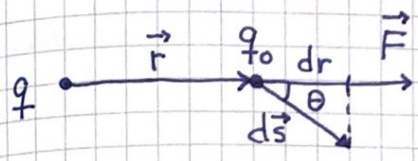
Potensiell energi og elektrisk potensial

[OS2 7.1–7.2 ; YF 23.1–23.2 ; LHL 19.9, 20.3]

Coulombkraften er konservativ, med tilhørende potensiell energi. For ladningspar q og q_0 :



$$dU = -\vec{F}\cdot d\vec{s} = -F\cdot ds\cdot\cos\theta$$
$$= -F\cdot dr = -q q_0\, dr / 4\pi\varepsilon_0 r^2$$

= endring i pot. energi når avstanden mellom q og q_0 endres fra r til $r + dr$

Naturlig valg : $U = 0$ når $r \to \infty$. Dermed:

$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} \frac{q q_0\, dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$$ = pot. energi for ladningspar q og q_0 i innbyrdes avstand r

Elektrisk potensial $\stackrel{\text{def}}{=}$ Pot. energi pr ladningsenhet

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{U(r)}{q_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$ = potensialet som q omgir seg med = Coulombpotensialet

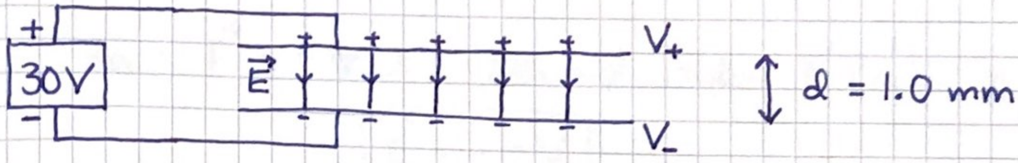
Enhet : $[V] = V$ (volt)

Potensialforskjell mellom posisjonene f og i :

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_i^f \frac{\vec{F}}{q_0}\cdot d\vec{s} = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

- Ser nå at $[E] = \frac{V}{m}$; dvs $1\,\frac{N}{C} = 1\,\frac{V}{m}$
- $1\text{ eV} = 1$ elektronvolt $= 1.6\cdot 10^{-19}\,C \cdot 1\,\frac{J}{C} = 1.6\cdot 10^{-19}\,J$, en hensiktsmessig energienhet på atomært nivå

Eks 1: Platekondensator; radius $R = 10\,\text{cm}$



Likespennings-
kilde (DC)

Bestem E mellom og $\pm Q$ på platene.

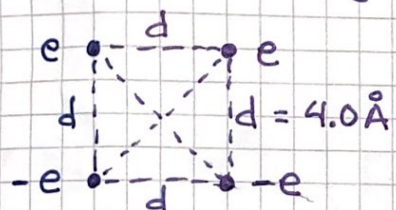
Løsning: $\Delta V = V_+ - V_- = -\int_-^+ \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{s} = E\cdot d$

$$\Rightarrow E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{30\,\text{V}}{1.0\,\text{mm}} = \underline{30\ \text{kV/m}}$$

$$E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/A\varepsilon_0 \Rightarrow Q = EA\varepsilon_0 \approx \underline{8.3\ \text{nC}}$$

Merk at $\vec{E}$ har retning fra ⊕ mot ⊖ (ladning), og dessuten fra høyt mot lavt potensial.

Eks 2: Pot. energi for flere punktladninger



Bestem total pot. energi U, samt systemets dipolmoment p.

Løsn: Alle ladn. vekselvirker parvis og bidrar med

$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

til pot. energi. Med N punktladninger er det

$$\binom{N}{2} = \frac{N!}{2!\,(N-2)!} = \frac{N(N-1)}{2}$$ distinkte ladningspar.

Her: $N = 4 \Rightarrow 6$ ladningspar. De 4 parene med $r_{ij} = d$ gir null nettobidrag til U

$$\Rightarrow U = -2e^2/4\pi\varepsilon_0\cdot\sqrt{2}\,d = -8.15\cdot 10^{-19}\,\text{J} = \underline{-5.1\ \text{eV}}$$

Dipolmoment: $p = 2\cdot e\cdot d = \underline{1.3\cdot 10^{-28}\ \text{Cm}}$ (retning oppover)

Beregning av $\vec{E}$ fra V [OS2 7.4; YF 23.5; LHL 19.9]

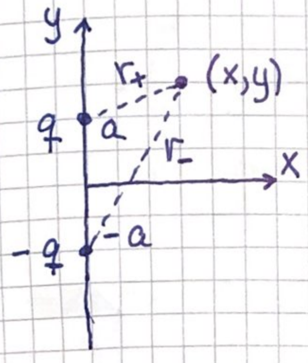
Fra før: $\vec{F} = -\nabla U$. Dermed, siden $\vec{E} = \vec{F}/q_0$ og $V = \frac{U}{q_0}$:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

Eks 1: Punktladning

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow \vec{E} = -\hat{r}\frac{dV}{dr} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Eks 2: Dipol. Finn $V(x,y)$ og deretter $\vec{E}(x,y)$.



Løsning: $r_\pm = \sqrt{x^2 + (y \mp a)^2}$

$$V(x,y) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right\}$$

$$\vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y}$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r_\pm}\right) = \pm\frac{y \mp a}{\left[x^2 + (y \mp a)^2\right]^{3/2}}$$

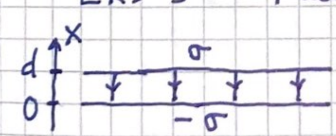
$$\Rightarrow E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{y-a}{\left[x^2+(y-a)^2\right]^{3/2}} - \frac{y+a}{\left[x^2+(y+a)^2\right]^{3/2}}\right\}$$

[Regn ut E_x selv]

På x-aksen er $y = 0$

$$\Rightarrow E_y = -\frac{2qa}{4\pi\varepsilon_0\left[x^2+a^2\right]^{3/2}},$$ som s. 59.

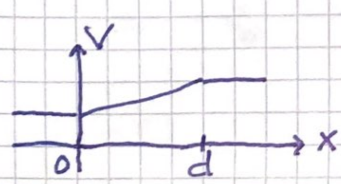
Eks 3: Platekondensator



Mellom platene er $\vec{E} = -\hat{x}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -\hat{x}\frac{\partial V}{\partial x}$

$\Rightarrow V(x) = V_0 + \sigma x/\varepsilon_0$

Utenfor platene er $E = 0 \Rightarrow V = \text{konstant}$

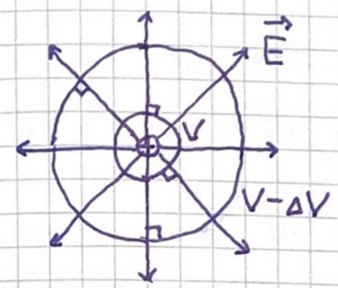


Ekvipotensial [OS2 7.5 ; YF 23.4 ; LHL 19.11]

Område (linje, flate eller volum) med konstant potensial
En liten forflytning $d\vec{s}$ på en ekvipotensialflate
gir $dV = 0$, dvs $\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$. Dermed:

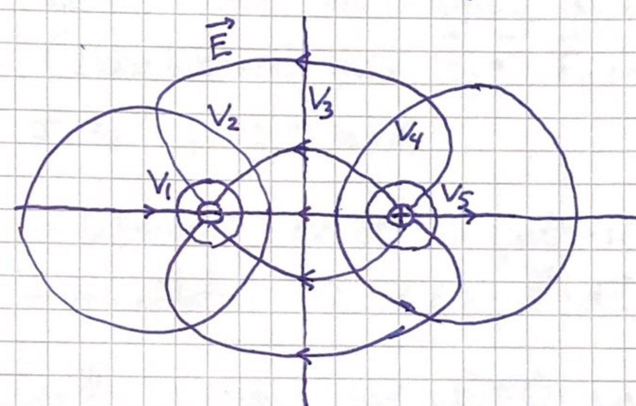
$$\boxed{\vec{E} \perp \text{ekvipotensialflatene}}$$

Eks 1: Punktladning

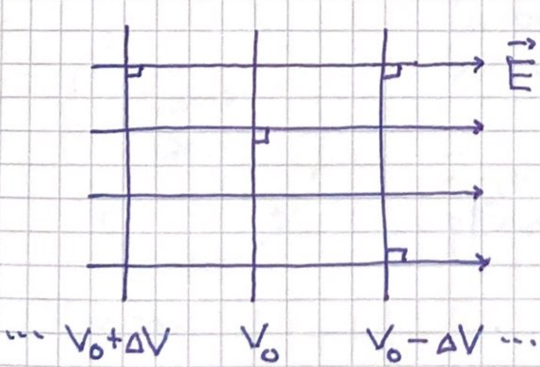


$\vec{E}$ radielt
⇒ konstant V på kuleskall med ladningen i sentrum

Eks 2: Dipol



Eks 3: Uniformt felt $\vec{E}$ (f.eks mellom platene i en platekondensator)



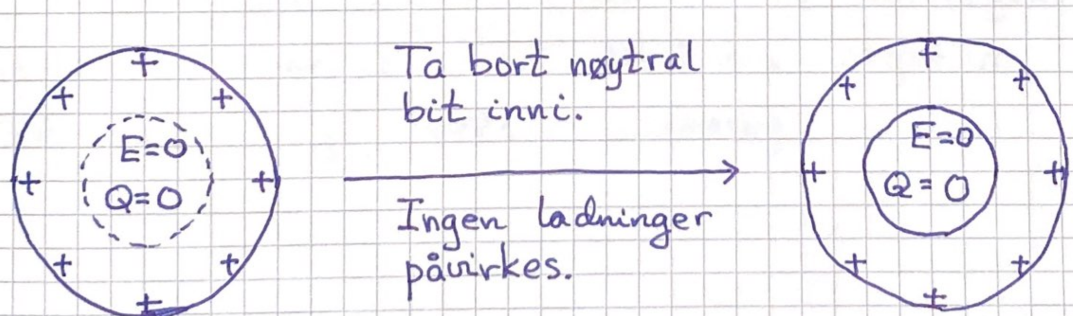
V = konstant på plan som står normalt på $\vec{E}$

Materialer og elektriske egenskaper

Ledere. Metaller [OS2 7.5; YF 22.5; LHL 19.8]

Frie elektroner (1-2 pr atom) som settes i bevegelse dersom $\vec{E} \neq 0$ $(N2: \vec{a} = \vec{F}/m_e = -e\vec{E}/m_e)$.
Dermed, i elektrostatisk likevekt :

- $E = 0$ inni et metall.
- En eventuell nettoladning ligger i sin helhet på overflaten. (Følger av Gauss' lov ; ikke pensum)
- På overflaten av metall med nettoladning står $\vec{E} \perp$ overflaten. (Ikke likevekt hvis $\vec{E}_{\parallel} = -\vec{F}_{\parallel}/e \neq 0$)
  Feltstyrke : $E_{\perp} = \sigma/\varepsilon_0$; $\sigma = Q/A$
- Et metallstykke i likevekt er et ekvipotensial.
  ($E = 0$ inni og $\vec{E} \perp$ overflaten $\Rightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$)
- Et metallstykke med hulrom har $E = 0$ inni hulrommet og all nettoladning på ytre overflate.
  Bevis :

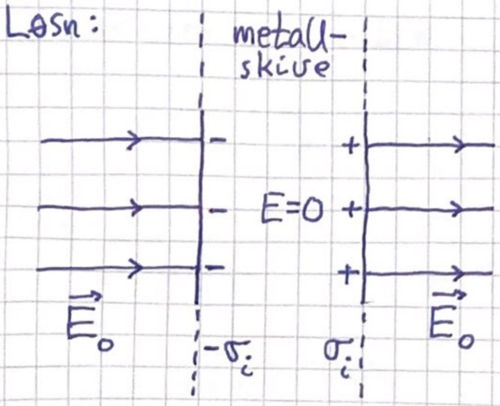


Kompakt metallstykke

Med hulrom

Eks 1 : Hva er indusert overflateladning $\pm\sigma_i$ på metallskive i uniformt ytre felt $E_0 = 8.85$ kV/m ?

Løsn:



Totalt felt inni skiva:

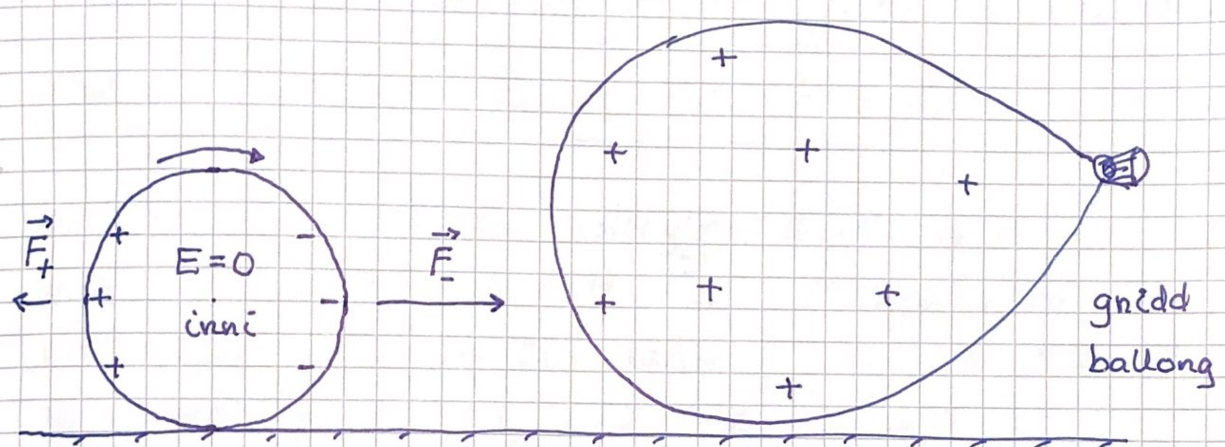
$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i = 0$$

$$\Rightarrow E_i = E_0 \quad ; \quad E_i = \sigma_i / \varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \sigma_i = \varepsilon_0 E_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 8850 \ \frac{C}{m^2}$$

$$= \underline{78 \ nC/m^2}$$

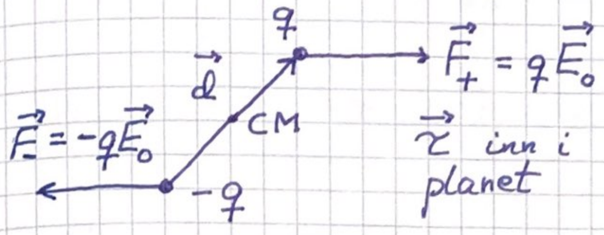
Eks 2 : Ølboks og ballong

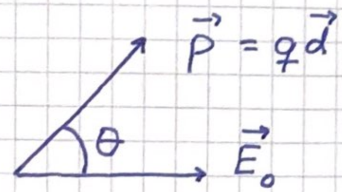


$F_- > F_+$ pga kortere avstand fra ballongens positive ladninger til ølboksens negative ladninger ; gir netto tiltrekning

Isolator. Dielektrikum [OS2 8.5; YF 24.4–24.5; LHL 20.5]

Har ikke frie elektroner, men <u>bundet</u> ladning som polariseres i ytre felt $\vec{E}_0$. Molekylær dipol:





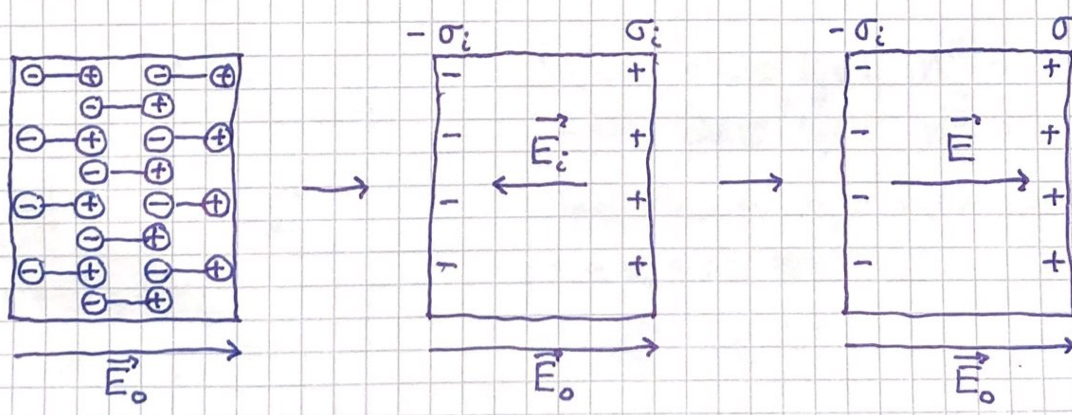
Dreiemoment på dipolen: $\left(\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \right)$

$$\tau = 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot qE_0 \cdot \sin\theta = p \cdot E_0 \cdot \sin\theta = |\vec{p} \times \vec{E}_0|$$

Dipolens potensielle energi: $U = -\int \tau \, d\theta = -p \cdot E_0 \cdot \cos\theta$

Altså: $\boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0 \quad ; \quad U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0}$

Gir tendens til at molekylære dipoler orienterer seg med $\vec{p}$ langs ytre felt $\vec{E}_0$. Makroskopisk nettoeffekt blir indusert ladning $\pm \sigma_i$ på overflaten, og dermed et svekket felt inni isolatoren:



Inni isolatoren: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$; $E = E_0 - E_i < E_0$

Lineær respons: E_i prop. med E_0 $\Rightarrow$ E prop. med E_0

Materialets relative permittivitet:

$$\varepsilon_r = E_0 / E \quad \Rightarrow \quad E = E_0 / \varepsilon_r$$

	Vakuum	Tørr luft	Plast	Rent vann	Perfekt metall
ε_r	1	1.00054	2–6	80	∞

Materialets permittivitet : $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$

Eks 1: Hva er E i avstand 2.0 cm fra punktladning $+3e$ inni et dielektrikum med $\varepsilon_r = 4.5$?

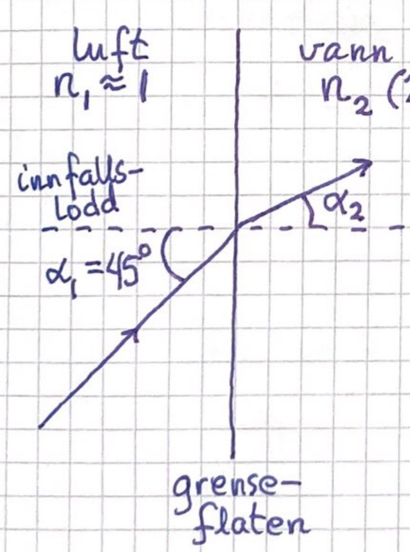
Løsn: $E = E_0/\varepsilon_r = q/4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2 = q/4\pi\varepsilon r^2$

$= [9\cdot 10^9 \cdot 3\cdot 1.6\cdot 10^{-19}/4.5\cdot 4.0\cdot 10^{-4}]\ \mathrm{V/m} = \underline{\underline{2.4\ \mu\mathrm{V/m}}}$

Eks 2: Farten til elektromagnetiske bølger avhenger av brytningsindeksen $n(\lambda) = \sqrt{\varepsilon_r(\lambda)}$: $v = c/n$

For synlig lys ($\lambda = 400-700$ nm) er $n \approx 1.3$ i vann, slik at lysfarten er ca $2.3\cdot 10^8$ m/s i vann.

Eks 3: Snells lov. En lysstråle skifter retning («brytes») når den passerer en grenseflate mellom to dielektrika med ulik brytningsindeks : $n_1 \cdot \sin\alpha_1 = n_2 \cdot \sin\alpha_2$



Vann, rødt lys: $n_2^R \approx 1.33$

—"—, blått lys: $n_2^B \approx 1.35$

Snells lov $\Rightarrow \alpha_2 = \arcsin\left(\frac{n_1 \sin\alpha_1}{n_2}\right)$

$\sin\alpha_1 = \sin 45° = 1/\sqrt{2}$

$\Rightarrow \alpha_2^R = 32.1° \ ; \ \alpha_2^B = 31.6°$

Forklarer f.eks. <u>regnbuen</u>.