$

På x-aksen er $y = 0$

$$\Rightarrow E_y = -\frac{2qa}{[x^2+a^2]^{3/2}\cdot 4\pi\varepsilon_0} ;$$

OK, se s. 71

[Regn ut E_x selv]

Ekvipotensial [OS2 7.5 ; YF 23.4 ; LHL 19.11]

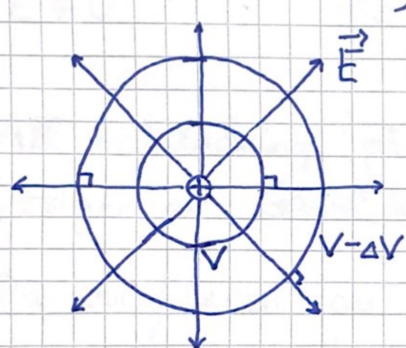
= område med V = konstant ; linje, flate eller volum

Anta forflytning $d\vec{s}$ på en ekvipotensialflate.

Da er $dV = 0$, dvs $\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$, dvs $\vec{E} \perp d\vec{s}$:

$$\boxed{\vec{E} \perp \text{ekvipotensialflatene}}$$

Eks 1 : Punktladning

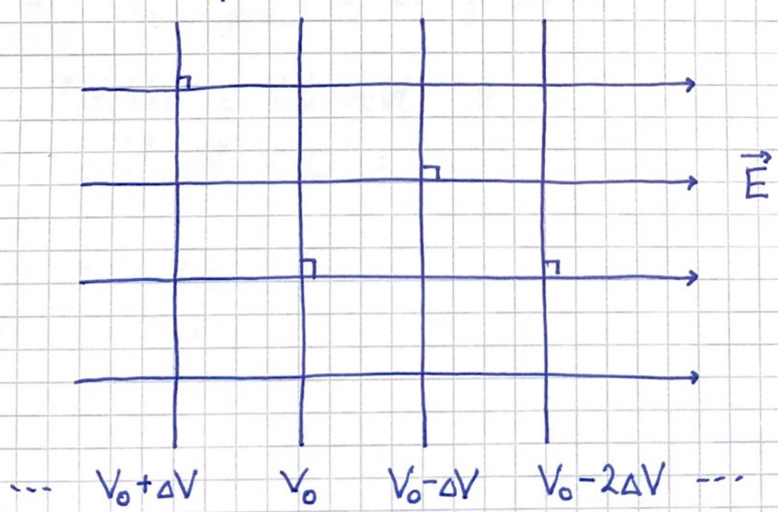


radielt felt $\vec{E}$

$\Downarrow$

kuleskall med V = konst.

Eks 2 : Uniformt felt $\vec{E}$



konstant V på plan normalt på $\vec{E}$

Materialers elektriske egenskaper

Ledere. Metaller [OS2 7.5; YF 22.5; LHL 19.8]

Metaller: 1 – 2 frie elektroner pr atom; settes i bevegelse i et elektrisk felt.
Dermed, i elektrostatisk likevekt:

- $E = 0$ inne i et metall.
  ($E \neq 0 \Rightarrow \vec{F} = -e\vec{E} \neq 0 \Rightarrow$ ikke likevekt)

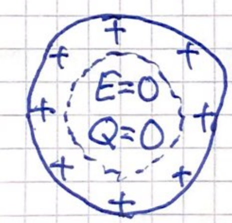
- All nettoladning på overflaten av et metall.
  (Følger av Gauss' lov; ikke pensum)

- På overflaten av et metall med nettoladning står $\vec{E}$ normalt på overflaten.
  ($E_{\parallel} \neq 0 \Rightarrow \vec{F}_{\parallel} = -e\vec{E}_{\parallel} \neq 0 \Rightarrow$ ikke likevekt)

  $E_{\perp} = \sigma/\varepsilon_0$; σ = overflateladning pr flateenhet

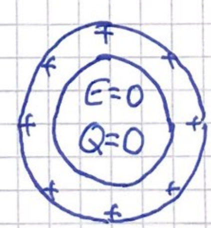
- Metallstykke i likevekt er et ekvipotensial.
  ($dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$: $E = 0$ inni, $\vec{E} \perp d\vec{s}$ på overflaten)

- Metall med hulrom: $E = 0$ i hulrommet; nettoladning på ytre overflate. Bevis:



Kompakt metall

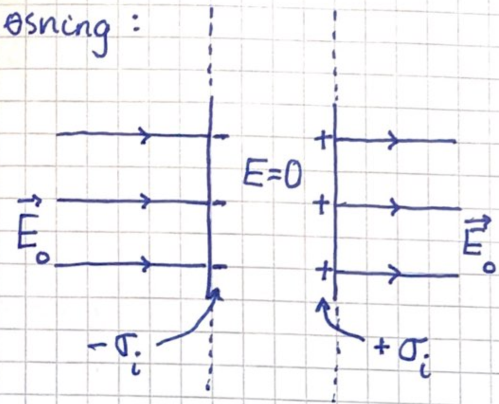
Tar bort nøytral bit inni.
$\longrightarrow$
Påvirker ingen ladninger.



Med hulrom

Eks 1: Bestem indusert overflateladning $\pm\sigma_i$ på metallskive i uniformt ytre felt $E_0 = 7.5$ kV/m.

Løsning:



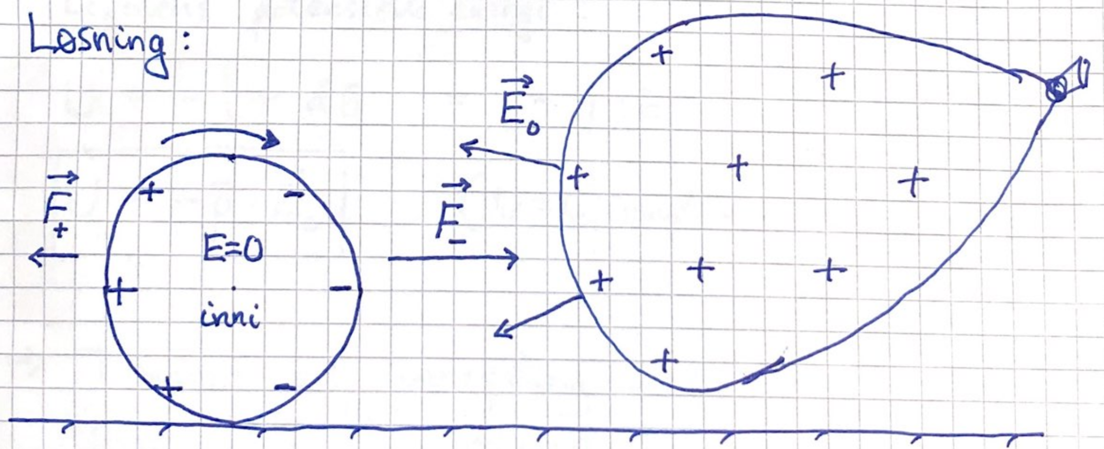
$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i = 0 \quad \text{inni skiva}$$

$$E_i = \sigma_i / \varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \sigma_i = \varepsilon_0 E_i = \varepsilon_0 E_0$$
$$= 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 7500 \ \text{C/m}^2$$
$$\simeq \underline{\underline{6.6 \cdot 10^{-8} \ \text{C/m}^2}}$$

Eks 2: Hva skjer med en tom ølboks når en gnidd ballong kommer i nærheten?

Løsning:

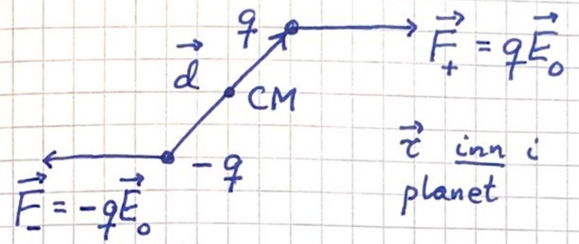


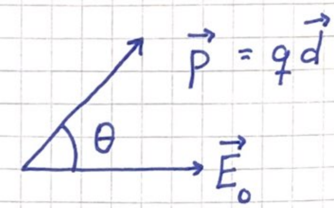
$F_- > F_+$ pga kortere avstand fra ballongen til ølboksens negativt ladete side

$\Rightarrow$ netto tiltrekning

Isolator (Dielektrikum) [OS2 8.5; YF 24.4-5; LHL 20.5]

Ingen frie elektroner, men <u>bundet</u> ladning som polariseres i et ytre felt $\vec{E}_0$; vi ser på en molekylær dipol :





Dreiemoment på dipolen :

$$\tau = 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot qE_0 \cdot \sin\theta = p \cdot E_0 \cdot \sin\theta = |\vec{p} \times \vec{E}_0|$$

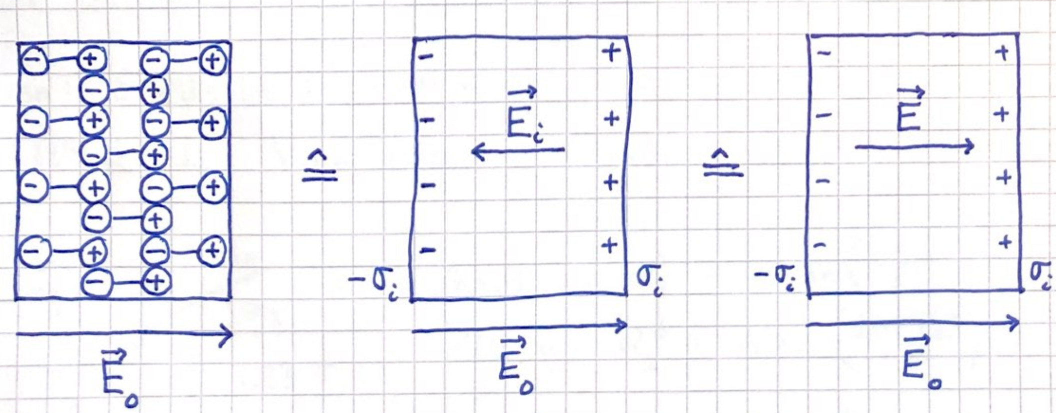
$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0}$$

Dipolens potensielle energi :

$$U = -\int \tau \, d\theta = -p \cdot E_0 \cdot \cos\theta$$

$$\boxed{U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0} \qquad \left(U = 0 \text{ valgt for } \theta = \pm\frac{\pi}{2}, \text{ dvs } \vec{p} \perp \vec{E}_0\right)$$

$\Rightarrow$ Tendens til innretting av $\vec{p}$ langs ytre felt $\vec{E}_0$.
Nettoeffekten blir indusert ladning $\pm\sigma_i$ på overflaten :



Men ingen nettoladning inni isolatoren.

Svekket felt inni : $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$; $E = E_0 - E_i$

Linear respons : E_i prop. med E_0 $\Rightarrow$ E prop. med E_0

Isolatorens relative permittivitet :

$$\varepsilon_r = E_0 / E \quad \Rightarrow \quad E = E_0/\varepsilon_r \quad ; \quad [\varepsilon_r] = 1$$

	Vakuum	Tørr luft	Plast	Rent vann	Perfekt metall
ε_r	1	1.00054	2 – 6	80	∞

Isolatorens permittivitet : $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$

Eks: Bestem feltstyrken i avstand 2.0 mm fra en punktladning 4.0 nC som befinner seg i et dielektrikum med relativ permittivitet 5.2.

Løsning: $E_0 = q/4\pi\varepsilon_0 r^2 \quad \Rightarrow E = E_0/\varepsilon_r = q/4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2$

$$\Rightarrow E = \left(9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-9} / 5.2 \cdot 4 \cdot 10^{-6}\right) \frac{V}{m} \approx \underline{\underline{1.7 \text{ MV/m}}}$$

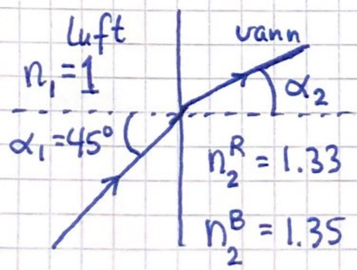
Eks: Hva er lysfarten i glass med $\varepsilon_r = 4.0$?

Løsn: $v = c/\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{1}{2} c = \underline{\underline{1.5 \cdot 10^8 \text{ m/s}}}$

Eks: Hva er brytningsvinkelen til rødt og blått lys i vann når innfallsvinkelen i luft er 45° ?

Løsn: Snells lov : $n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$; $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ = brytningsindeks

Luft: $n = 1$. Vann, rødt lys: $n = 1{,}33$; blått lys : $n = 1{,}35$



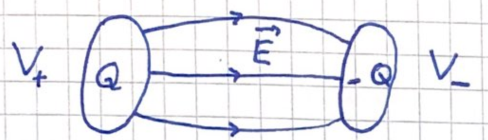
Rødt lys: $\alpha_2^R = \arcsin\left(\frac{\sin 45^\circ}{1.33}\right) = 32.12^\circ$

Blått lys: $\alpha_2^B = \arcsin\left(\frac{\sin 45^\circ}{1.35}\right) = 31.59^\circ$

$\Rightarrow$ Regnbue !

Kondensator. Kapasitans [OS2 8 ; YF 24 ; LHL 20]

Kondensator = to adskilte ledere, som kan tilføres ladning $\pm Q$:



Pot. forskjell (spenning) mellom lederne:

$$V = V_+ - V_- = -\int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Coulombs lov $\Rightarrow$ $\vec{E}$ prop. med Q $\Rightarrow$ V prop. med Q :

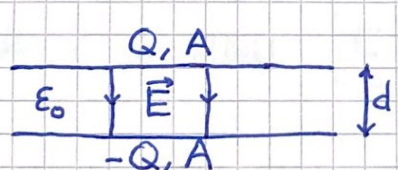
$$\boxed{C \overset{def}{=} \frac{Q}{V}}$$

C = kondensatorens kapasitans

Enhet : $[C] = \frac{C}{V} = F$ (farad)

Kretssymbol :

Eks 1 : Luftfylt platekondensator



$E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/A\varepsilon_0$; $V = E \cdot d$

$\Rightarrow$ $\underline{C = \varepsilon_0 A/d}$

Hvis $d = 1.0$ mm og $A = \pi \cdot (10\,\text{cm})^2$: $\underline{C = 0.28\ \text{nF}}$

Eks 2 : Fylt med dielektrikum

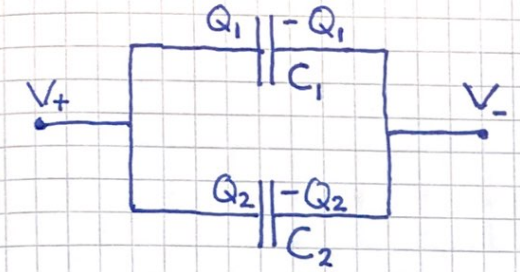
$\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$ $\Rightarrow$ $E = \sigma/\varepsilon = Q/A\varepsilon_r\varepsilon_0$; $V = E \cdot d$

$\Rightarrow$ $\underline{C = \varepsilon_r \varepsilon_0 A/d}$; økt med faktor ε_r

Enhet for ε : $[C] = F$ og $[A/d] = m$ $\Rightarrow$ $[\varepsilon] = F/m$

Kobling av flere kapasitanser [OS2 8.2; YF 24.2; LHL 20.2]

Parallellkobling:



Total lagret ladning: $Q = Q_1 + Q_2$

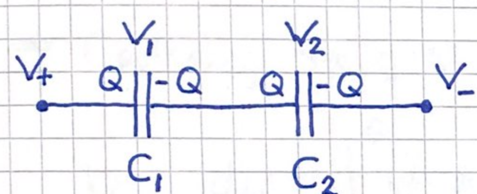
Lik spenning over C_1 og C_2:

$$V = V_+ - V_- = Q_1/C_1 = Q_2/C_2$$

$$\Rightarrow Q = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2) V$$

$$\Rightarrow \underline{C = \frac{Q}{V} = C_1 + C_2}$$

Seriekobling:



$$V = V_+ - V_-$$

Total spenning: $V = V_1 + V_2$

Lik ladning på C_1 og C_2:

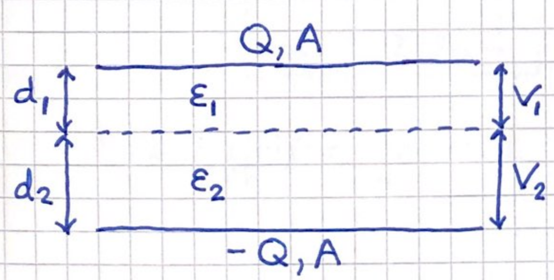
$$Q = C_1 V_1 = C_2 V_2$$

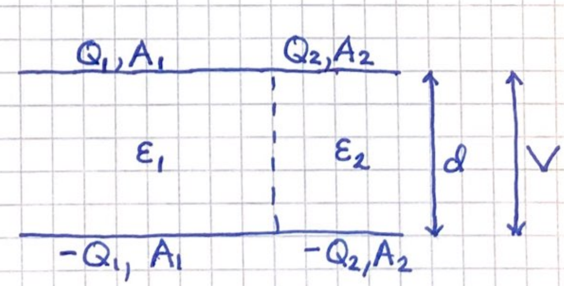
$$\Rightarrow V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) Q$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{1}{C} = \frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

N stk. i parallell: $\boxed{C = \sum_{j=1}^{N} C_j}$; i serie: $\boxed{C^{-1} = \sum_{j=1}^{N} C_j^{-1}}$

__En__ kondensator fylt med __ulike dielektrika__ oppfører seg som en parallell- eller seriekobling:





$$V = V_1 + V_2$$

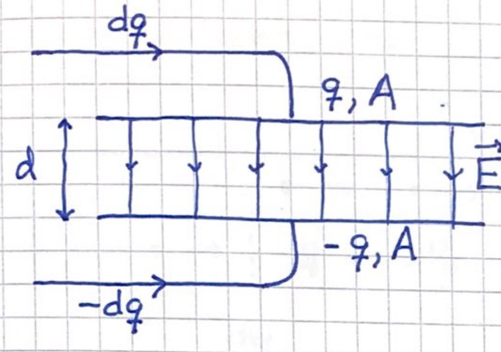
$$C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1} = \frac{d_1}{\varepsilon_1 A} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 A}$$

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_1 A_1}{d} + \frac{\varepsilon_2 A_2}{d}$$

Energi lagret i $\vec{E}$-felt [OS2 8.3; YF 24.3 ; LHL 20.4]

Opplading av kondensator, fra $q=0$ til $q=Q$, krever et arbeid, som gir potensiell energi lagret i $\vec{E}$-feltet.



Økning av ladningen fra $\pm q$ til $\pm(q+dq)$ øker mengden lagret potensiell energi med

$$dU = v(q)\,dq = \frac{q}{C}\,dq$$

$\Rightarrow$ Opplading fra $q=0$ til $q=Q$ gir pot. energi

$$U = \int dU = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{2C}Q^2 = \frac{1}{2}CV^2$$

som med $C = \varepsilon_0 A/d$ og $V = E\cdot d$ gir

$$U = \frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon_0 A}{d}\cdot(E\cdot d)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\cdot(A\cdot d)$$

Her er $A\cdot d$ volumet mellom platene, dvs der vi har $E\neq 0$

$\Rightarrow$ Energi pr volumenhet i $\vec{E}$-feltet:

$$\boxed{u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

Dette gjelder generelt.